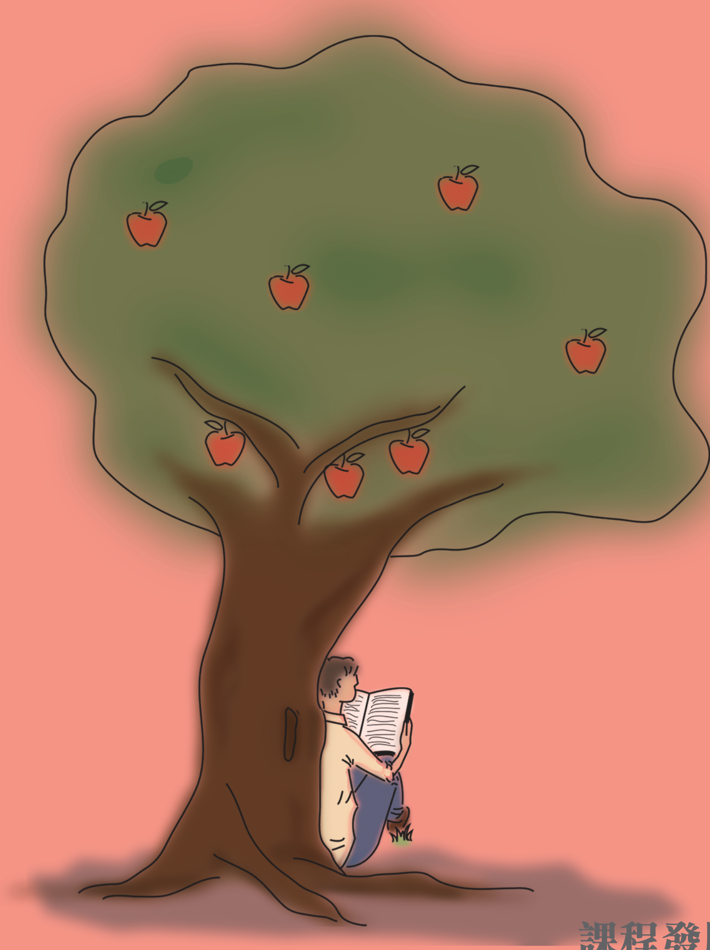
教育局數學教育組編訂
政府物流服務署印
Prepared by the Mathematics Education Section,
the Education Bureau of the HKSAR
Printed by the Government Logistics Department

ISBN 978-988-8370-86-3

數學百子櫃系列(二十五)

面積和體積



教育局
課程發展處數學教育組

前言

人類文明的進步很多時和數學的發展息息相關。但數學在歷史上的發展，往往較少反映在學生在數學科的學習之中。今天在數學課本中的數學，和其表達模式，其實已經歷了千百年的演進，去蕪存菁，十分精錬。可能亦正因為如此，學生在學習數學時往往惑於數學表達的抽象性，覺得數學難以理解而失去對數學的興趣和學習動機。

數學歷史研習小組的成立，正是希望可以透過研習數學在歷史上的發展，理清數學家如何逐步建構數學來解決當時他們需要處理的問題，以此為借鏡，發掘一些學與教策略和進路幫助學生理解數學概念所包含的意義。數學歷史研習小組的成員包括大學學者、中小學教師和教育局人員，每年按特定的主題研讀中外文獻，並在小組聚會中匯報研究成果或相關的課堂實踐經驗，最後匯集這些成果，以研討會形式供本港教師參詳。

本冊子刊登的文章，正是數學歷史研習小組舉行過的一個研討會的文本。教育局數學教育組期望這些文章可作為參考資料供教師構思相關課題的課堂活動，亦可直接作為學生讀物令學生加深對數學發展的認識和對數學的興趣。

如有任何意見或建議，歡迎致函：

九龍油麻地彌敦道 405 號九龍政府合署 4 樓
教育局課程發展處
總課程發展主任（數學）收
（傳真：3426 9265　電郵：ccdoma@edb.gov.hk）

教育局課程發展處
數學教育組

目錄

第一章：引言

蕭文強教授
香港大學數學系

古代希臘人對幾何學的貢獻，眾所周知。有位數學家把它總結如下：「作為圖形量度意義底下的幾何學，是由許多文化自發地發展的，始於公元前幾千年。我們今天所認識的幾何學，即根據理想圖形的抽象表述，驗證其真確性只需要純粹推理，則是由希臘人創造的。」（Saul Stahl, *The Poincaré Half-Plane: A Gateway to Modern Geometry*, 1993）

有「歷史之父」之稱的希臘學者希羅多德（Herodotus，公元前五世紀）在其名著《歷史（History）》有這樣的一段記載：「他們也告訴我，國王〔Sesostris，約公元前十四世紀〕把全埃及的土地均分，每位埃及子民領取得一份，需繳交若干稅款，...每當〔尼羅〕河流泛濫，某部分土地遭沖掉，...即量度剩下的土地以調整每人應付的稅款。據我猜測，幾何學即源於此，並且之後傳給希臘人。」的確，幾何（geometria）一詞的希臘字源，乃 “geo（地）” 及 “metron（量度）”，正是這個意思。

通常大家把公元前三世紀成書的經典鉅著歐幾里得《原本》（Euclid’s *Elements*）視為數學的原型與精神，奠下現代數學公理化及演繹處理方法的基礎。再經十九世紀的修補工程，譬如 1899 年德國數學家希爾伯特（David Hilbert, 1862-1943）的名著《幾何基礎（*Grundlagen der Geometrie*）》，成為今天的數學表述模範。這樣的敘述，雖然與實情相差不太遠，卻把事情過份簡化了。

有另外一種說法，認為《原本》的鋪陳、表述、甚至寫作動機，都與面積和體積的量度有關，也就是說，從開始歐氏幾何便立足於度量（metric）（S.D. Agashe, The axiomatic method: Its origin and purpose, *Journal of the Indian Council of Philosophical Research*, Vol.6, no.3 (1989), 109-118.）。《原本》卷二命題十四說：「作一個正方形等於已知直線形。」為什麼需要構作這樣的正方形呢？先看如何比較兩條線段，那是容易不過的事情，只用把其中一條放置於另一條上面，看看哪一條能容下別一條。其實，那不正是卷一命題三要做的事嗎？那是必須倚靠公理一、二、三才能證明的。要比較兩個直線形（用今天慣用的數學名詞，叫做多邊形）卻沒有那麼容易了，除非那兩個直線形都是正方形。如果兩個直線形都是正方形，只用把其中一個放置於另一個上面，使左下角的直角重疊（這兒用上了公理四），看看哪一個能容下另一個 (見圖 1)。

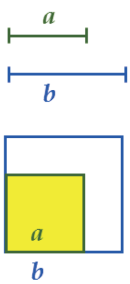


圖 1

因此，把一個直線形化為面積相等的正方形，是一個很有意思（亦很需要考慮）的問題。

要解決以上的問題，可以分兩部分進行，先把給定的直線形化為面積相等的矩形，再把矩形化為面積相等的正方形，那分別是卷一命題四十二、四十四、四十五和卷二命題五的內容。說仔細一些，第一部分是把給定的直線形分成三角形，再

把每個三角形化為給定線段上的一個面積相等的矩形（更一般地，是有一個給定角的平行四邊形），然後把所有這些矩形疊起來 (見圖 2)。

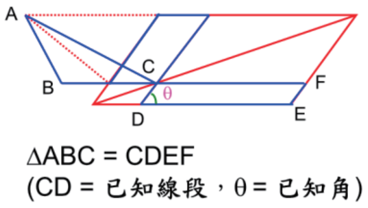


圖 2

要注意一點，證明這些命題，倚靠了那著名的公理五。第二部分需要用到《原本》卷二命題五，是把矩形化為面積相等的罄折形（gnomon）。由於罄折形是兩個正方形之差，倒過來看，如何把兩個正方形之和化為一個更大的正方形，是個關鍵，那不正是著名的「畢氏定理」（或稱「勾股定理」）的內容嗎 (見圖 3)？

