

數學百子櫃系列（十七）

摺紙與數學

作者 阮華剛 譚志良



教育局
課程發展處數學教育組

版權

©2014 本書版權屬香港特別行政區政府教育局所有。本書任何部分之文字及圖片等，如未獲版權持有人之書面同意，不得用任何方式抄襲、節錄或翻印作商業用途，亦不得以任何方式透過互聯網發放。

ISBN 978-988-8159-33-8

目錄

前言	iv
作者簡介	v
阮序	vii
譚序	ix
第一章 基礎摺紙	1
第二章 摺出整數比	7
第三章 可以摺出這角度嗎？	14
第四章 正多面體摺紙	22
第五章 正多面體之間的關係	44
參考資料	54
附錄 A：正多面體互容的例子	56
附錄 B：正四面體與外接球	63
附錄 C：光碟內容	65

前言

為配合香港數學教育的發展，並向教師提供更多參考資料，課程發展處數學教育組於 2007 年開始邀請大學學者及資深教師撰寫專文，並蒐集及整理講座資料，輯錄成《數學百子櫃系列》。本書《摺紙與數學》是這個系列的其中一冊，作者阮華剛老師和譚志良老師對摺紙中的數學素有研究。本書列舉兩位作者多年來研究摺紙與數學的成果，展示出當中幾何的奧妙。本書不僅可供教師參考，亦可作為學生讀物。

本系列能夠出版，實在是各方教育工作者共同努力的成果。在此，謹向提供資料、撰寫文章的教師、學者，以及所有為本書勞心勞力的朋友，致以衷心的感謝。

如有任何意見或建議，歡迎致函：

九龍油麻地彌敦道 405 號九龍政府合署 4 樓

教育局課程發展處

總課程發展主任（數學）收

(傳真：3426 9265 電郵：ccdoma@edb.gov.hk)

教育局課程發展處
數學教育組

作者簡介

阮華剛老師，1977 年畢業於香港中文大學數學系，並獲得一級榮譽學位。1980 年於香港中文大學取得統計學碩士學位。自大學畢業後，阮老師一直從事中學數學教育工作，亦曾於 1999 年至 2000 年間，借調香港科技大學協助製作初中數學網上平台。在過去的二十年，阮老師積極參與香港數理教育學會各項活動，如數學遊踪及各類型的數學比賽等。過去亦多次應教育局數學教育組邀請，主持數學摺紙工作坊，介紹數學摺紙活動。

譚志良老師，資深中學數學教師，1989 年畢業於香港浸會大學數學系，1997 年於香港浸會大學取得科學計算碩士學位。譚老師熱心教學，並積極參與香港數理教育學會各項活動，包括數學遊踪和多個數學比賽。譚老師曾多次應教育局數學教育組、教育專業人員協會、數學教育學會的邀請，於摺紙工作坊中介紹摺紙與數學。譚老師亦曾於 2009 年至 2011 年間，借調課程發展處資優教育組和數學教育組。

阮序

摺紙與數學，一般人都認為是風馬牛不相及的兩個課題。就我個人而言，亦是講多做多，寫則免問。今回得教育局數學教育組全人大力推動，使本書得以面世，在此當然應對各方友人的全情支持，致以萬二分的謝意。

一般而言，數學能力是指計算、分析、推理、證明的能力，而摺紙是動手或手眼協調的工藝，怎麼會在立體幾何這個胡同裏狹路相逢？在我近十年的遊歷生涯裏，我發現一個十分有趣的現象：若你能用一些堅固的立體幾何模型，不論是木製的、紙製的、膠片製的，在一些適當的情景或場合中，使學生（或其他受眾）自己去發現有趣而美麗的多面體世界，讓他們自己去問問題，估答案，這樣的幾何課堂一定是有趣和有建設性的。根據我的教學經驗，不少學生由對數學摺紙的好奇，進而產生對幾何的好奇，其延續性和威力令我的學生負笈外國修讀建築（Architecture）及設計呢！

話說回來，用多面體（摺紙）來教授幾何卻是一個極新的課題，仍須大量的課堂實驗和經驗累積，才可使幾何課變成人見人愛的課堂，學生上完課後但見閃亮的眼睛和大量新鮮有趣的問題在他的腦海裏縈迴不息，這才是我對這本小書的良好願望。

譚序

能夠寫一本將摺紙和數學連結起來的書，是我一直的夢想。這個夢始於廿多年前同事枱面上一件學生的作品，我還記得那是一件布施知子的二十角星。我取得同事的同意，把它小心的拆開，明白了組件的構造後，就找些正方形紙片，自己試着做，做好了，再做下一個，做好了幾個，也開始嘗試加一些變化，…。我的枱頭，同事的枱頭，也漸漸的出現不同的立體。起初的創作，都是從既有的組件，結合自己的幾何知識，看看可以如何組合。後來想想，其實多給學生看看這些立體，可以加強他們對立體幾何的感覺，於是就開始找多一些摺紙書來參考。但是美麗複雜的作品，雖然可以在課堂展示，但沒有時間 (也因此沒可能) 大量去製作。

初期看的有關摺立體的書，作者大都把焦點放在作品的完成，至於作品背後涉及的幾何和可以引申的數學問題，卻往往被人忽略。後來我嘗試把一些基本摺法背後的數學寫下來，也把一些課堂上曾經作出的試驗記下來，在不同的場合和活動中和同工分享，於是慢慢的踏上了數學摺紙之路。

後來摺得多了，也多看了不同的摺紙書，進而網上尋找一番，也自己多想想，逐漸形成更多如何把摺紙用在課堂上的想法，也在創作上做了一些嘗試，想出一些較為教師和學生掌握，也可在課堂上探究的摺法。

在學習幾何摺紙的過程中，自己對幾何，特別是多面體的幾何的知識增加了不少，現在將其中的一部分放在這小書中，和大家分享，希望讀這本小書也拿起紙來摺摺的讀者也能體會在摺紙中了解數學，把數學的理解摺出來的樂趣。

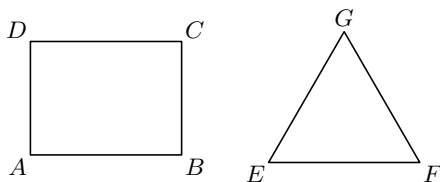
第一章 基礎摺紙

1.1 數學摺紙的基礎

日常摺紙的時候，我們的注意力都放在如何摺，至於摺紙背後有甚麼數學原理，我們並不關心。但當我們要談數學摺紙的時候，我們就要了解將一張紙摺來摺去的過程，究竟進行了哪些幾何的構作。

所以我們不妨將摺紙過程中的各種東西作幾何的對應。

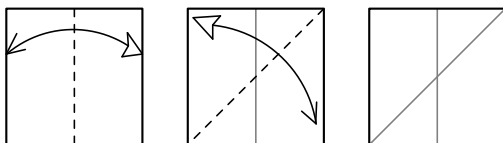
一張紙：在大多數的摺紙活動中，它是一個矩形，它有四條邊和四個直角。我們可以視之為四條線段和四點。有時，我們也會用到一些特別形狀的紙張（如三角形、五邊形）；因此，我們可將一張紙視為一個多邊形。



摺痕：在摺紙的過程中，我們會在紙上摺出不同的摺痕。在數學摺紙中，我們視摺痕為線段；摺痕和邊或摺痕和摺痕的交點我們視之為新的點。

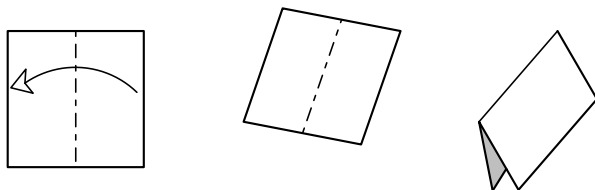
摺紙狀態： 由開始時的一張紙到最後的成品，每一步驟都產生一個新的狀態。在新的摺紙狀態下出現新的摺痕和新的點，也產生新的幾何形狀。

摺紙圖樣： 不同的摺痕的集合，組成摺紙圖樣。以下圖為例，一張紙由開始的狀態，經過一次摺合打開，多了一條摺痕，進入一個新的狀態；

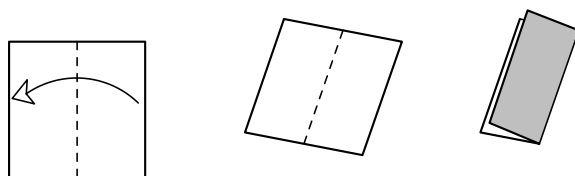


再經一次摺合打開，進入最後的狀態。在每一個狀態中出現的不同的摺痕，我們稱為摺紙圖樣。在這個例子中，我們最後摺了一對梯形和一對等腰直角三角形。

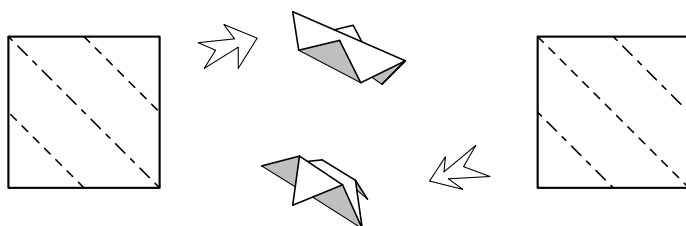
山線和谷線： 為了方便討論，不妨假設我們用的是一張一面有色和一面白的紙，並且在開始時白色面向上，有色面向下。山線是長短交替的虛線，摺的時候，山線令有色面碰有色面；谷線是一般的虛線，摺的時候，谷線令白色面碰白色面。



山線的意義



谷線的意義



山線和谷線的混合應用

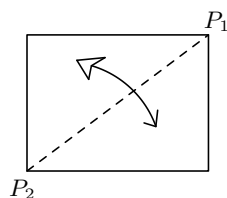
1.2 數學摺紙公理

尺規作圖為直尺和圓規可以怎樣用作出限制，同理，我們也應訂定數學摺紙可以怎樣摺。在 1991 年的一次國際摺紙會議中，已故日裔摺紙家藤田文章（Humiaki Huzita）整理並報告有關摺紙的六條幾何公理，摺紙界稱之為 Huzita Axioms。後來有摺紙家加上第七條公理。這七條公理介定數學摺紙可以怎樣摺。

公理

例

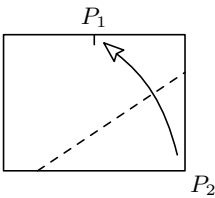
1. 已知兩點 P_1 和 P_2 ，可以摺一條唯一的摺痕通過它們。



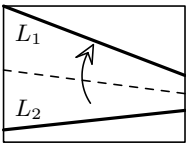
公理

例

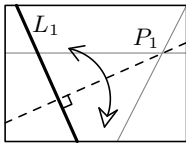
2. 已知兩點 P_1 和 P_2 ，可以透過一次唯一的摺疊使它們重合。



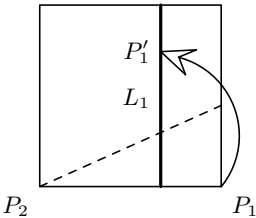
3. 已知兩線段 L_1 和 L_2 ，可以透過一次的摺疊使它們重合。



4. 已知點 P_1 和線段 L_1 ，可以作唯一的摺痕通過 P_1 並和 L_1 垂直。



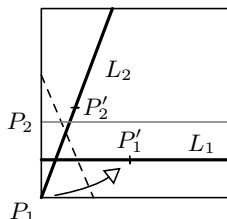
5. 已知兩點 P_1 和 P_2 和線段 L_1 ，可以透過一次的摺疊使 P_1 和 L_1 重合並且令摺痕通過 P_2 。