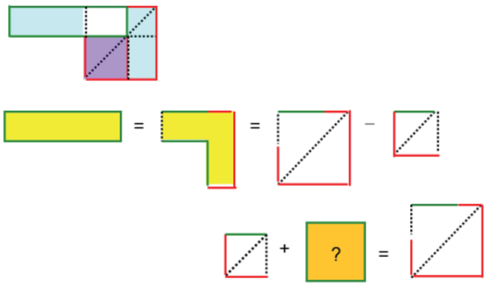


圖 3

從這個角度看，「畢氏定理」並非從天而降，而《原本》開首的鋪陳及公理的佈置也就井井有條了。最後，把卷一命題四十五、卷二命題五和卷一命題四十七（「畢氏定理」）合起來便得到卷二命題十四的證明 (見圖 4)。

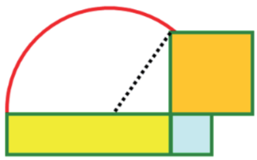


圖 4

曲線形面積又如何呢？《原本》亦有討論這方面的結果，最著名的是卷十二命題二：「兩圓面積之比等於它們直徑平方之比。」另一種表示方式是 $A = kd^2$ ，A 是圓的面積，d 是圓的直徑，k 是個常數。其實，常數 k 是 $\frac{1}{4}\pi$ ，π 乃熟悉的圓周率，或者說 $A = \pi r^2$ ，r 是圓的半徑，在總結時我們會回到這一點。

古代希臘人也懂得計算幾何形體的表面積，那是更複雜更困難的問題，而且在日常生活也不如圖形面積的計算那麼常見。最著名的例子大概是阿基米德（Archimedes， 公元前 287-212）的名著《論球和圓柱, I（*On the Sphere and Cylinder, I*）》的命題三十三：「任一球面等於它的大圓的四倍。」也就是說， $A = 4\pi R^2$ ，A 是圓球的表面積，R 是圓球半徑。

還有一個非常巧妙的計算，值得提及，即是希波克拉底（Hippocrates， 約公元前 460-308）化月牙形為方的證明。$ACBA$ 是個以 AB 為直徑的半圓，D 是中心，C 是半圓上的點，使 CD 垂直於 AB。$AECA$ 是以 AC 為直徑的半圓，F 是 $\overset{\frown}{AC}$ 上的一點，$AECFA$ 叫做月牙形 (見圖 5)。

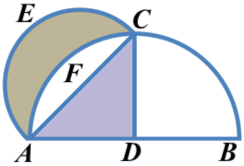


圖 5

由於半圓 *ACBA* 與半圓 *AECA* 之比等於 AB^2 與 AC^2 之比，也就是 2 與 1 之比，故半圓 *AECA* 等於四份一圓 *AFCDA*。月牙形 *AECFA* 是半圓 *AECA* 減掉 *AFCA*，而三角形 *ACD* 是四份一圓 *AFCDA* 減掉 *AFCA*，因此月牙形 *AECFA* 的面積與三角形 *ACD* 的面積相同。

從以上片段，我們已經看到面積和體積在幾何學的發展過程當中佔有重要席位。這個數學研討會，就是以面積和體積作主題，與各位數學老師交流教學經驗。

第二章：《九章算術》中的線性平面圖形面積求算法

鄧美愉

教師在教小學生認識線性圖形的度量時，往往發現學生較易理解什麼是圖形(如兩線)的長度，但較難理解什麼是圖形的面積和體積。學生在比較兩直線的長度時，可以直接將兩線段並排，便不難得知哪條線段較長。可是在比較線性圖形的面積時，學生難以直接將兩線性圖形重疊，便可得知哪個圖形面積較大 (見圖 6)。

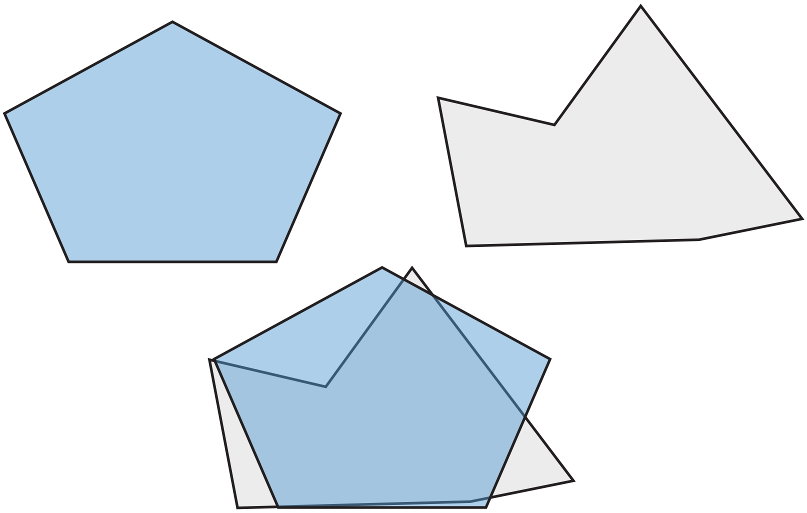
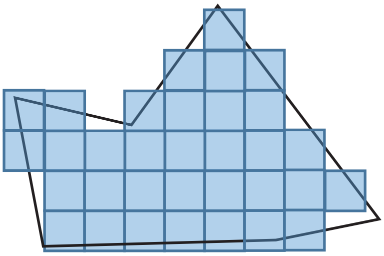
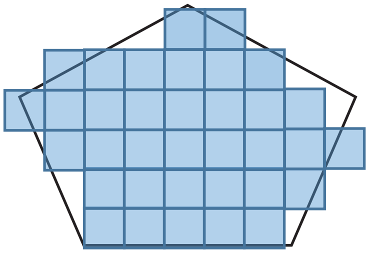


圖 6

因此，教師會用理想的中間人(如以一平方單位的正方形)覆蓋以上兩個圖形，從比較單位正方形的數量來比較圖形面積的大小 (圖 7)。



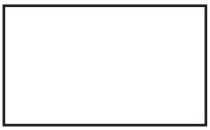
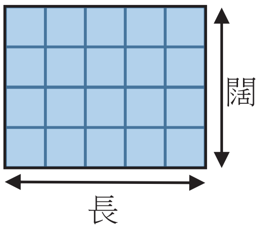
33 個單位正方形

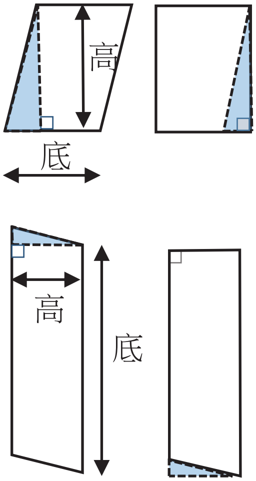


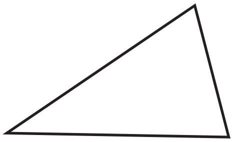
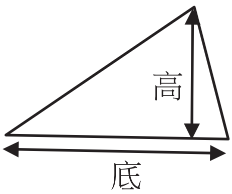
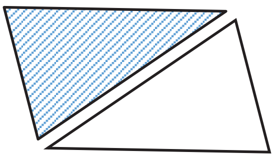
35 個單位正方形

圖 7

由此可見，利用數單位正方形的數量而得出圖形面積的方法，令小學生不難得出長方形的面積公式。以長方形面積公式為基礎，再利用將圖形分割及拼砌方法，學生便得出其他簡單多邊形的面積公式(見表 1)。

圖形	方法	面積公式
 長方形		長方形面積 =長×闊

<table>
<tr><th>圖形</th><th>方法</th><th>面積公式</th></tr>
<tr><td>
平行四邊形</td><td></td><td>平行四邊形面積