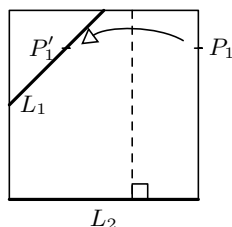
公理

例

6. 已知兩點 P_1 和 P_2 並兩線段 L_1 和 L_2 ，可以透過一次的摺疊使 P_1 和 P_2 分別和線段 L_1 和 L_2 重合。



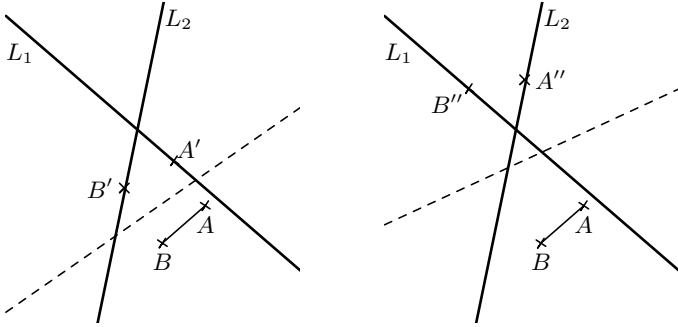
7. 已知點 P_1 並兩線段 L_1 和 L_2 ，可以透過一次唯一的摺疊使 P_1 和 L_1 重合並使摺痕垂直 L_2 。



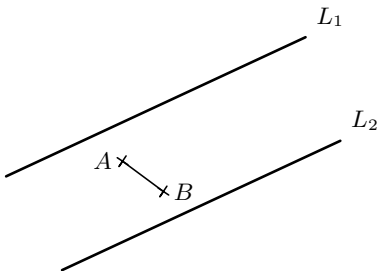
如果我們視摺紙為一個幾何作圖的過程，公理 (1) 保證兩點之間可作直線；公理 (2) 保證可找到兩點間之線段的垂直平分線；公理 (3) 保證可找到角平分線；公理 (4) 保證可過一點作直線垂直一已知直線；公理 (5) 等於以 P_2 為圓心，以 P_1P_2 為半徑作弧和 L_1 相交；公理 (7) 相當於作平行 L_2 並穿過 P_1 的直線和 L_1 相交。至於公理 (6)，它並非尺規作圖所容許。但因這公理，令摺紙可以得到一些尺規作圖做不到的結果（例如三等分角）。

我們也留意到，「摺紙公理」並沒有相當於幾何公理的嚴謹性。有些情況有時有多於一個可能的摺法，也有些時候沒有解。

(i) 例如下圖的情況，透過一次摺疊，使兩點 A 和 B 與 L_1 和 L_2 重合（即公理 (6)）的方法，有時候會多於一個。



(ii) 假如 L_1 和 L_2 平行並且 L_1 和 L_2 的距離大於 AB (如下圖)，則沒有方法使 A 和 B 與 L_1 和 L_2 於摺疊後重合。



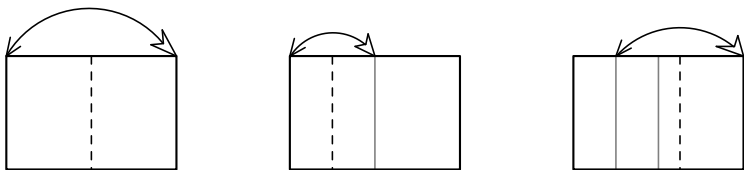
所以有人視「摺紙公理」為摺紙幾何的基本摺法而已。但無論如何，「摺紙公理」幫助我們從一種幾何的思路看摺紙，為摺紙和數學之間建立了一個互動的介面，所以有思考的價值。

第二章 摺出整數比

2.1 等分矩形

既然有了基本的摺法，就可以研究可以摺些甚麼「有用」或「有趣」的東西。摺紙的時候，通常我們從一張紙開始，也就是一個矩形，有四點，兩對平行線，和四個直角。

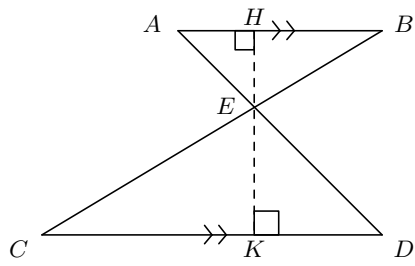
顯而易見，透過線和線的重合摺疊，把一張紙或一條邊分作兩等分、四等分、八等分等，都是沒有問題的。因此，假如 m 和 n 為正整數並且 $m + n = 2^k, k \in \mathbb{N}$ ，把一張矩形紙分作兩個矩形，使它們面積的比為例 $m : n$ 是一定可以做到的。以下是一個例子。



如何把一張矩形紙分作 5 : 3 的兩個矩形

那麼，其他比例又可以嗎？例如，可否把一張紙分為三等分呢？

下圖中 $AB \parallel CD$ 且 AD 和 BC 皆為直線並相交於 E 。



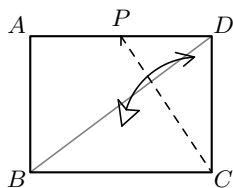
則 $\triangle ABE \sim \triangle DCE$ ，並且

$$\frac{HE}{KE} = \frac{HB}{KC} = \frac{AB}{DC}$$

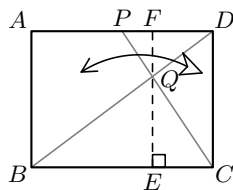
若 $AB : CD = 1 : 2$ ，則其餘的兩個比例亦是 $1 : 2$ ，因此下面的步驟，可以將一張矩形紙 $ABCD$ 分作 $1 : 2$ 的兩部分，進而分為三等分。



1. 把 A 摺向 D 再打開得中點 P
2. 作摺痕 BD

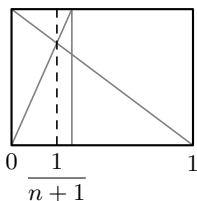
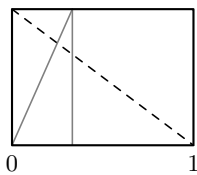
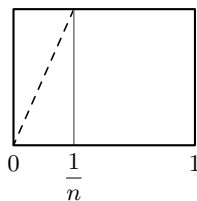


3. 作摺痕 PC



4. 作摺痕 EF 垂直 BC 並使 EF 穿過 BD 和 PC 的交點 Q , $CE : EB = 1 : 2$

其實，以上的摺法，也可以略為改變而將 $ABCD$ 從上下分為 $2 : 1$ 的兩分。細心的讀者可能會發現以上的方法是藉由 2 等分得到 3 等分。那麼是否可以由 3 等分得到 4 等分，由 4 等分得到 5 等分，餘此類推呢？答案是可以的，事實上若我們得知紙的一邊的 $\frac{1}{n}$ ，則可如下圖得到那一邊的 $\frac{1}{n+1}$ ，大家不仿以相似三角形去證明。



由此得知，對任意兩個自然數 p 和 q ，皆可透過有限次的摺紙步驟，最後得到一條摺痕，把一張矩形紙的面積分作 $p : q$ 兩部分。有興趣的讀者可參考 55 頁所列文章“Paper Folding fractions”。

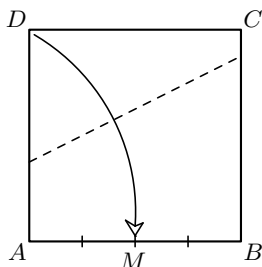
～ 練習 ～

1. 試透過有限次的摺紙步驟，把一張矩形紙分作 $5 : 3$ 的兩部分。
2. 試透過有限次的摺紙步驟，把一張矩形紙分作 $4 : 3$ 的兩部分。
3. 試透過有限次的摺紙步驟，把一張矩形紙分作 $2 : 3$ 的兩部分。

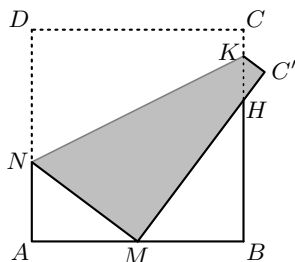
2.2 芳賀定理

日本筑波大學生物學教授芳賀和夫 (Kazuo Haga)，在等待實驗結果的時候喜歡用摺紙打發時間。他發現了以下的有趣結果。

「芳賀第一定理」



把正方形紙 $ABCD$ 的底 AB 對摺再打開得中點 M ，再把角 D 摺向 M



$$AN : NM = 3 : 5$$

$$MH : HC' = 5 : 1$$

$$BH : HC = 2 : 1$$

$$BK : KC = 7 : 1$$

以上的結果稱為「芳賀第一定理」。只要用勾股定理就可以證明得到。

「芳賀第一定理」提供了另一個把正方形紙分作三等分的途徑。當然，我們可以探究下去，看看還有甚麼有趣的結果。假如把注意力轉往直角三角形 AMN ，不難發現 $AN : AM : MN = 3 : 4 : 5$ 。這是一組勾股數。

不妨考慮把 D 摺向 AB 上其他位置，看看直角三角形 AMN 的邊長又會有甚麼關係呢？不妨設 $AB = 1$, $AN = x$ 及 $AM = \frac{p}{q}$ 其中 $p, q \in \mathbb{N}$ ，則 $MN = 1 - x$ 。

從勾股定理有

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 + x^2 = (1-x)^2$$

$$\frac{p^2}{q^2} + x^2 = 1 - 2x + x^2$$

$$x = \frac{q^2 - p^2}{2q^2}$$

所以，

$$\begin{aligned} AN : AM : MN &= \frac{q^2 - p^2}{2q^2} : \frac{p}{q} : 1 - \frac{q^2 - p^2}{2q^2} \\ &= q^2 - p^2 : 2pq : p^2 + q^2 \end{aligned}$$

因此，只要 AM 是有理數，則 $\triangle AMN$ 的三條邊的比例必然是「勾股數」。

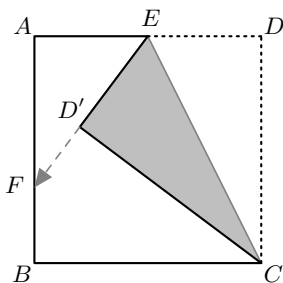
以下是一些結果

p/q	$AN : AM : MN$
$1/2$	$3 : 4 : 5$
$2/3$	$5 : 12 : 13$
$1/4$	$15 : 8 : 17$

可以透過摺紙得到「勾股數」，芳賀先生當初也想不到吧！

芳賀和夫沒有探究「勾股數」，但他卻繼續尋找其他三等分正方形的可能，結果得到「芳賀第二定理」和「芳賀第三定理」。

「芳賀第二定理」



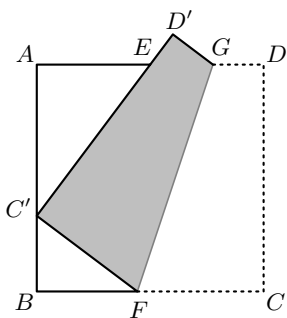
在正方形紙 $ABCD$ 中作摺痕通過 AD 的中點 E 和 C 把 D 由右上摺向左下得 D' ，設 F 為 ED' 的延線和 AB 的交點，則 $AB : FB = 3 : 1$