=底×高</td></tr>
<tr><td>
任意三角形</td><td></td><td>三角形面積

$=\dfrac{底\times高}{2}$</td></tr>
</table>

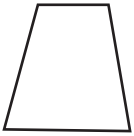
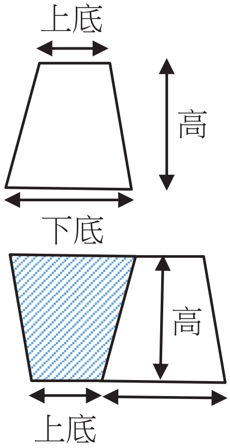
圖形	方法	面積公式
 梯形		梯形面積 $=\dfrac{(上底+下底)\times 高}{2}$

表 1

這種以圖形分割及拼砌方法，從而得出平行四邊形、三角形及梯形等不同線性圖形的面積公式，在中國古代亦有類似做法。在中國數學古籍《九章算術》卷一〈方田〉篇中，有不少是環繞平面圖形的面積的計算及公式(或在《九章算術》稱為術)的問題，可是在《九章算術》並沒有詳細記載如何得出有關公式。魏晉時代數學家劉徽為《九章算術》作注的時候，便以「出入相補」或「以盈補虛」方法來解釋如何得出有關公式。用現代語言來說，意思是指將圖形分割成若干塊，將個別圖形塊件重新組合成已知圖形，其總面積仍與原有圖形面積一樣。

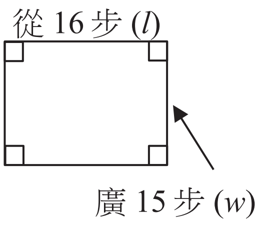
在《九章算術》卷一〈方田〉篇問一[註1]便先定下長方形的面積公式，即「廣從步數相乘得積步」。換以現代代數方式表達，即：

$$A = l \times w$$

其中 A 為長方形面積、l 和 w 分別為長方形的長（或從）和闊（或廣）。

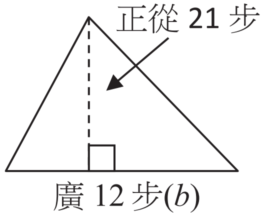
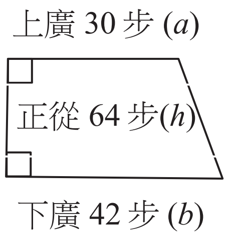
其後在〈方田〉篇中，分別給出三角形、梯形、圓形、弧田及環形的面積公式。下表載錄有關線性圖形的問（題）及術:

<table>
<tr><th>田形</th><th>圖形</th><th>面積之術</th></tr>
<tr><td rowspan="2">方田
（即形如長方形的田）

問一[註2]
（至四、十九至廿四）</td><td>今有田廣十五步，從十六步。問為田幾何？</td><td>廣從步數相乘得積步</td></tr>
<tr><td></td><td>以現代代數符號表示，即 $l \times w$</td></tr>
</table>

[1] 有部分《九章算術》的記載並沒有給予問題編號，本文採用編號是方便討論，而所用的編號是按曾海龍（2006）譯解一書。

[2] 問四、問十九至問廿四都是環繞不同度量或方位的長方形作討論，但表中只載錄〈方田篇〉問一的內容。表內其他問題的內容都是以相同手法處理。

田形	圖形	面積之術
圭[註3]田（形如三角形的田）	今有圭田廣十二步，正從二十一步，問為田幾何？	半廣以乘正從。
問廿五（至廿六）		$\frac{b\times h}{2}$
邪[註4]田（形如直角梯形的田）	今有邪田，一頭廣三十步，一頭廣四十二步，正從六十四步。問為田幾何？	並兩斜而半之，以乘正從若廣。 又可半正從若廣，以乘並。畝法而一。
問廿七（至廿八）		$\frac{(a+b)}{2}\times h$ $\frac{h}{2}\times(a+b)$

[3] “圭” (粵音“歸”)，古玉器名，為古代貴族祭祀、喪葬等所用形如長條三角形的禮器。有指《九章算術》的“圭”為等腰三角形，亦有指為任意三角形，而劉徽的證明方法則不限於等腰三角形。

[4] 邪田：“邪”，通指“斜”，與“正”相對，意指非正南，如東北等。有指邪田為任意梯形，但從術文及下問的箕田的討論，一般接受邪田為直角梯形。

<table>
<tr><th>田形</th><th>圖形</th><th>面積之術</th></tr>
<tr><td rowspan="2">箕田
（形如等腰梯形的田）

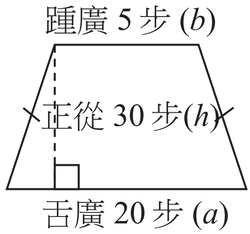
問廿九
（至三十）</td><td>今有箕田，舌廣二十步，踵廣五步，正從三十步，問為田幾何？</td><td>並踵、舌而半之，以乘正從。畝法而一。</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$\frac{(a+b)\times h}{2}$$</td></tr>
</table>

表 2

劉徽在證明圭田(即三角形)的面積公式時，以「半廣者，以盈補虛為直田也」，意思即用出入相補，將三角形分割及再併砌成長方形。劉徽亦給出兩種不同的分割及併砌的方法(以圖像表示如圖 8a 及圖 8b)。

劉徽注：半廣者，以盈補虛為直田也。

劉徽注：亦可半正從以乘廣。

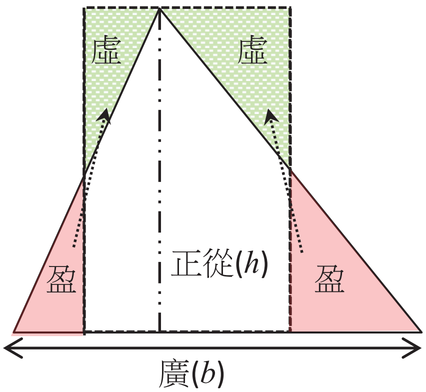


圖 8a

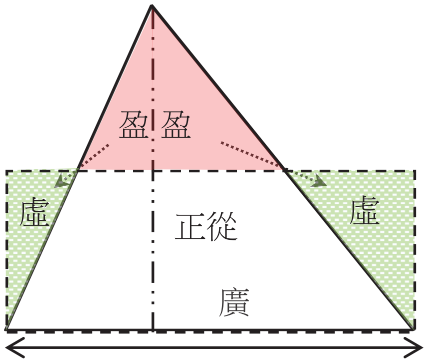


圖 8b

因此，圭田的面積 = 長方形的面積= $\frac{1}{2}$×廣×正從= $\frac{b}{2} \times h$

至於邪田或箕田的面積公式，劉徽[註5]仍是將圖形分割，然後運用出入相補方法得出長方形，從而得出新圖形的面積公式。其分割方法如下圖：

術：可半正從若廣，以乘併。畝法而一。

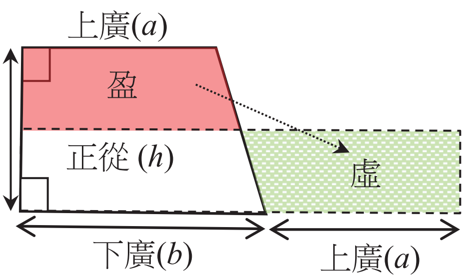


圖 9a

邪田面積

$$= \frac{\text{正從}}{2} \times (\text{上廣} + \text{下廣})$$

$$= \frac{h}{2} \times (a+b)$$

術：並兩斜而半之，以乘正從若廣。

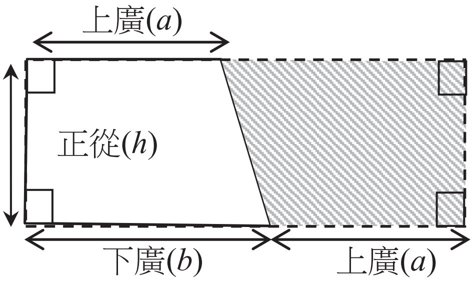


圖 9b

邪田面積

$$= \frac{(\text{上廣} + \text{下廣}) \times \text{正從}}{2}$$

$$= \frac{(a+b)}{2} \times h$$

[5] 劉徽注: 併而半之，以盈補虛也。

劉徽注：又可併踵舌，半正從以乘之。

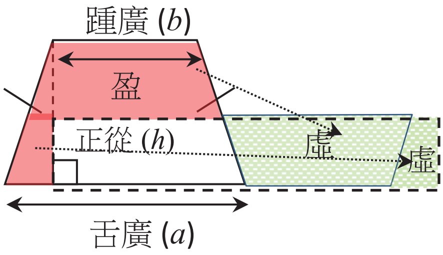


圖 10a

箕田面積

$$= \frac{\text{正從}}{2} \times \left(\text{舌廣} + \text{踵廣}\right)$$

$$= \frac{h}{2} \times (a+b)$$

劉徽注：中分箕田則為兩邪田，故其術 相似。

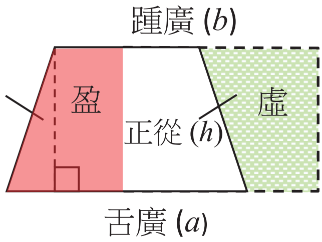


圖 10b

箕田面積

$$= \frac{\left(\text{舌廣} + \text{踵廣}\right) \times \text{正從}}{2}$$

$$= \frac{(a+b)}{2} \times h$$

總的來說，劉徽以出入相補方法處理線性圖形面積時，運用了對面積概念以下原理:

1. 長方形面積等於它的長度和闊度的乘積。
2. 面積經過移動(以現代變換語言而言，即反射、旋轉及平移)，其面積不變。
3. 平面圖形經有限的分割，其各部分面積的總和相等於原有圖形的面積。

在現時的教學中，我們大致都是由長方形的面積公式出發，運用類近劉徽的出入相補方法，得出不同線性圖形的面積公式。

但是我們並不會如劉徽只局限將圖形分割及拼砌成長方形，而是將圖形分割及拼砌成已知面積公式的圖形便可。如表 1，便是由長方形面積得出平行四方邊形的面積公式，再將三角形及梯形分割及拼砌成平行四方邊形，由此得出對應的面積公式。由於所有多邊形都可分割成若干個三角形，即由此便可解決所有多邊形的求積問題。

教師在教授多邊形的求積問題時，除了介紹面積概念及以分割及拼砌的活動，以帶出簡單多邊形面積的公式外，亦可考慮介紹劉徽「出入相補」的方法及名稱，並簡略介紹劉徽以不同拼砌方法處理同一圖形，或如《九章算術》內會考慮不同方位的圖形，以豐富學生對推導公式的經驗。教師亦可進一步與中學生討論如何證明所拼砌得出的圖形必為長方形、平行四邊形等，協助學生從直觀幾何過渡至以演繹幾何解決問題的不同手法。

例如，以現代數學語言解釋圖 8a 的做法，即任一$\triangle ABC$，構作高線 AD，而 M 及 N 分別是 BD 及 CD 的中點(見圖 11a)。分別構作一過 N 或 M 而與 BC 垂直的線 RN 及 SM。設 RN 與 AC 的交點 P 而 SM 與 AB 的交點為 Q。劉徽稱$\triangle PNC$ 及$\triangle QBM$ 為盈，而將它們補入兩個稱為虛的$\triangle PRA$ 及$\triangle QAS$。

因此，$\triangle ABC$ 的面積 = 長方形 $RSMN$ 的面積

$$=\frac{1}{2}\times \text{廣}\times\text{正從}$$

$$=\frac{2x+2y}{2}\times h \quad 。$$

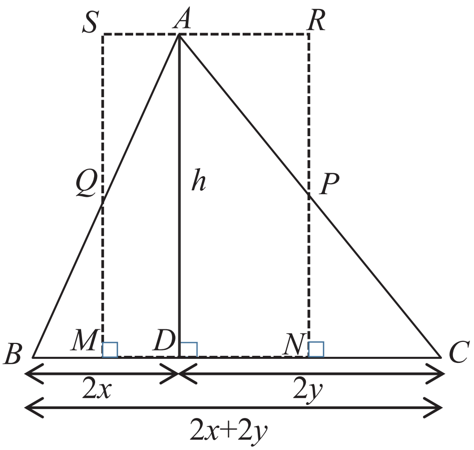


圖 11a

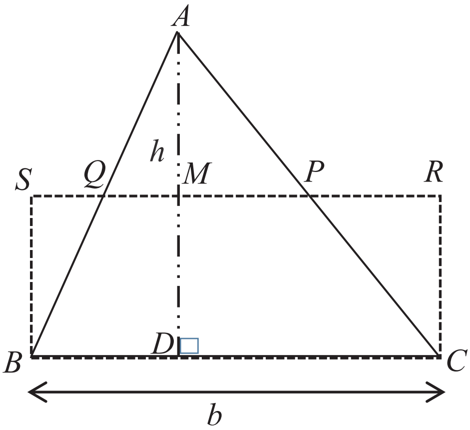


圖 11b

同樣地，以現代數學語言解釋圖 8b 的做法。即在一△ABC，構作高線 AD，在 AD 的中點 M 構作一平行 BC 的線 SR(見圖 11b)。

設 SR 分別與 AC 及 AB 的交點 P 及 Q。劉徽稱△AMP 及△AQM 為盈，而將它們補入△CRP 及△BQS 虛的三角形。

因此，△ABC 的面積 = 長方形 $SBCR$ 的面積

$$= \frac{1}{2} \times \text{ 正從} \times \text{ 廣} = \frac{h}{2} \times b \quad 。$$

在圖 11a，有關分割及拼砌的重要關鍵是，當將△PNC 移往(繞 P 點旋轉至)△PRA 及△QBM 移往(繞 Q 點旋轉至)△QSA 時，我們如何肯定 SAR 為一直線，以致能得出 $RSMN$ 為一長方形。

這不難由全等三角形方向得知，由於已知△PNC 及△PRA 與及△QBM 及△QSA 分別為全等三角形。由全等三角形的性質，得$\angle SAQ = \angle MBQ$，及 $\angle PCN = \angle PAR$。

再利用三角形的內角和，不難證明 SAR 為一直線。亦因為$\angle ASQ = \angle BMQ = 90^\circ$ 與及 $\angle PNC = \angle PRA = 90^\circ$，因此，$SMNR$ 必為一長方形。

同理，在以上梯形的不同出入相補方法，最終都是將圖形轉化為長方形。問題是，我們如何能保證最終的圖形必為一長方形，若以現代數學語言來說，即是在圖 12，要證明 QCY、PDZ 為一直線及四邊形 $PQYZ$ 的四個內角為直角。

以圖 12 為例，設 P、Q 分別為 AD 及 BC 的中點，因為 $ABCD$ 是等腰梯形，因此 $AB = DC$，$\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$，$\angle DCQ = \angle ABC$ 及 $\angle CDA = \angle BAD$。

不難由全等圖形及直線上的鄰角互補，得知 PQ 垂直於 AD 及 BC，並且$\angle DCY = \angle BAD$。

因此，$\angle DCQ + \angle DCY = \angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$。

因而得出 QCY 為一直線。同理，亦可得 PDZ 為何一直線。

由於 $APQB$ 及 $CYZD$ 為全等圖形，因而$\angle CYZ = \angle APQ = 90^\circ$。因此 $PQYZ$ 為一長方形。

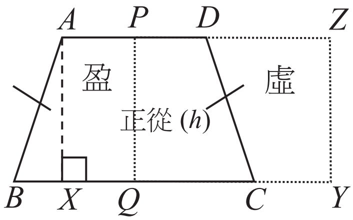


圖 12

這種引入數學史的人與事，透過比較古今及不同的方法處理同一問題，除有助學生更了解相關課題外，亦對數學思想發展有更深的認識。

參考書目

1. 李繼閔（1992）。《*《九章算術》及其劉徽注研究*》。臺北：九章出版社。
2. 郭書春（2009）。《*《九章算術》譯注*》。上海：上海古籍出版社。
3. 曾海龍譯解（2006）。《*九章算術*》。重慶：重慶大學出版社。