～ 思考題 ～

1. 試證明芳賀第二定理。
2. 日本摺紙家笠原邦彦先生在「芳賀第二定理」的基礎上，發現了 $3 : 1$ 以外的其他幾個比值。讀者不妨也試一試。

芳賀第一和第二定理，都可以用尺規作圖的方法做到。但是芳賀第三定理卻要求摺的時候，兩點同時對兩線。

「芳賀第三定理」



在正方形紙 $ABCD$ 中作摺痕 FG 使 $C'D'$ 通過 AD 的中點 E 並同時使 C' 落在 AB 上，則 $AB : C'B = 3 : 1$ 。

芳賀第三定理的摺法是尺規作圖所不容許的。這也是摺紙能得到而尺規做不到的關鍵一步。出發點的假設不同，就會有不同的結果。這是數學公理系統有意思的地方。

～ 思考題 ～

1. 假如正方形紙變為一般的矩形，芳賀定理是否依然正確呢？

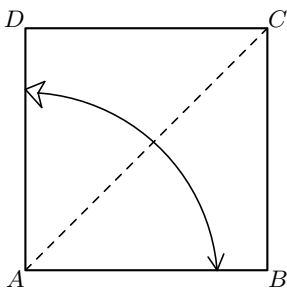
第三章 可以摺出這角度嗎？

上一章我們探討等分和整數比，這一章我們研究用摺紙的方法究竟可以摺出哪些角度。

3.1 摺 90° 和 45°

摺紙的時候，我們通常由一張正方形紙開始。因此我們必定有 90° 。有了 90° ， 45° 當然不是問題。

在下圖中， $\angle BAC = \angle DAC = \angle DCA = \angle BCA = 45^\circ$ 。

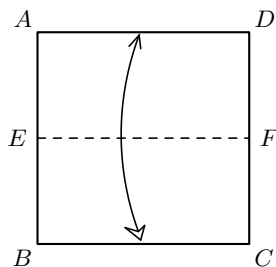


～ 思考題 ～

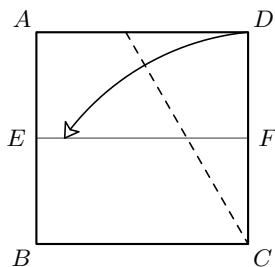
1. 假如手上只有一張不規則的包裝紙，如何得到一個矩形呢？

3.2 摺 30° 和 60°

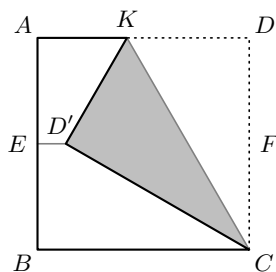
從一張正方形紙入手，以下介紹的方法同時把摺 30° 和摺 60° 兩個問題一併解決了。



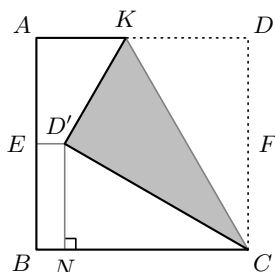
(1)



(2)



(3)



(4)

1. 把正方形紙對摺，使 AD 和 BC 重合，再打開，得線段 EF 。
其中 $AE = EB$ ， $CF = FD$ 。
2. 把 D 摺向 EF ，使摺痕穿過 C 。
3. 圖中 $\angle KCB = 60^\circ$ ， $\angle D'CB = 30^\circ$ 。
4. 考慮 $\triangle D'CN$ 以找出 $\angle D'CB$ 的大小。

為甚麼以上方法能摺出 30° 呢？在圖 (4) 中， $D'N = EB = \frac{AB}{2}$ ， $CD' = CD = AB$ ，所以

$$\sin \angle D'CB = \frac{\frac{AB}{2}}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\angle D'CB = 30^\circ$$

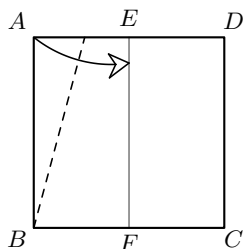
$\triangle D'KC$ 是從 $\triangle DKC$ 摺出來的，因此 $\triangle D'KC$ 是 $\triangle DKC$ 以 KC 為反射對稱軸的影像。這樣， $\triangle D'KC \cong \triangle DKC$ 就明顯不過了。

$$\angle KCD' = \angle KCD = \frac{90^\circ - 60^\circ}{2} = 30^\circ, \text{ 因此, } \angle KCB = 60^\circ.$$

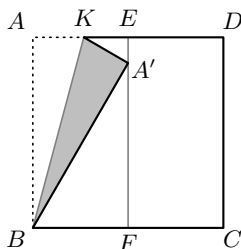
～ 思考題 ～

1. 試用一張正方形的紙，摺一個等邊三角形。
2. 假如只有一張 A4 紙，試試摺一個等邊三角形。

3.3 摺 15° 和 75°



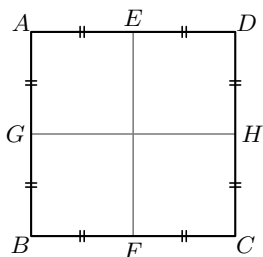
(1)



(2)

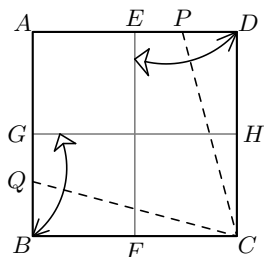
1. 先對摺 AB 和 CD 再打開以產生摺痕 EF 。把 A 摺向 EF 使摺痕穿過 B 。
2. 完成圖。其中 $\angle A'BK = 15^\circ$ ； $\angle A'KB = 75^\circ$ 。試試在圖 (2) 中找出不同的角度。

～ 進一步思考 ～



(1)

先把正方形分四等份



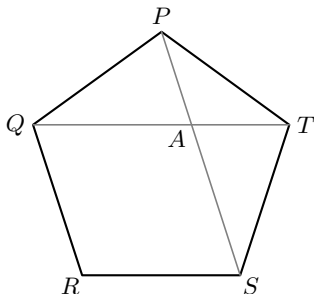
(2)

以摺 15° 的方法
作摺痕 CP 和 CQ
得等邊三角形 CPQ

你能證明 $\triangle CPQ$ 是正方形 $ABCD$ 內最大的等邊三角形嗎？

3.4 摺 36° 和 72°

在正多邊形中，正五邊形是十分特別的一員，因為它的對角線和邊長的比是「黃金比」。五邊形對角線和邊所成的角度分別是 36° 和 72° 。



如果 $PQRST$ 是正五邊形，則 $\angle PQT = 36^\circ$ 、 $\angle RQT = 72^\circ$ ，並且 $TQ : PQ$ 稱為「黃金比」。但黃金比是多少呢？

不難證明， $AQ = PQ$ 、 $PA = AT$ 並且 $\triangle PQT \sim \triangle ATP$ 。

所以 $PQ : QT = AT : PT$ ，因此 $PQ : QT = QT - PQ : PQ$ 。

$$\frac{PQ}{QT} = \frac{QT - PQ}{PQ}$$

$$PQ^2 = QT^2 - (QT)(PQ)$$

$$\left(\frac{QT}{PQ}\right)^2 - \left(\frac{QT}{PQ}\right) - 1 = 0$$

$$\frac{QT}{PQ} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

得到黃金比的值後，我們就可以為 36° 的摺法找出根據。

為了運用黃金比，我們應多了解一些黃金比的數學性質。首先，我們會用希臘字母 ϕ 或 φ 表示黃金比。而 ϕ 的大寫 Φ 則用來表示

ϕ 的倒數。由 $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ，得

$$\Phi = \frac{1}{\phi} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

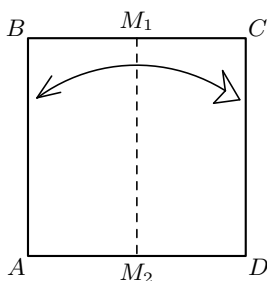
$$\Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1$$

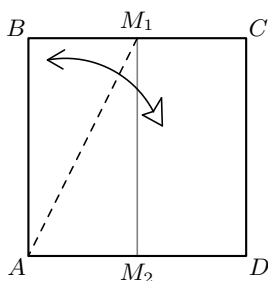
$$= \phi - 1$$

我們留意到 $\phi : 1 = \frac{1}{\Phi} : 1 = 1 : \Phi$ ，即 $\frac{\sqrt{5}+1}{2} : 1 = 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。另外，只要摺出 $\sqrt{5}$ ，黃金比就近在眼前了。

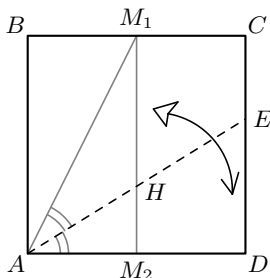
以下是摺黃金矩形（即長闊比是黃金比的矩形）和摺 36° 的方法：



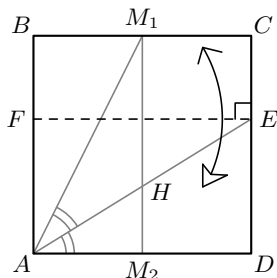
1. 對摺等分 $ABCD$ 再打開



2. 摺出對角線 AM_1 再打開



3. AD 摺向 AM_1 再打開得角平分線 AE



4. 摺 $EF \perp DC$ 再打開

參考圖 (4)，設正方形的邊長 $AB = 2$ ，可得 $AM_2 = 1$ 及 $AM_1 = \sqrt{5}$ 。因為 AH 是 $\angle M_1AM_2$ 的角平分線，所以 $M_1H : M_2H = AM_1 : AM_2 = \sqrt{5} : 1$ （讀者於 $\triangle AM_1H$ 及 $\triangle AM_2H$ 應用正弦定理即可證得這兩個比例相等）。

$$M_2H = M_1M_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

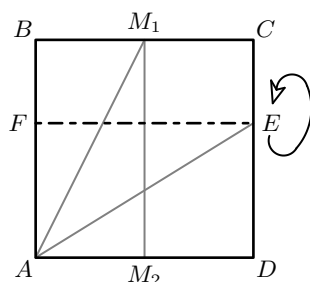
由於 $\triangle AHM_2 \sim \triangle AED$ ，

$$ED = 2M_2H = \sqrt{5} - 1$$

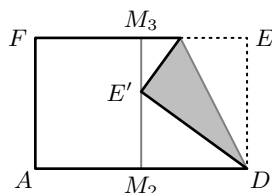
因此，

$$AD : ED = 2 : \sqrt{5} - 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} : 1$$

所以 $AFED$ 是黃金矩形。



5. 把 BC 往後摺得黃金矩形。



- 6 把 E 摺向中央的摺痕。

很明顯， $\angle E'DA = 36^\circ$ 、 $\angle M_2E'D = 54^\circ$ 。細心一點，也能找到其他的角度。

～ 進一步思考 ～

1. 想一想，你可以摺出一個正五邊形嗎？
2. 網絡上有不少摺正五邊形的方法，試找一些出來，研究一下那些是數學上正確的方法，那些只是近似的摺法。

第 四 章 正多面體摺紙

教師讓學生製作正多面體，學生便可透過觀察發現各種正多面體的基本特性，這是平面的圖像所無法做到的。本章介紹五種正多面體的摺紙方法以及相關的教學活動。

4.1 正四面體、正八面體和正二十面體

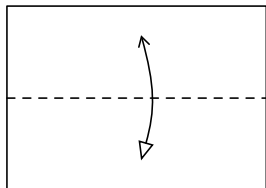
正四面體、正八面體和正二十面體皆以等邊三角形構成，上一章的等邊三角形摺紙法正好派上用場。摺紙的原理都是摺出多個等邊三角形，然後圍成立體。

正四面體

材料：A4 紙 1 張

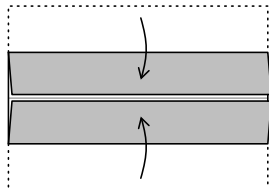
摺法：（可參考光碟內的短片）

1.



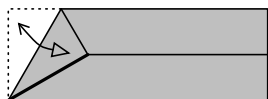
把 A4 紙對摺，然後打開。

2.



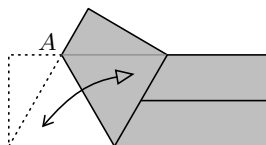
把上下兩部分向中線對摺。

3.



把左上角摺向中線，然後打開。

4.



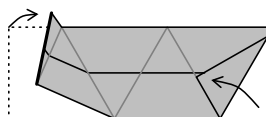
按著 A 點，把步驟 3 的摺痕與上邊對齊，然後打開。

5.



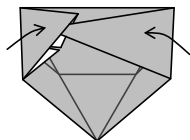
重複把新摺痕對齊上邊或下邊，形成多個等邊三角形。

6.



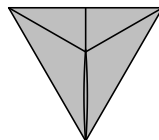
把最右的小三角形摺起，再把左右的三角形摺向中間。

7.



把右方不完整的等邊三角形插入左方的半個等邊三角形中。

8.



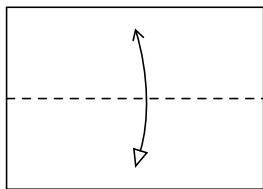
完成。

正八面體

材料：A4 紙 2 張

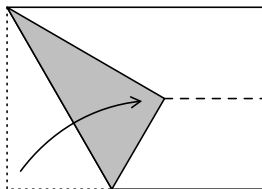
摺法：（可參考光碟內的短片）

1.



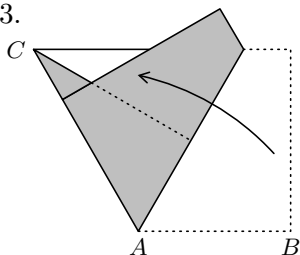
把 A4 紙對摺，然後打開。

2.



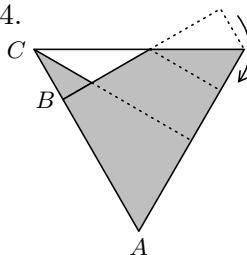
把左下角摺向中線。

3.



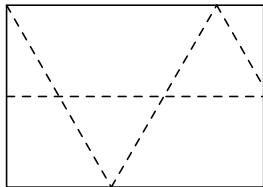
把右方向左摺，使 AB 對齊 AC 。

4.



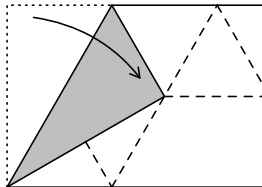
把右上小角沿紙邊摺向後。

5.



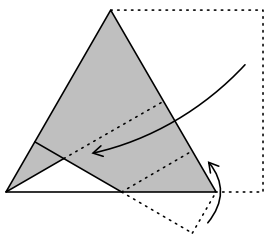
打開，圖中是步驟 2 至 4 所形成的摺痕。

6.



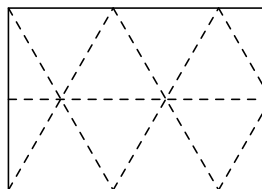
把左上角摺向中線。

7.



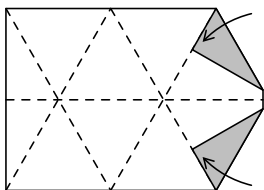
重複步驟 3 及 4。

8.



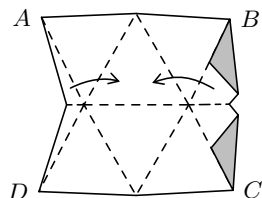
打開，所有摺痕完成。

9.



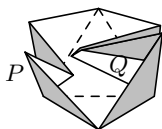
把右方上下兩角沿虛線摺向中方。

10.



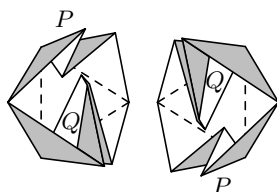
紙的左方和右方摺向中間，同時 A 和 D 互相靠近， B 和 C 互相靠近。

11.



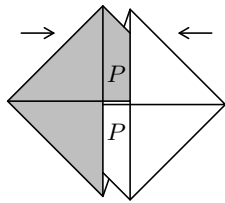
組件完成，左方 P 像鉗子，右方 Q 是不完整的等邊三角形。重複製作另一組件。

12.

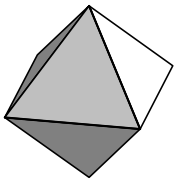


把兩個組件的 P 對著另一組件的 Q 。兩個組件互相插入對方，以 P 「咬」著另一組件的 Q 。

13.



14.



從上方看， P 兩旁的面被 Q 完成。
 P 兩旁的面遮蓋。

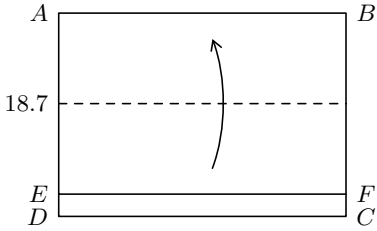
正二十面體

以下介紹的方法中摺等邊三角形摺痕的步驟略去不提，給讀者一個小小的挑戰。這方法須使用膠紙作輔助，不是「正規」的摺紙。（若不想使用膠紙，可使用組件拼合的方式製作正二十面體，下一節有詳細的介紹。）

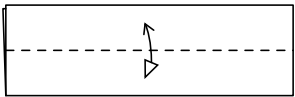
材料：A4 紙 1 張

摺法：（可參考光碟內的短片）

1.



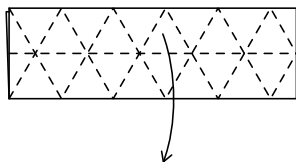
2.



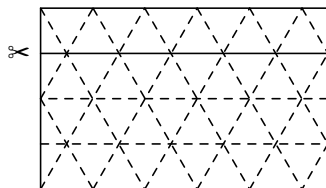
從 A4 紙 $ABCD$ 裁去長方形 $EFCD$ 使得 $AE = BF = 18.7\text{cm}$ 。然後把 $ABFE$ 對摺。

再對摺，然後打開。

3.



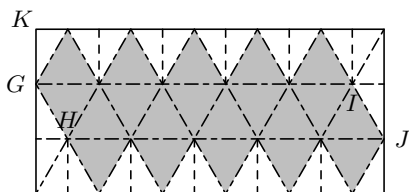
4.



摺出上圖的等邊三角形圖案，
然後打開。

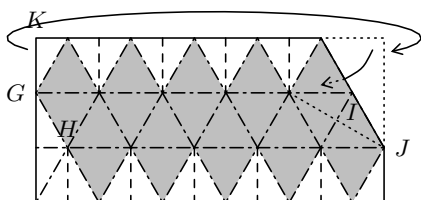
把上邊四分之一剪去。

5.



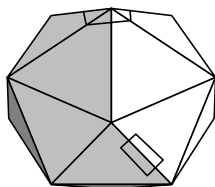
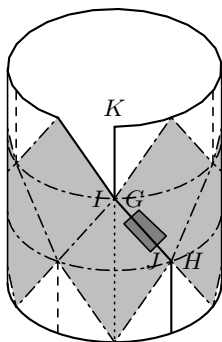
左圖中灰色的是正二十面體的面。
在白色的部分加上十條摺痕，上五條，下五條。

6.



把右上角三角形摺向後，把
圖形捲成圓柱，使 IJ 疊在
 GH 上，貼上膠紙。

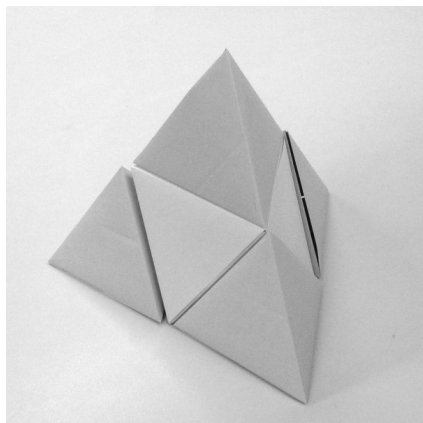
7.



按摺痕把上方五塊面合上，貼上膠紙。最後把下方五塊面合上，貼上膠紙。完成。

～ 教學活動 ～

1. 要求學生以兩種顏色的 A4 紙製作正八面體，讓學生觀察正八面體的反射對稱性質，以及思考計算正八面體體積的方法。
2. 使用本節的方法製作四個正四面體及一個正八面體，用以拼合成一個較大的正四面體。學生可使用這個拼合模型來探究相似正四面體的體積比例，亦可用以討論以下問題：正四面體是否可以分割為多個邊長是原來的一半的小正四面體？



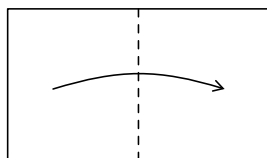
4.2 等邊三角形組件

要摺成正四面體、正八面體和正二十面體，除了上節介紹的方法外，亦可先摺出等邊三角形組件，再組合成正多面體，甚至其他不同的多面體。以下介紹的方法使用 $1:\sqrt{3}$ 比例的長方形紙張。摺成的組件按步驟施行的方向分為「左手組件」及「右手組件」兩種。

材料：長闊比為 $1:\sqrt{3}$ 的長方形紙張，數量按立體而定。讀者可使用大小為 $7.5\text{cm}\times 13\text{cm}$ 的紙張。此尺寸的紙張容易從市面上買到的 $15\text{cm}\times 15\text{cm}$ 正方形紙張中裁出。另外由於等邊三角形的高和底的一半之比是 $\sqrt{3}:1$ ，可由 3.2 節摺 30° 的摺法中得出所需尺寸，讀者可自行研究研究。

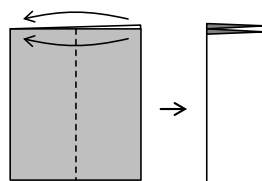
摺法：（可參考光碟內的短片）

1.



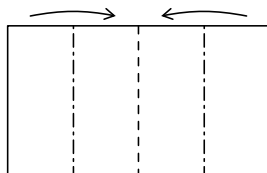
紙張背面向上，向右對摺。

2.



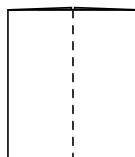
再對摺，完成後把紙張打開，背面仍舊向上。

3.



按步驟 2 的摺痕把兩邊向後摺。

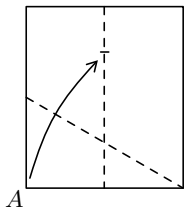
4.



這是左手和右手組件的基本形。

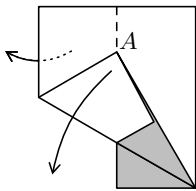
以下步驟 5 至 16 是左手組件的摺法。右手組件的摺法與左手組件大致相同，圖解在左手組件的摺法之後。

5.



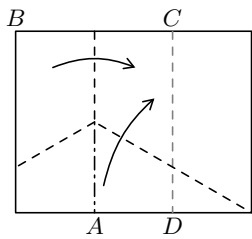
把角 A 摺起，使 A 落在中線上。

6.



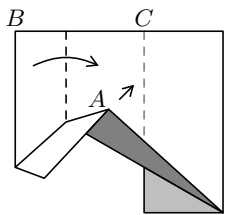
完成後把角 A 摺回原處，把左後方的部分摺出來。

7.



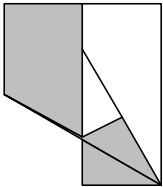
沿摺痕把角 A 摺向剛才的中線 CD，把左三分一向右摺，使 B 摺向 C。

8.



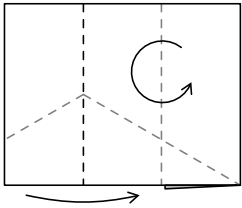
如圖把左邊摺起，包著從左下摺上來的部分。

9.