第三章：圓面積的證明

鄧廣義
元朗商會中學

圓形面積 πr^2 是一條十分基本的方程式。老師教授這課題的時候，經常要使用教具，下圖是一種常見的傳統教具：

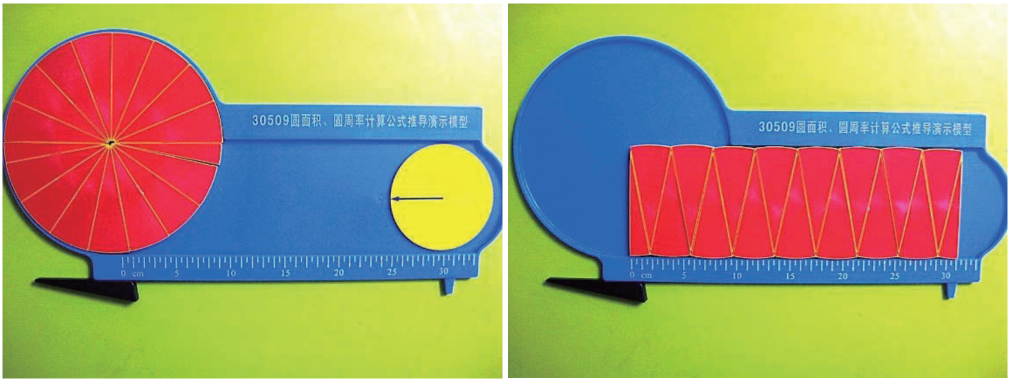


圖 13

現今利用電腦軟件教學，效果也頗為理想，以下是兩個十分悅目的動態幾何作品：

[http://www.geogebratube.org/material/show/id/109]

[http://www.geogebratube.org/material/show/id/550]

將圓形切割並重新拼合，這種手法在歷史上並不罕見，15 世紀的達文西和 17 世紀的佐藤茂春也曾經做過類似的事情(圖 14)，並可追溯到 3 世紀東漢三國時代的數學大師劉徽，現在讓我們先看看古代的中國數學家是如何化曲為直。

在《九章算術》卷一《方田》篇中，第 31 及 32 問分別為：

[31] 今有圓田，周三十步，徑十步。問為田幾何？

[32] 又有圓田，周一百八十一步，徑六十步、三分步之一。問為田幾何？

圓田術曰：半周半徑相乘得積步。

題目提供圓周及直徑，要求計算圓形面積，圓田術給出了精確公式為半周乘半徑 $\frac{1}{2}rC$ ，其中 r 為半徑， C 為圓周。劉徽為此術作注，解釋了圓形面積之證明方法。


改正天元指南 卷九

與寄左相消得開方式

三乘方ニ開之得圓徑

推前術得各合問

圖解

變形

半円周

半円徑

如圖ノ上ノ圖形三十二ニ割 此三十二ハタメナリ幾ツニ割テモ同意ナリ 唯見ヨキ分別スベシ

上ノ圓積ノ内ニ黒積十六ト白積十六ト共ニ三十二アリ 下ノ変形ノ内ニモ黒積十六ト白積十六ト共ニ三十二アリ 此故ニ上下トモニ積相同ジ

又変形ヲ見ルニ半円徑ト半円周ト相乘ナリ 故円徑ト円周ト相乘スレバ変形ノ積四段ナリ 則円積四段ト同ジ

今有方錐積三十六步 只云方面長於竪二倍 問方面竪各幾何

八十

圖片來源：

佐藤茂春, 天元指南, 1698

圖 14

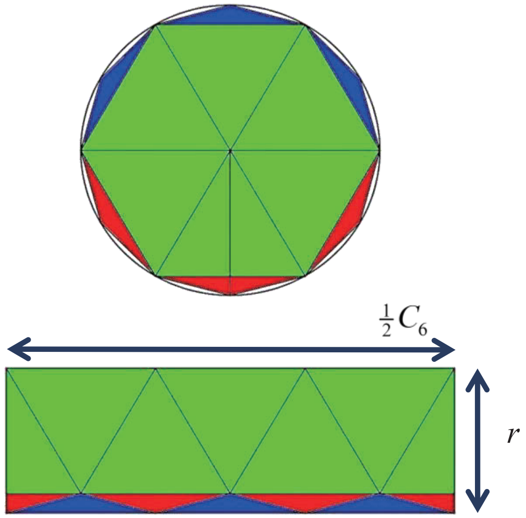


圖 15

劉徽「析理以辭，解體用圖」，其割圓術的論證是文字和插圖互相配合的。首先將圓形切為 6 等份，並按照圖 15 再加切割，重新拼貼成為一個長方形。這種手法稱為出入相補。明顯看出，上述長方形的高為半徑 r ，闊為正六邊形的一半周界 $\frac{1}{2}C_6$ ，因此圓面積約為長方形面積 $\frac{1}{2}rC_6$ 。請注意，白色的弓形面積並未計算在內，這些誤差稍後再作處理。

再將上圖每份平分，成為 12 等份，使用同樣手法，拼出一個長闊分別為 r 及 $\frac{1}{2}C_{12}$ 的長方形，其中 r 為半徑， C_{12} 為相關正 12 邊形的周界；因此圓面積約為 $\frac{1}{2}rC_{12}$ 。

進一步可以把圓形切為 24 等份、48 等份……(圖 16)，這種過程可以永無止境地繼續下去，而圓面積的約近值就形成一個(收斂的)數列 $\frac{1}{2}rC_{24}$ ，$\frac{1}{2}rC_{48}$ ，…。直觀上可見，割圓拼方總是要捨棄一些小弓形而使面積有所損失，而所失的白色部分是隨著分割的增加次數而無限地減少；當分割的情形達致極限時，內接正多邊形變得與圓形重合，於是誤差就消失了。

如果劉徽就此打住的話，那麼嚴謹度就大打折扣了，他證明方法最精妙的地方在於對誤差作出定量分析。為了估算誤差，需要計算弧形的小弓形面積，弧形不好處理，因此將每個小弓形擴大成一個三角形(圖 17)，再將所有三角形拼合為一個長方形，稱其高為餘徑，這個虛線圍著的白色長方形恰好可以放在著色部分的長方形底下(圖 16)。劉徽指出當割圓細密至極限時，內接正多邊形變得與圓形重合，餘徑退縮為一點，因此誤差歸零。