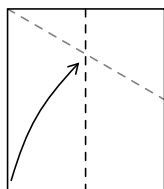
步驟 7 和 8 完成後的模樣。

10.



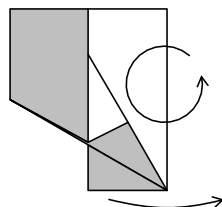
把紙打開，把左三分一向後摺，再把圖形轉 180°。

11.

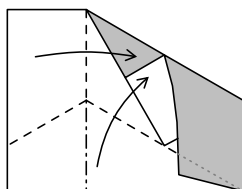


重複步驟 5 至 9。

12.

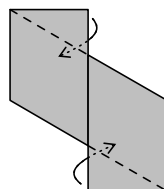
把右後方的紙摺出來。把紙轉 180° 。

13.



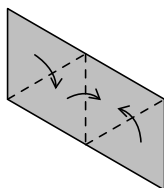
稍稍揭開右方紙的一角，按摺痕重複步驟 7 及 8。

14.



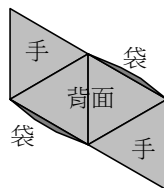
如圖把多餘的部分摺到裡面去。

15.



按箭頭的方向摺出圖中的三條摺痕，形成四個等邊三角形。

16.

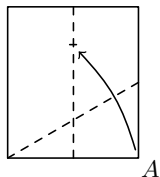


摺成後左右兩個等邊三角形稱為「手」。中間的兩個是立體的面背面，各有一個可放入「手」的「袋」。

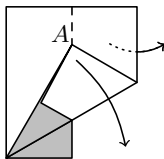
以多個組件拼合成多面體時，須同時使用左手組件和右手組

件。以下是左手組件的步驟 5 至 13：

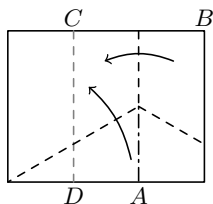
5.



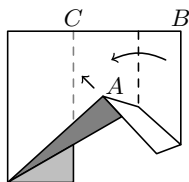
6.



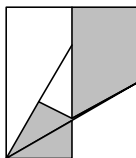
7.



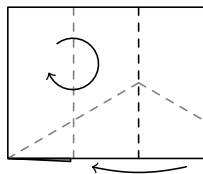
8.



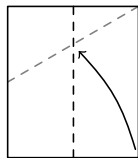
9.



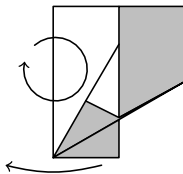
10.



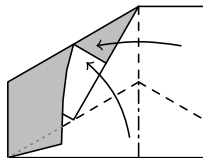
11.



12.

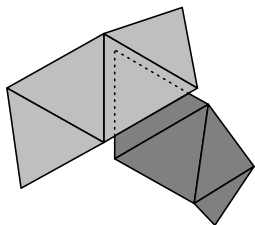


13.



左手組件的步驟 14 至 16 可參考右手組件。

17.

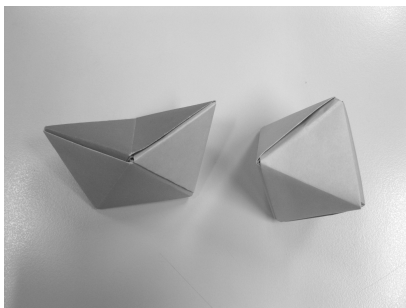


把組件組合時，各組件的「手」放相鄰組件的「袋」中，緊扣成各種以等邊三角形圍成的多面體。

由於每個組件包含兩個多面體的面，因此摺正四面體需要兩個組件（左手和右手各一個），摺正八面體需要四個組件（全左、全右或各兩個），而摺正二十面體則需十個組件（左手和右手各五個）。

～ 教學活動 ～

在教授正多面體的定義時，可向學生每人派發兩張 $1 : \sqrt{3}$ 的紙張，並教導學生摺出左手組件和右手組件各一個。接著把學生分為四人一組，各組使用等邊三角形組件拼出一個四面體和一個六面體。從四面體和一個六面體的比較中可帶出正多面體的定義。接著要求學生拼出一個正八面體和一個「非正」八面體，從而了解學生是否明白正多面體的定義。



兩個八面體

4.3 正十二面體

正五邊形的結構涉及黃金比，因此用來摺正十二面體的長方形紙張的比例亦與黃金比有關。以下方法所用的紙張的比例是

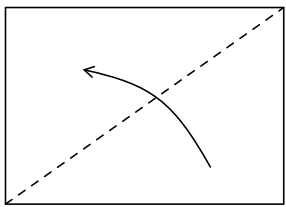
$$1 : \frac{\phi}{\sqrt{4 - \phi^2}}$$

其中黃金比 $\phi \approx 1.618$ ，這比例約是 $1 : 1.376$ 。讀者若不想花功夫剪裁紙張，可以使用 A4 紙代替。因為 A4 紙的比例是 $1 : \sqrt{2} \approx 1 : 1.414$ ，和所需的比例差不多。由於比例的差異，以 A4 紙摺成的正十二面體各面之間會有較大的空隙，但尚可接受。

材料： $1 : 1.376$ 長方形紙 12 張（或 A4 紙 12 張）

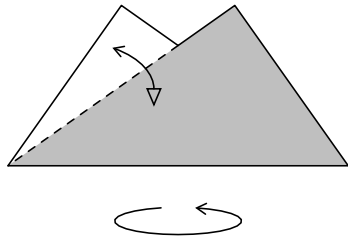
摺法：（可參考光碟內的短片）

1.



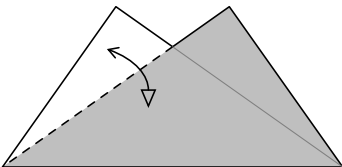
把紙張沿對角線對摺。

2.



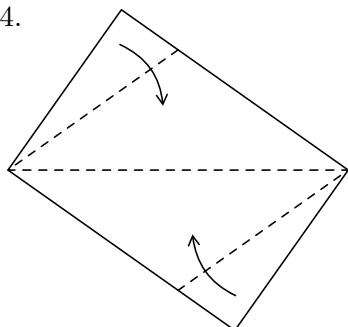
把圖中小三角形沿紙邊摺一摺產生摺痕，然後反轉。

3.



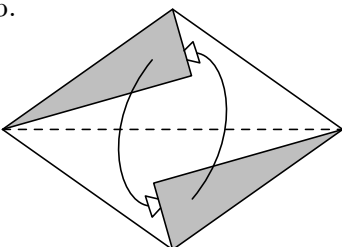
類似地摺一摺。打開紙張。

4.



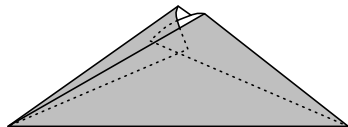
小三角形摺向中間。

5.



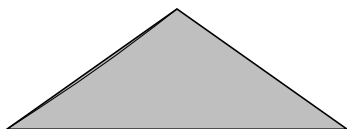
上下三角形沿摺痕對摺，同時兩個小三角形互扣。

6.



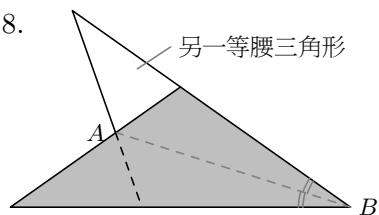
兩個小三角形在大三角形內互扣。

7.



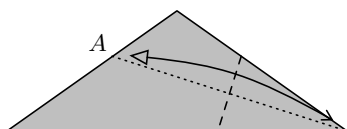
完成後的等腰三角形。

8.



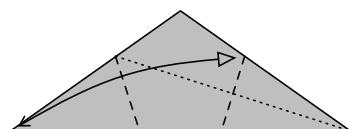
如圖把另一等腰三角形放在後面，以筆標示出點 A 。可以證明 AB 把右角平分。

9.



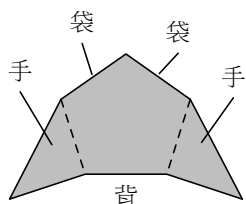
把右角摺向點 A ，形成摺痕。

10.



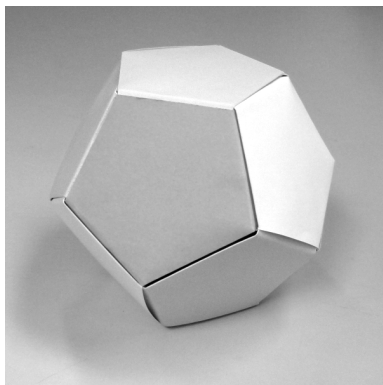
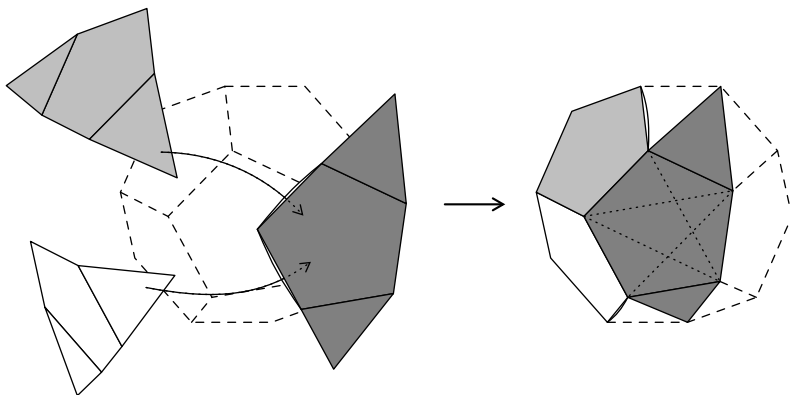
把左角摺向三角形的邊與新摺痕的交點。

11.



組件的左右兩個三角形是「手」，五邊形上方有兩個「袋」，而下方的邊則稱為「背」。

把十二個組件合併時，須把各組件的「手」放到別的組件的「袋」裡，同時須留意各五邊形的「背」必須對著另一組件的「背」，即「背對背」。



完成圖

～ 教學活動 ～

1. 要求學生製作正十二面體。學生完成後與他們討論為何紙張的比例約是 1.1.376 以及為何要找出步驟 8 中的點 A 。

2. 在學生完成正十二面體後，要求學生在立體上加上 12 條頂點間的連線，使該 12 條線成為個正方體的 12 條邊。
3. 請參閱第五章 5.2 節中的教學活動。

4.4 正方體（一）

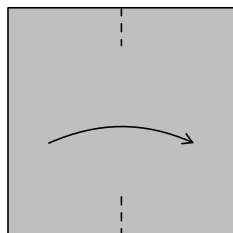
能摺出六塊正方形的組件，再組合成一個正方體的摺紙方法很多，以下介紹的方法有三個特點：

- 甲、比較結實。
- 乙、表面平滑，沒有任何摺痕。
- 丙、用正方形紙張，不用剪裁。

材料：正方形紙 6 張

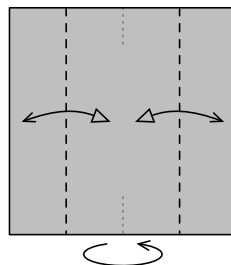
摺法：（可參考光碟內的短片）

1.

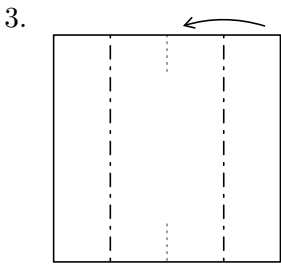


正面向上，對摺，在上下摺出中點。

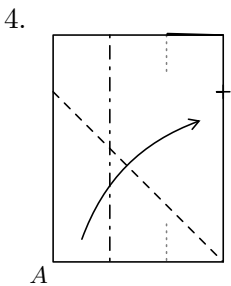
2.



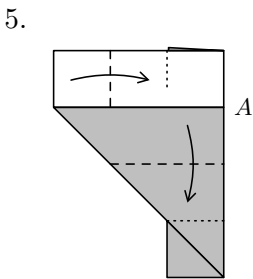
把左右摺向中點再打開，完成後把紙張反轉。



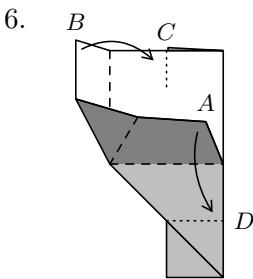
按步驟 2 的摺痕把右邊四分之一向後摺。



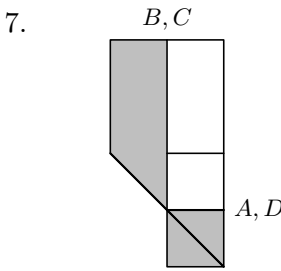
把角 A 摺起，使 A 落在右邊線上。



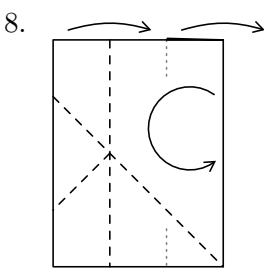
如圖按摺痕把角 A 向下摺，把左方向右摺。



把 A 摺向 D 及把 B 摺向 C。

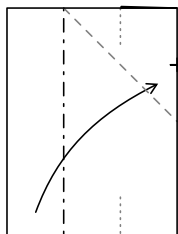


步驟 5 和 6 完成後的模樣。



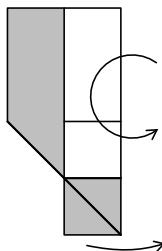
打開紙張，把左邊向後摺，右邊翻出，並轉 180°。

9.



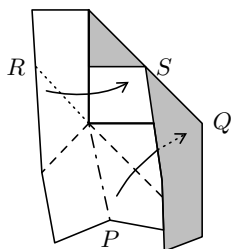
重複步驟 4 至 7

10.



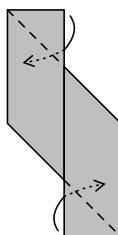
把右邊翻出，並轉 180° 。

11.



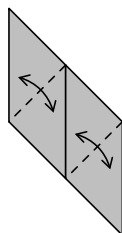
按摺痕把 P 摺向 Q 及把 R 摺向 S 。

12.



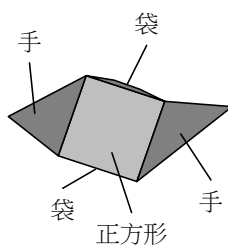
把多餘的部分摺到裡面去。

13.



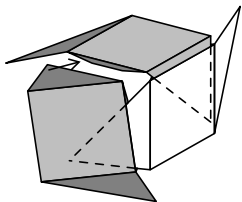
按箭頭摺出摺痕，形成一個正方形及兩個等腰直角三角形。
反轉組件。

14.



左右兩個三角形是「手」，中間正方形上下兩邊是「袋」。

15.



把各組件的「手」放進相鄰組件的「袋」中，緊扣成正方體。

～ 教學活動 ～

請參閱第五章 5.2 中的教學活動。

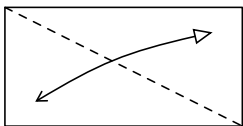
4.5 正方體 (二)

除了摺出正方體的 6 個面外，亦可摺出正方體的 12 條邊，然後拼成正方體。

材料：1:2 長方形紙（即正方形的一半）12 張

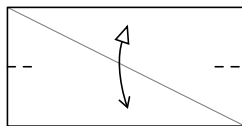
摺法：（可參考光碟內的短片）

1.



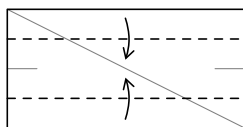
把紙張沿對角線對摺，然後打開。

2.



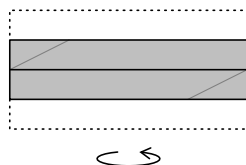
把左右兩邊對摺，標示出中點。

3.



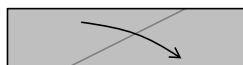
把上下兩邊摺向中點標記。

4.



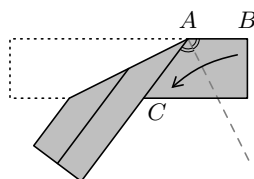
把紙張反轉。

5.



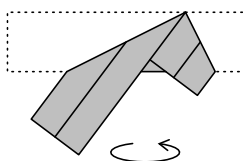
把左半沿摺痕摺向右下方。

6.



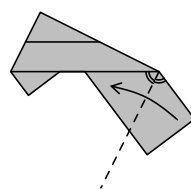
把 AB 摺向並對齊 AC ，即把 $\angle BAC$ 平分。

7.



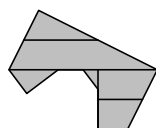
把圖形反轉。

8.



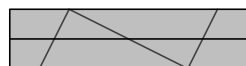
右邊亦按角平分線摺好。

9.



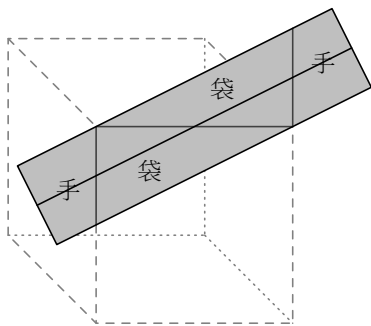
把步驟 5、6 和 8 的摺痕壓好。

10.



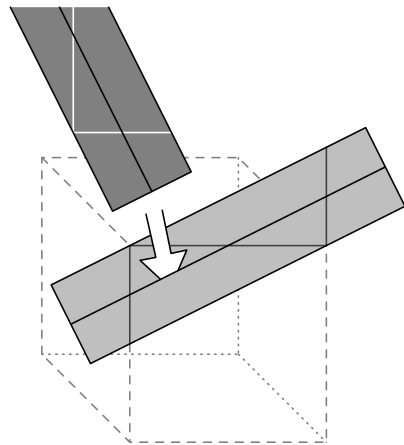
把組件打開，完成組件。

11.



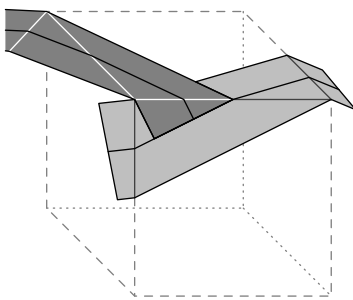
組件三條摺痕中較長的一條是正方體的邊。組件左右各有一個「手」，而中間有兩個「袋」。

12.



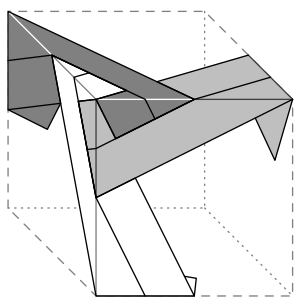
把另一組件的「手」放進其中一個「袋」中。

13.



把兩個組件的長摺痕摺一摺，成為正方體的其中兩條邊。

14.



把第三個組件的「手」放進第二個組件的「袋」中，同時把第一個組件的「手」放進第三個組件的「袋」中。正方體的其中一角完成。按每角由三個組件合成的法則，完成正方體的其餘部分。



完成圖

～ 教學活動 ～

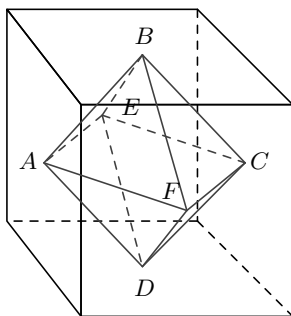
1. 要求學生算出哪一個尺寸的紙張能摺成邊長為 5cm 的正方體。
2. 其他活動請參閱第五章 5.2 節中的教學活動。

第 五 章 正多面體之間的關係

與平面上的多邊形比較，正多面體之間有著非常豐富的聯繫，其中有些與平面圖形十分相似，某些則截然不同，簡述如下：

5.1 對偶立體

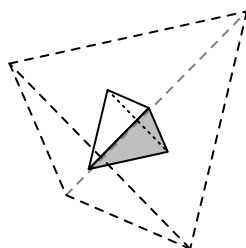
設 A 、 B 、 C 、 D 、 E 和 F 分別為正方體六面的形心。將六點兩兩聯線（除了 AC 、 BD 和 EF ），所做成的八面體為正方體的對偶立體（dual solid）。



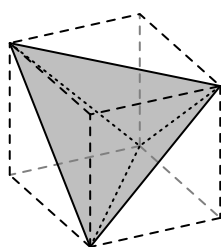
所有多面體都能做出其對偶立體，例如正二十面體的對偶是正十二面體。在現實世界中，鏡中的影像與實物的關係最為貼近。不妨考慮正方體的兩重對偶是什麼？找對偶（不是配偶）是製造多面體的有效手段。

5.2 正多面體之間的互容關係

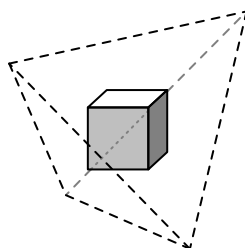
上一節曾提及正方體的對偶立體是正八面體，正八面體的頂點都落在正方體六個面的形心上，這內嵌關係可以符號 $6 \leftarrow 8$ 表示。就著五種正多面體，除了 $6 \leftarrow 8$ 外，還有 $6 \leftarrow 4$ 、 $12 \leftarrow 8$ 和 $4 \leftarrow 6$ （以上符號分別為正四面體內嵌於正方體、正八面體內嵌於正十二面體和正方體內嵌於正四面體）等二十一種內嵌關係，當中有以對偶的方式內嵌，亦有以邊上的點或面上的點作為正多面體的頂點的方式內嵌。



$4 \leftarrow 4$



$6 \leftarrow 4$



$4 \leftarrow 6$

有關 $6 \leftarrow 12$ 、 $6 \leftarrow 20$ 、 $8 \leftarrow 20$ 和 $4 \leftarrow 6$ 的進一步討論請參看附錄 A。下表列出五種正多面體之間的互容關係，表中 P_4 、 P_6 、 P_8 、 P_{12} 和 P_{20} 分別表示五種正多面體。

正多面體的互容

	$\leftarrow 4$	$\leftarrow 6$	$\leftarrow 8$	$\leftarrow 12$	$\leftarrow 20$
4	對偶立體，取各面的形心	取 P_4 上各面的形心和 4 條高的中點，即為 P_6 的 8 頂點	取 P_4 上所有邊的中點，即為 P_8 的 6 個頂點	參考： $4 \leftarrow 8$ 、 $8 \leftarrow 20$ 及 $20 \leftarrow 12$	參考： $4 \leftarrow 8$ 及 $8 \leftarrow 20$
6	P_6 上取 4 個對稱頂點，其聯綫剛好是每一正方面的對角綫	$\times$	對偶立體，取各面的形心	考慮 P_6 中心與各頂點連線及各面中綫，以黃金比取點。(附錄 A)	P_6 各面上共取三對平行中綫，各綫按黃金比取一綫段。(附錄 A)
8	P_8 取 4 個互不相鄰的面，取其形心	對偶立體，取各面的形心	$\times$	參考： $8 \leftarrow 20$ 及 $20 \leftarrow 12$	取 P_8 12 條邊長的黃金比分點。(附錄 A)
12	參考： $12 \leftarrow 6$ 及 $6 \leftarrow 4$ 或取 4 個面的中心	P_{12} 取 8 個對稱頂點，其聯綫落在每一個五邊形上為 P_6	P_{12} 上取三對互相垂直的平行邊，取其中點，聯綫為 P_8	$\times$	對偶立體，取各面的形心
20	參考： $20 \leftarrow 6$ 及 $6 \leftarrow 4$ 或取 4 個面的中心	P_{20} 上取 8 個互不相鄰的面，取其面心，為 P_6 的頂點	P_{20} 上取三對互相垂直的平行邊，取其中點，聯綫為 P_8	對偶立體，取各面的形心	$\times$