若將上述各點演譯為現代表達式，即為

$$\frac{1}{2}rC_n < \text{圓面積} < \frac{1}{2}rC_n + \text{誤差}$$

$$\because \text{當 } n \to \infty,\ C_n \to C,\ \text{誤差} \to 0,$$

$$\therefore \text{圓面積} = \frac{1}{2}rC$$

最後只須加入圓周率 $\pi = \dfrac{C}{2r}$ 的定義，上述公式即成

圓面積 $= \pi r^2$ 。

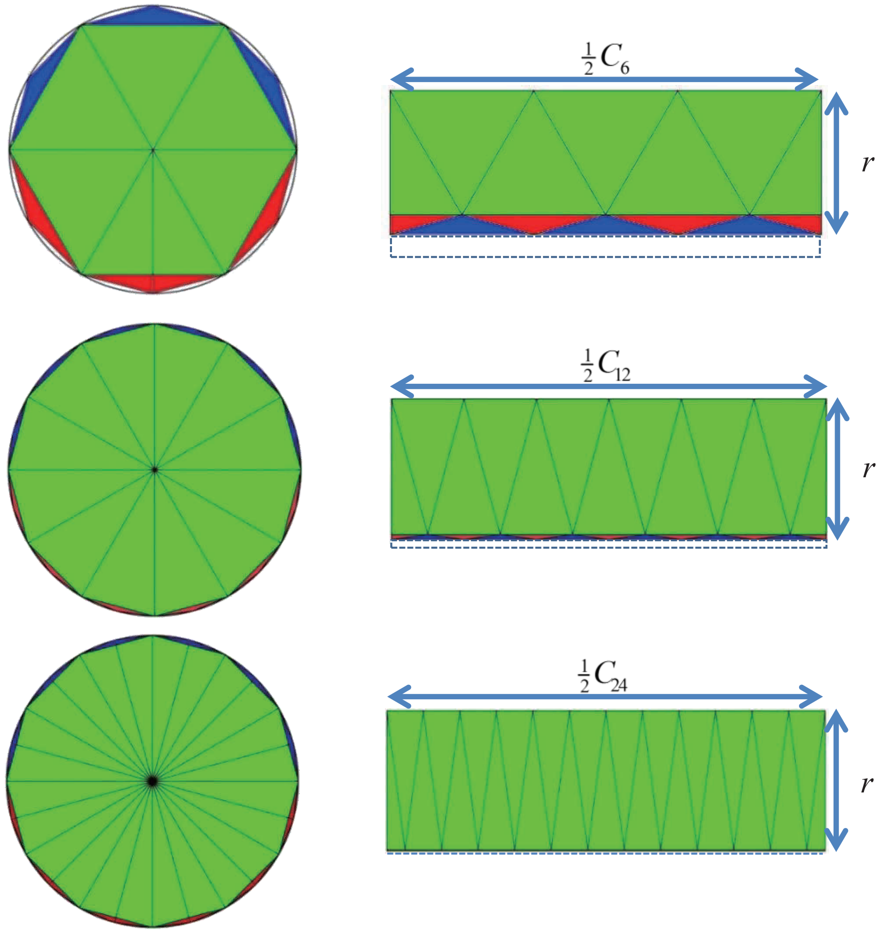


圖 16

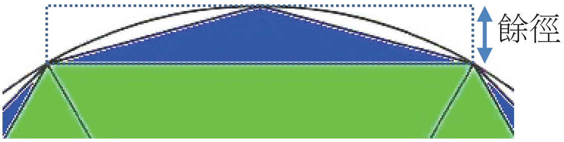
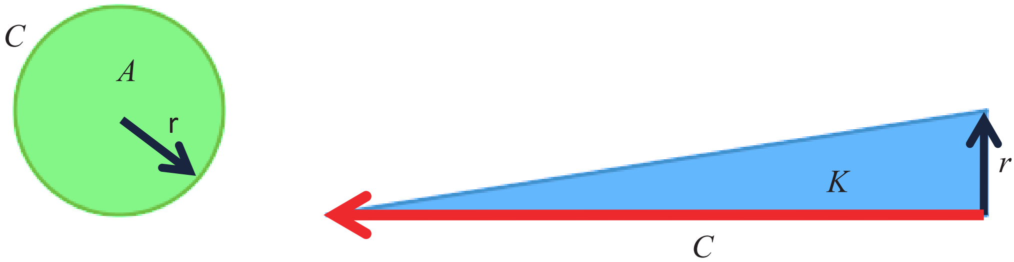


圖 17

以上是公元 3 世紀古代中國的證明，接下來我們看看公元前 3 世紀古希臘，也許是史上最早的圓面積公式證明。

阿基米德是公元前 3 世紀的古希臘哲學家及數學家，在他的著作《圓的測量》中，證明了圓面積 A 等於一個以其圓周長及半徑作為兩個直角邊的直角三角形面積 K 。



$$A = K = \frac{1}{2}rC$$

圖 18

阿基米德利用了反證法排除以下兩種情形： $A > K$ 及 $A < K$ ，所以剩下惟一可能就是 $A = K$ 。

第一種情況，假設 $A > K$ (因此，設 $A - K = \varepsilon$，其中 ε 為一個正數)，首先內接正方形於圓內，平分弧直至弓形面積總和小於 $A - K$ 註 6，代入弓形面積總和等於圓面積 A 減多邊形面積，得出多邊形面積大於 K (圖 19)。

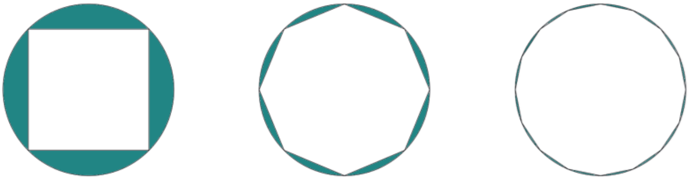


圖 19

另一方面，為了計算此內接正多邊形之面積，可以將它分割成 n 等份，其中 n 為其邊之數目，每一等份是一個底為 b 高為 h 之三角形(圖 20)；顯而易見， h 小於 r 及多邊形周界 nb 小於圓周周界 C ，所以多邊形面積(即所有三角形面積總和) $\frac{1}{2}h(nb)$ 小

[6] 這種手法稱為窮盡法。那怕是 $A - K$ 是一個極小極小的數，我們都可以在有限的步驟內形成一個正多邊形內接於圓，使弓形面積之總和小於 $A - K$ 的值，如 $\frac{\varepsilon}{2}$ 。

於 $\frac{1}{2}rC = K$，但由於多邊形面積 $= A - \frac{\varepsilon}{2} > A - \varepsilon = K$，所 與上述命題相互矛盾！

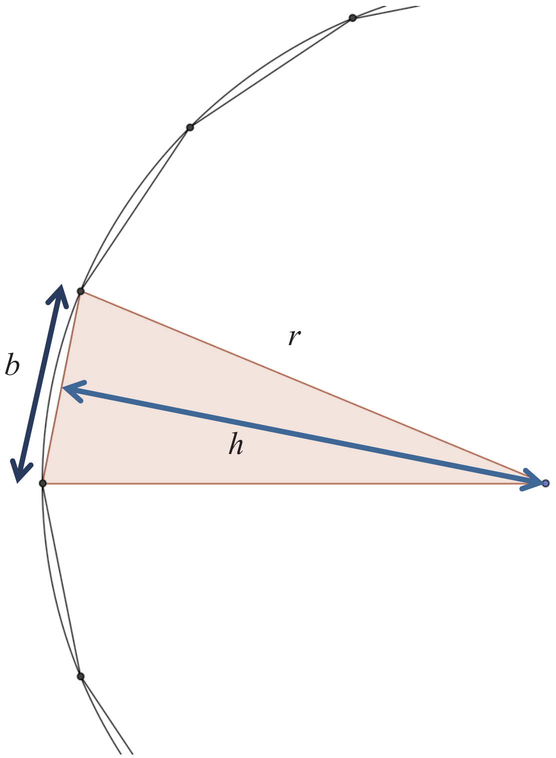


圖 20

第二種情況，假設 $K > A$ (因此 $K - A$ 是一個正數)，在圓外作外切正方形，同樣利用窮盡法，加上新切綫直至外切多邊形

面積與圓之間截得的面積總和小於 $K-A$ ，此等截得的面積為多邊形面積減圓面積 A ，得出多邊形面積小於 K (圖 21)。

同時，將外切正多邊形分割成 n 等份，其中 n 為其邊之數目，每一等份是一個底為 b' 而高為 r 之三角形(圖 22)；又因多邊形周界 nb' 大於圓周周界 C ，所以多邊形面積(即所有三角形面積總和) $\frac{1}{2}r\left(nb'\right)$ 大於 $\frac{1}{2}rC=K$ ，與上述命題相互矛盾！