利用前章 4.2、4.3、4.4 和 4.5 節的摺法所做成的五種正多面體，通過下列活動可清楚認識正多面體之間的互容關係

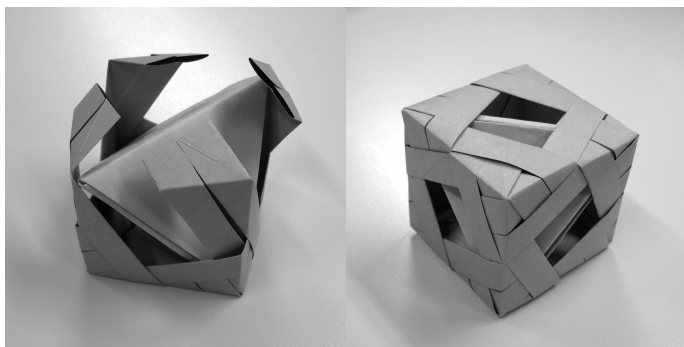
活動一：認識 $6 \leftarrow 4$

材料：

- A. 4.3 節介紹的三角形組件所做成的正四面體一個
- B. 4.5 節介紹的空心正方體一個

過程：

1. 計算正方體的邊長、對角綫及正方體組件邊長的關係。
2. 摺出正四面體和 12 塊正方體組件。
3. 在完成空心正方體前，將正四面體放在正方體內，並包上餘下的組件。
4. 若完成的立體不夠滿意，檢查有關的計算及摺工的準確度。



觀察：正四面體的各邊是正方體各面的對角綫。若正方體的邊長是 1 單位，正四面體的體積是多少？

活動二：認識 6←20

材料：

- A. 4.3 節介紹的三角形組件所做成的正二十面體一個
- B. 4.5 節介紹的空心正方體一個

過程：

1. 計算正方體的邊長與正二十面體邊長及正方體組件的邊長的關係。
2. 摺出 12 塊正方體組件。
3. 在完成空心正方體前，將正二十面體放在正方體內，並包上餘下的組件。
4. 檢查完成的立體的準確度。

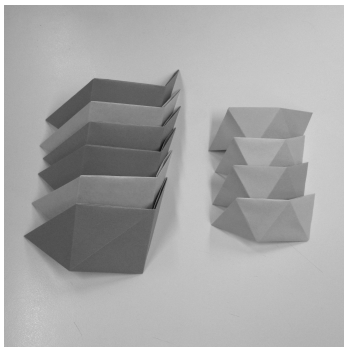
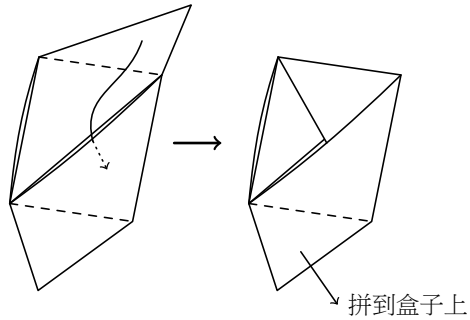
活動三：認識 6←8 — 對偶立體

材料：

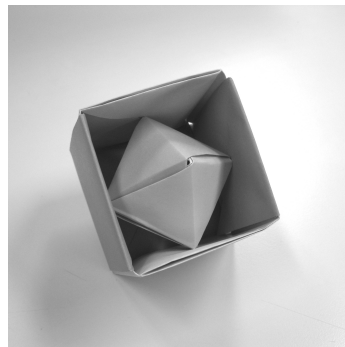
- A. 4.3 節介紹的三角形組件所做成的正八面體一個
- B. 4.4 節介紹的正方體一個

過程：

1. 計算正方體的邊長與正方體組件邊長及正八面體邊長的關係。
2. 摺出 6 塊正方體組件，把其中 5 塊拼成盒子。
3. 將正八面體放進正方體盒子內。
4. 如下圖把最後一塊正方體組件的一隻「手」收起，然後拼到正方體盒子上成為蓋子。
5. 檢查完成後的立體的準確度。



6 個正方形組件及 4 個等邊三角形組件（4 個同一方向的三角形組件即可）



把正八面體放進正方體內

觀察：正八面體的頂點在正方體各面上的哪一個地方？

活動四：認識 $6 \leftarrow 12$

材料：

- A. 4.2 節介紹的正十二面體組件所做成的正十二面體一個
- B. 4.5 節介紹的空心正方體一個

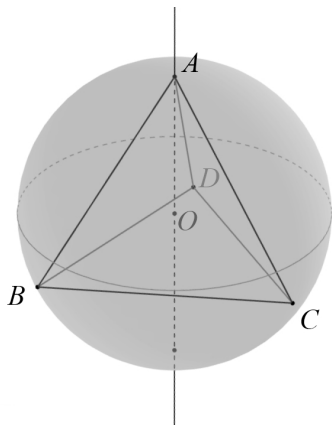
過程：

1. 計算正方體的邊長，與正十二面體邊長及正方體組件的邊長關係，基於技術上的需要，做出的正方體應比實際的為小。
2. 摺出 12 塊正立方體組件。
3. 在完成空心正方體前，將正十二面體放在正方體內，並包上最後一塊組件。
4. 檢查完成的立體的準確度。

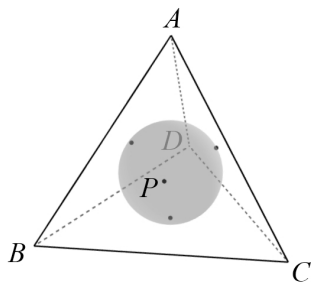
5.3 外接球與內切球

以正四面體為例，設 O 為 $ABCD$ 的形心。外接球是以 O 為球心， OA 為半徑並穿過 $ABCD$ 四頂點的球體。

令 P 、 Q 、 R 和 S 分別為 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACD$ 及 $\triangle BCD$ 的形心。內切球是以 O 為球心，以 OP 為半徑的球體。它與平面 ABC 相切於 P 。



正四面體 $ABCD$ 與外接球



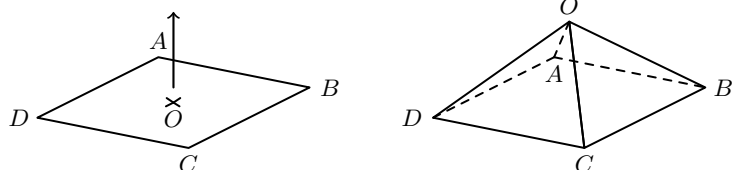
正四面體 $ABCD$ 與內切球

天文學家開普勒 (Kepler) 在未發表恆星三大定律之前，在他的著作 *Mysterium Cosmographicum* 中曾宣稱金、木、水、火、土和地六行星的軌跡與五種正多面體有關。設水星的軌跡在一球體上，它是正八面體的內切球。金星的軌跡則是正八面體的外接球，餘此類推。

水	)	八	金	)	二	地	)	十	火	)	四	木	)	六	土	)
星		Octo	星		Iso	球		Dode	星		Tetra	星		Cube	星	

5.4 星化立體與化合立體 (Compound Solid)

考慮正方形 $ABCD$ 是一塊超級橡皮，取其形心 O 。將 O 點拉起，即可做成各類型的金字塔（四角錐體），這過程稱為星化 (stellation)。

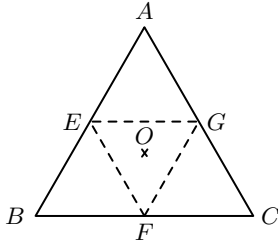


備註：

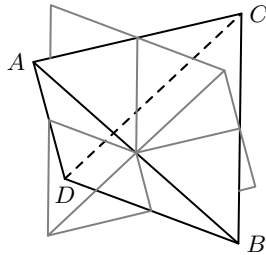
1. 將正立方體的六個面同時星化，當兩個相鄰的三角形滙合成一菱形時，正立方體變成菱形十二面體 (Rhombic Dodecahedron)。
2. 將正十二面體的十二個面同時星化，亦可做出最少兩種美麗的立體，其中之一是四種 Kepler Solid 之一的小星形十二面體 (Small Stellated Dodecahedron)。

3. 將正二十面體的二十個面同時逆星化（向內壓入，而不是向外拉出），可做出大十二角星（Great Dodecahedron），亦是 Kepler Solid 之一。

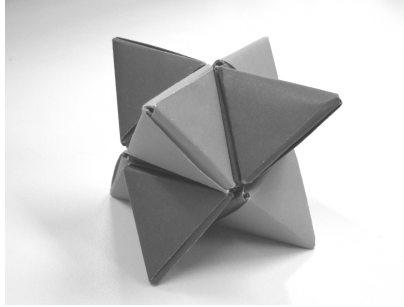
考慮正四面體 $ABCD$ 其中一面 ABC ，取 AB, BC, CA 的中點為 E, F, G ，取 $\triangle EFG$ 的形心為 O ，並使 EFG 橡皮化，拉起 O 令 OEG 與 AEG 全等。



將四個面同時進行上述動作後，可做出一個由兩個正四面體互相滲透做成的立體 (Tet-2 Compound)，亦即是大衛之星 (Star of David) 以色列國旗的立體版。



讀者不妨以 4.2 節的三角形組件，摺成 8 個正四面體和 1 個正八面體，把正四面體貼到正八面體上，即可組合成以上的立體。



參考資料

參考書目及網頁

沈康身 (2006)。《數學的魅力 (三)》。上海：上海辭書出版社。

Demaine, E. (2010). *Classes and Teaching by Erik Demaine - 6.849: Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. <http://erikdemaine.org/classes/> .

Haga, K., Fonacier, J. C., & Isoda, M. (2008). *Origamics: Mathematical Explorations Through Paper Folding*. Japan: World Scientific Publishing Company.

Japan Origami Academic Society. (2011). *Web-site of Japan Origami Academic Society*. <http://www.origami.gr.jp/index-e.html>

Koshiro. (n.d.). *How to Divide the Side of Square Paper*. http://www.origami.gr.jp/Archives/People/CAGE_/divide/index-e.html

Koshiro, H. (n.d.). *Origami versus Straight-Edge-and-Compass*. <http://origami.ousaan.com/library/conste.html>

Lang, R. J. (2010). *Origami and Geometric Constructions*. Retrieved from http://www.langorigami.com/science/math/hja/origami_constructions.pdf

Lang, R. J. (2011). *Origami Design Secrets: Mathematical Methods for an Ancient Art* (2nd ed.). CRC Press.

Leung, K.-S., & Sze C.-L. (2007). Paper folding fractions. *The Mathematics Gazette*, 91(520), 87-91.