因此，圓面積 A 既不大於又不小於 K，所以 $A=K$。

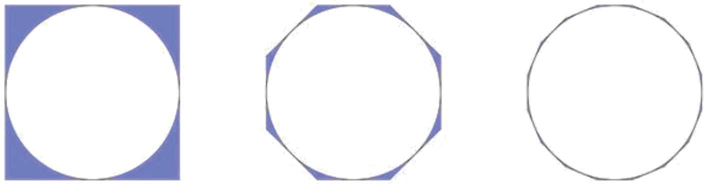


圖 21

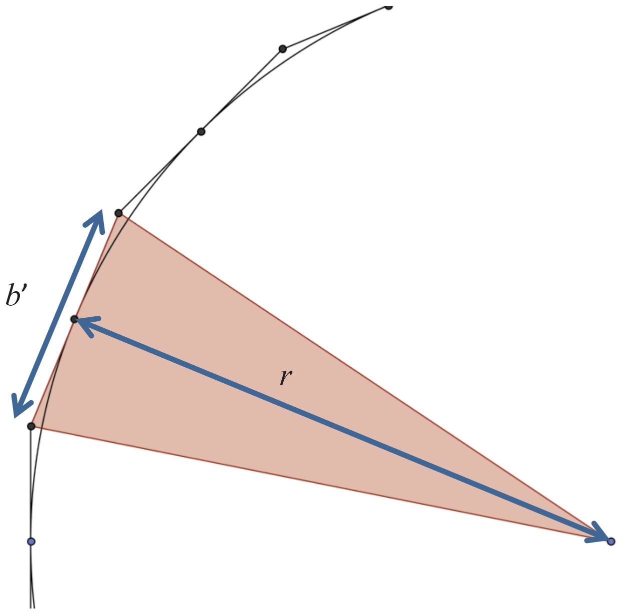


圖 22

表面上，阿基米德和劉徽都在證明同樣的圓面積公式 $\frac{1}{2}rC$ ，但兩種證明方法卻大異其趣，我們可以細心比較兩者的不同技巧。阿基米德使用了當時古希臘認可的歐氏幾何的演繹方式，以窮盡法及雙歸謬法，在有限的步驟內完成，邏輯上可說是銅牆鐵壁，滴水不漏。相反地，劉徽使用的直觀幾何在邏輯上雖然嚴謹度稍遜，但化曲為直、出入相補及至無窮分割的技術，這種典型的極限方法顯得更為簡單直接，令人歎為觀止。

在此我們可以欣賞及比較東西數學文化，歐氏幾何與直觀幾何的相異，有限與無限的不同運用，的確是相映成趣。

參考書目

1. Heath, T.L. (1897). *The Works of Archimedes*, Cambridge University Press.
2. Heath, T.L. 著，朱恩寬、李文銘等（譯）（1998）。*《阿基米德全集》*，陝西科學技術出版社。
3. 吳文俊主編（1998）。*《中國數學史大系》第 3 卷*，北京師範大學出版社。
4. 李繼閔（1992）。*《九章算術及其劉徽注研究》*，九章出版社。

第四章：《九章算術》中的體積求算法 – 棊驗術

李駿宇
教育局數學教育組

《九章算術》卷五〈商功〉篇的開首直接為「商功」的意思下注腳：「商功以御功程積實」。意思是商功的用途是計算進行工程時所涉及的容積和體積問題。〈商功〉篇中多討論計算一些類似錐體的多面體體積的問題。其中，劉徽在其注中引入棊驗術來解釋這些多面體體積的一般計算策略。本文會簡略介紹棊驗術和選取一些立體加以闡述。

劉徽在解釋「方亭」的體積公式時首先提到棊驗術。方亭亦即一個以正方形為底的平截頭體，〈商功〉篇中說明，方亭的體積公式為「上下方相乘，又各自乘，並之，以高乘之，三而一」。換以現代代數方式表達，即：

$$V = \frac{(a^2 + b^2 + ab) \times h}{3}$$

其中 V 為方亭體積、a 和 b 分別為上、下底正方形的邊長、h 為方亭高度，如圖一：

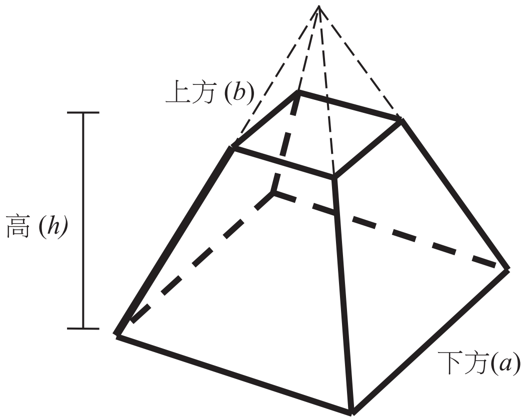


圖 23

這一條體積公式明顯和我們今天在課堂中一般計算平截頭體體積有分別。到底古時的數學家如何得出這一條有趣的公式呢？更有趣的，是〈商功〉篇在討論過方亭的體積後才討論方錐的體積。這鋪排更和我們在中學處理錐體和平截頭體體積的教學流程時正好相反。難道〈商功〉篇中求平截頭體體積的公式獨立於錐體體積公式？

仔細想一想，若要透過錐體體積求平截頭體體積公式，我們一般需利用相似三角形邊長成比例的數學知識。而且，當處理更複雜卻具相似特色的多面體（如〈商功〉篇中討論到的「芻甍」、「芻童」、「羨除」等，稍後會再加解釋），單運用相似三角形的性質亦不足以計算這些多面體的體積，但劉徽提出的棊驗術卻能提供一個普遍通用的算法求出這些多面體的體積。因此，我們可以看到棊驗術在計算體積上極大的實用價值。我們現在便對棊驗術作深入的介紹和解釋。

棊，即棋。劉徽所說的棊驗術，實際上即透過棋子為模型表達所討論的立體。如果那些棋子模型的體積均為已知，我們自然可以輕而易舉地把所討論的立體體積算出來。因此說穿了，棊驗術就是把立體分割為多個我們懂得計算其體積的「立體元件」的方法，情況亦有如在我們初學面積和體積時，我們把圖形或立體分割為若干個單位面積的正方形或單位體積的正方體，再計算總面積或體積一樣。

不過，如果單單使用單位體積的正方體為立體元件，我們在計算所有錐體體積時便束手無策了。因此，棊驗術除了以「立方」為元件外，更引入「塹堵」、「陽馬」和「鼈臑」三件元件作為計算體積的工具。

需要注意的是，我們一般會把計算體積的立體元件視為邊長為 1 單位的立方，但在〈商功〉篇中並無此規限。相反，棊驗術的重點在這幾個立體元件的形狀而非其度，因為劉徽在其注中已指出這些元件的一般性體積公式，因此我們在求取某類多面體的一般體積公式時根本無必要關注這些元件的量度，而集中處理這類多面體將會被分割為哪些立體元件。

所以，我們必須先熟習在棊驗術裏的立體元件。

顧名思義，立方是我們非常熟悉的方體。由於不考慮其量度，所以在棊驗術中提到的立方不僅包括正方體，亦包括長方

體。然後，我們知道任何一個立方可被分割為兩個全等的三角柱體，這個三角柱體便是塹堵了。如圖 24 所示：

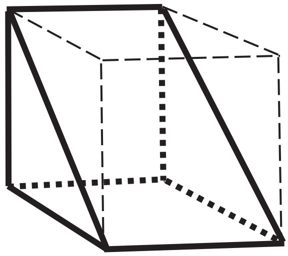


圖 24

再把塹堵沿著三角柱體其中兩個側面的對角線分割，可以得到一個非直立正方錐，其中錐體的頂點位於正方形的底其中一角的上方，是為陽馬。剩餘的部分則為一個四面皆為直角三角形的四面體，即鼈臑。如圖 25a、25b 及 25c 所示：