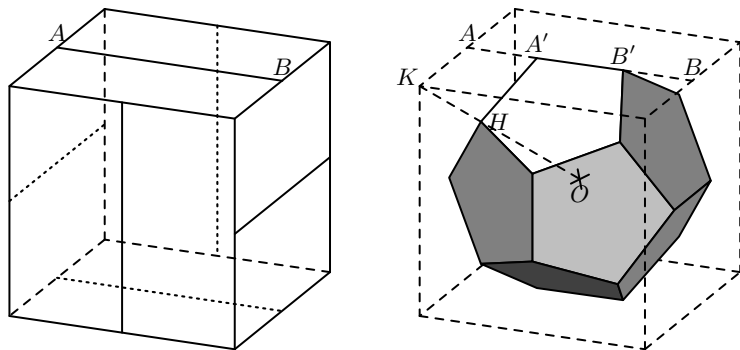
可以用來展示簡單摺紙步驟的軟件

Origami Simulator and diagrammer

<http://www.angelfire.com/or3/tklorigami0/>

附錄 A：正多面體互容的例子

1. $6 \leftarrow 12$



考慮 P_6 6 個面上三對互相平行又兩兩垂直的中綫 (例如 AB)。取 AB 的中段 $A'B'$ 令

$$\frac{A'B'}{AB} = 1 - \Phi$$

($\Phi = \frac{1}{\phi} \approx 0.618$, ϕ 為黃金比 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$) 可取得 12 點。

設 O 為 P_6 的中心, K 為頂點。聯 OK , 在 OK 上取點 H 令

$$\frac{OH}{OK} = \Phi$$

又可取得 8 點。將 20 點聯綫可得正十二面體。

証明 $HA' = A'B'$ ：

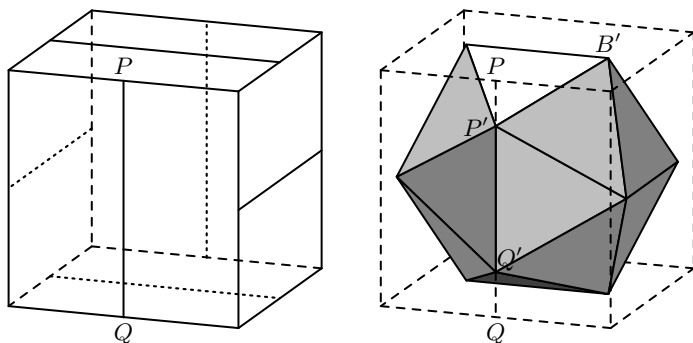
應用座標幾何，設正方體的邊長為 2， O 、 A' 和 H 的座標分別為 $(0, 0, 0)$ 、 $(0, \Phi - 1, 1)$ 和 $(\Phi, -\Phi, \Phi)$ ，則

$$\begin{aligned}
 (HA')^2 &= \Phi^2 + (2\Phi - 1)^2 + (\Phi - 1)^2 \\
 &= \Phi^2 + 4\Phi^2 - 4\Phi + 1 + \Phi^2 - 2\Phi + 1 \quad \because \Phi^2 = 1 - \Phi \\
 &= 1 - \Phi + 4(1 - \Phi) - 4\Phi + 1 + 1 - \Phi - 2\Phi + 1 \\
 &= 8 - 12\Phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A'B')^2 &= 4(1 - \Phi)^2 = 4(1 - 2\Phi + (1 - \Phi)) \\
 &= 8 - 12\Phi
 \end{aligned}$$

$\therefore HA' = A'B'$ 。

2. $6 \leftarrow 20$



考慮 P_6 6 個面上三對互相平行又兩兩垂直的中綫，如 PQ 。取 PQ 的中段 $P'Q'$ 令

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \Phi$$

($\Phi = \frac{1}{\phi} \approx 0.618$ ， ϕ 為黃金比 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$) 可取得 12 點。12 點聯綫可得正十二面體。

証明 $P'Q' = P'B'$ ：

應用座標幾何，設正方體邊長為 2。

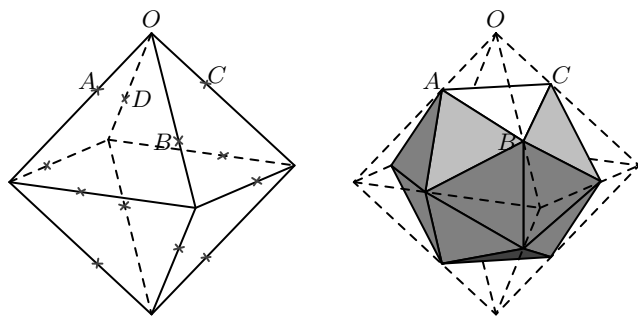
由假設得 $P'Q' = 2\Phi$

設 O 為正方體的中心。設 O 、 P' 和 B' 的座標分別為 $(0, 0, 0)$ 、 $(1, 0, \Phi)$ 和 $(0, \Phi, 1)$ ，則

$$\begin{aligned} (P'B')^2 &= 1 + \Phi^2 + (1 - \Phi)^2 \\ &= 1 + \Phi^2 + 1 - 2\Phi + \Phi^2 \because \Phi^2 = 1 - \Phi \\ &= 2 + 2\Phi^2 - 2(1 - \Phi^2) \\ &= 4\Phi^2 \end{aligned}$$

$$\therefore P'B' = 2\Phi = P'Q'。$$

3. 8←20



設 O 為正八面體的一頂點及正八面體的邊長為 1。如上圖設 A 、 B 、 C 和 D 分別為與 O 相接的四邊上的點令得

$$OA = OC = 1 - \Phi \quad \left(\Phi = \frac{1}{\phi}, \phi \text{ 為黃金比 } \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)$$

$$OB = OD = \Phi$$

可取得 12 點。12 點聯綫可得正二十面體。

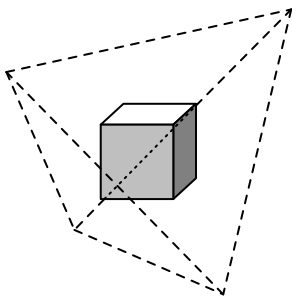
証明 $AC = AB$ ：

$\triangle OAC$ 為等腰直角三角形，因此 $AC = (1 - \Phi)\sqrt{2}$ 。另考慮 $\triangle OAB$ ，

$$\begin{aligned} AB^2 &= \Phi^2 + (1 - \Phi)^2 - 2\Phi(1 - \Phi) \cos 60^\circ \\ &= (1 - \Phi)^2 + \Phi^2 - \Phi(1 - \Phi) \\ &= (1 - \Phi)^2 + (1 - \Phi) - \Phi(1 - \Phi) \\ &= 2(1 - \Phi)^2 \end{aligned}$$

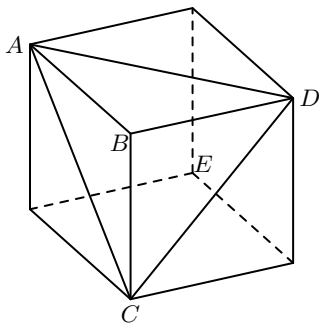
$$\therefore AB = \sqrt{2}(1 - \Phi) = AC。$$

4. 4←6



取 P_4 上所有面的形心及 4 條高的中點，即為 P_6 （正方體）的 8 個頂點。

要證明以上 8 點是正方體的頂點，我們不妨走走彎路，先考慮正方體。



如上圖，設正方體邊長為 1，則 $AD = \sqrt{2}$ 及 $BE = \sqrt{3}$ 。錐體 $BACD$ 由 B 點量的高度 d 是多少？

這裏再拐一彎，考慮 $BACD$ 的體積：

$$\frac{1}{3} \cdot d \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \quad \cdots (*)$$

$$\therefore d = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

即 d 是長對角綫 BE 的三分之一。

又有正方體中正四面體 $EACD$ 的體積為

$$1^3 - 4 \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \quad \text{參考(*)}$$

看來比直接計算便捷得多呢！

再來一招回馬槍，設正四面體 $EACD$ 的高為 p ，則

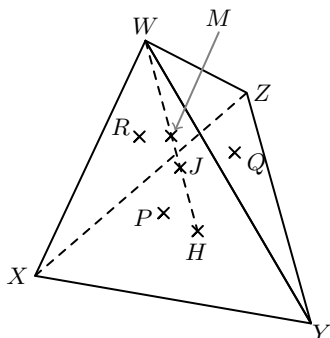
$$\frac{1}{3} \cdot p \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{3}$$

$$\therefore p = \frac{2}{\sqrt{3}} = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} = 2d$$

$$AD : p = \sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}} = 1 : \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \dots (**)$$

$$AD : d = 1 : \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \dots (***)$$

反過來說，在正四面體 $WXYZ$ 的高 WH 上取中點 M ，則 $WXYZ$ 與 $BACD$ 相似。



試想想前正方體圖中， BE 為對角線（長度為 $3d$ ）。不妨延長 EB 至 F ，令 $BF = d$ 。則 $FACD$ 及 $EACD$ 均為正四面體（全等）。所以 $WXYZ$ 與 $FACD$ 相似及 $MXYZ$ 與 $BACD$ 相似（ M 與 B 皆為高的中點）。

最後，考慮正四面體 $WXYZ$ 三斜面（不是水平平面）上的形心 P 、 Q 和 R ，證明 $MPQR$ 亦與 $BACD$ 相似。設等邊三角形 PQR 的形心為 J ， $XY = k$ 。由 (***) 得

$$MH = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

另外由形心的性質得知

$$PQ = k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{k}{3}$$

再由 (**) 得正四面體 $PQRH$ 的高

$$JH = \frac{k}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

由於

$$\begin{aligned} MJ &= MH - JH \\ &= \frac{k}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{k}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{k}{6} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ &= PQ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

由 (***) 可見 $MPQRH$ 與 $BACDE$ 的情境相同，假設得証。

～ 參考 ～

沈康身（2006）。《數學的魅力（三）》。上海：上海辭書出版社。

備註：作 O 至 AM 的垂綫，垂足為 K ，則 OK 為內切球的半徑 r ，不難算出，其長度為 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ，因此 $\frac{d}{r} = 2\sqrt{6}$ 及

$$\frac{R}{r} = \frac{R}{d} \cdot \frac{d}{r} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot 2\sqrt{6} = 3$$

意想不到吧。

附錄 C：光碟內容

讀者可在光碟中找到本書第四章中各種正多面體摺法的短片，希望能幫助讀者掌握各種正多面體的摺法。

短片：

- 一、 (p.22) 正四面體摺法
- 二、 (p.24) 正八面體摺法
- 三、 (p.26) 正二十面體摺法
- 四、 (p.29) 等邊三角形組件摺法及左右手組件的分別
- 五、 (p.34) 正十二面體摺法
- 六、 (p.37) 正方體（一）摺法
- 七、 (p.40) 正方體（二）摺法

數學百子櫃系列

<u>書名</u>	<u>作者</u>
(1) 漫談數學學與教－ 新高中數學課程必修部分	張家麟、黃毅英、 韓藝詩
(2) 漫談數學學與教－ 新高中數學課程延伸部分單元一	韓藝詩、黃毅英、 張家麟
(3) 漫談數學學與教－ 新高中數學課程延伸部分單元二	黃毅英、張家麟、 韓藝詩
(4) 談天說地話數學	梁子傑
(5) 數學的應用：圖像處理－矩陣世紀	陳漢夫
(6) 數學的應用：投資組合及市場效率	楊良河
(7) 數學的應用：基因及蛋白的分析	徐國榮
(8) 概率萬花筒	蕭文強、林建
(9) 數學中年漢的自述	劉松基
(10) 中學生統計創意寫作比賽 2009 作品集	

<u>書名</u>	<u>作者</u>
(11) 從「微積分簡介」看數學觀與 數學教學觀	張家麟、黃毅英
(12) 2010/11 中學生統計創意寫作比賽 作品集	
(13) 2011/12 中學生統計創意寫作比賽 作品集	
(14) 數學教師不怕被學生難倒了！ —中小學數學教師所需的數學知識	黃毅英編
(15) 2012/13 中學生統計創意寫作比賽 作品集	
(16) 尺規作圖實例、題解和證明	孔德偉