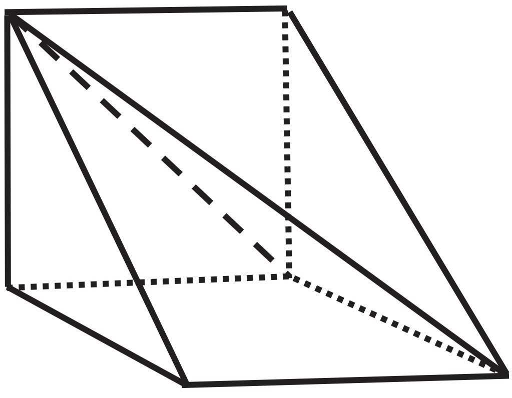


圖 25a

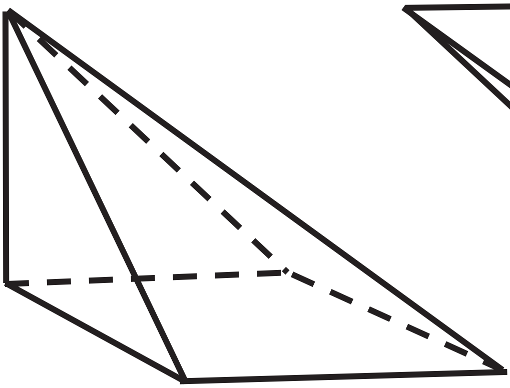


圖 25b 陽馬

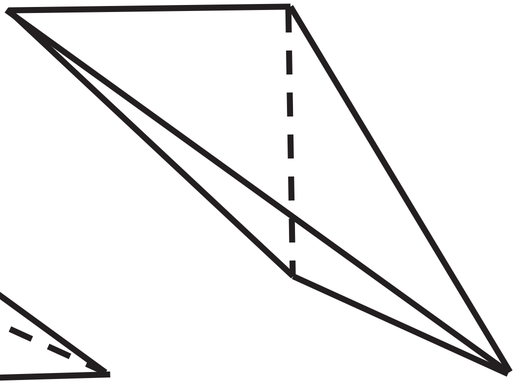


圖 25c 鱉臑

劉徽特別提到，由同一個立方分解出來的塹堵、陽馬和鱉臑，跟原本的立方成固定的體積比。明顯地，立方和塹堵的體積比為 2 : 1，但陽馬和鱉臑的體積卻比較複雜。當然，以今天我們對體積的認識自然知道陽馬和鱉臑分別為正方錐體和三棱錐體，我們可以直接利用錐體體積公式計算它們的體積。不過，我們必須留意劉徽正嘗試利用這幾個立體元件求出包括方錐等立體的體積公式，因此如果一開始便使用錐體體積公式求陽馬、鱉臑和立方、塹堵的體積比，則會明顯地犯上循環論證的邏輯謬誤。

因此，劉徽在沒有引用任何有關錐體性質的情況下，證明了陽馬和鱉臑的體積比為 2 : 1。以此推論，由於陽馬和鱉臑可合成塹堵，所以立方、塹堵、陽馬和鱉臑的體積比正好是 6 : 3 : 2 : 1。由於我們得知邊長後可輕易求得立方的體積，只要知道其

中一個元件的邊長，我們即可透過其對應的立方得知該元件的體積。

但劉徽是怎樣證明到陽馬和鼈臑的體積比為 2：1 這一個關鍵點呢？他在其注中如此說：

設陽馬為分內，鼈臑為分外，棊雖或隨脩短廣狹猶有此分常率，知殊形異體亦同也者，以此而已。其使鼈臑廣、袤、高各二尺，用塹堵、鼈臑之棊各二，皆用赤棊、又使陽馬之廣、袤、高各二尺，用立方之棊一，塹堵、陽馬之各二，皆用黑棊。棊之赤黑，接為塹堵，廣、袤、高各二尺。於是中分其高，又中效其廣，令赤、黑塹堵各自適當一方，其餘兩端各積本體，合成一方焉。高一尺，方二尺，每二分鼈臑則一陽馬也。是為別種而方者率居三，通其體而方者率居一。雖方隨棊改，而固有常然之勢也。按餘數具而可知者有一、二分之別，即一、二之為率定矣。其於理也豈虛矣。若為數而窮之，置餘廣袤高之數各半之，則四分之三又可知也。半之彌少，其餘彌細。至細曰微，微則無形。由是言之，安取餘哉。數而求窮之者，謂以情推，不用籌算。

劉徽先考慮一個由陽馬和鼈臑合成的塹堵，然後把它沿著各邊的中點把塹堵分割，如圖 26 所示：

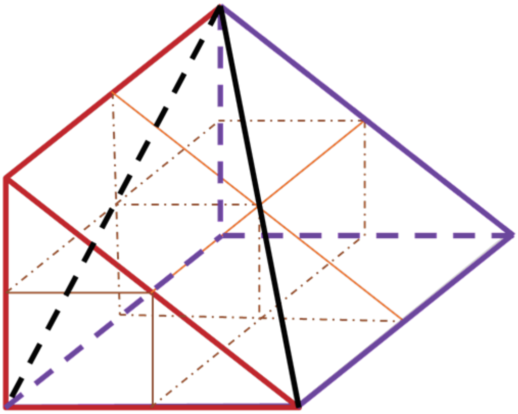


圖 26

因此，陽馬被分割為五部分，而鼈臑則被分割為四部分。如圖 27：

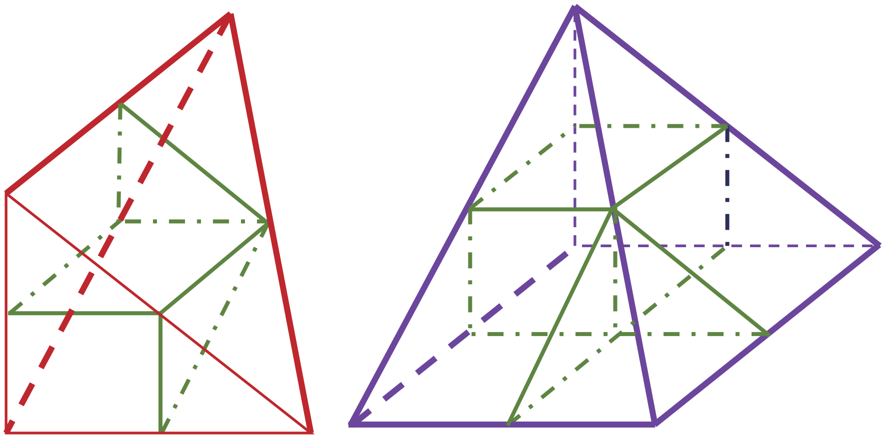


圖 27

當中，陽馬被分割成一個小立方、兩個小塹堵和兩個小陽馬。而鼈臑則被分割為兩個小塹堵和兩個小鼈臑。若只考慮小立方和小塹堵，構成陽馬的一個小立方和兩個小塹堵的總體積剛好是構成鼈臑的兩個小塹堵的兩倍。而剩下來的兩個小陽馬和小鼈臑，則剛好可合為兩個小塹堵！

這樣，我們便可重覆上述的分割，把這兩個小塹堵分割為更小的立方、塹堵、陽馬和鼈臑，這每一次這樣做，我們便可以按 2 : 1 的體積比移走小立方和小塹堵。以此推論，原本的陽馬和鼈臑的體積比必為 2 : 1。

我們也許會問，劉徽何必用到這種類似無窮小分析的方法來處理陽馬和鼈臑的體積：把陽馬沿正方形底的對角線分割為兩個鼈臑，因此一個陽馬的體積等於兩個鼈臑，這豈非更直截了當？

表面看來這好像是正確的，但劉徽沒有看漏一個重大的漏洞，就是這樣分割出來的鼈臑雖然外貌相似，但其實它們的方向性(orientation)全是不同的。以現代幾何術語的講法便是它們無論如何也不能透過平移或旋轉與其他的鼈臑重合。劉徽在其注中明言，特別在立方的長、闊和高不同時，分割立方得出的「鼈臑殊形，陽馬異體」。既然存在著不同方向性的鼈臑，我們便不能貿然把陽馬一分為二並假設三個鼈臑的體積相同。因此，劉徽提出的方法才妥善解釋陽馬和鼈臑的體積關係。

當然，劉徽在稍後的篇章亦加以說明，不同方向性的鼈臑的體積最終也是其對應立方體積的六分之一，因此只要其長、闊和高相同，我們計算鼈臑的體積時不用考慮其方向性。從這一點，我們可見劉徽的思慮周詳，和他對無邏輯謬誤的推論的追求。他對數學嚴謹性的堅持，實在不下於古代西方數學家！

在確立了四個立體元件的體積比後，我們便可以利用棊驗術計算各種立體的體積了。回到方亭的例子，撰寫〈商功〉篇的算術家到底如何得出下列這條公式呢？

$$V = \frac{(a^2 + b^2 + ab) \times h}{3}$$

劉徽認為是這樣的：如果我們要用立體元件模型模擬一個方亭，需要在中間位置擺放一個立方、四邊各擺放一個塹堵、及四角各擺放一個陽馬，如圖 28：

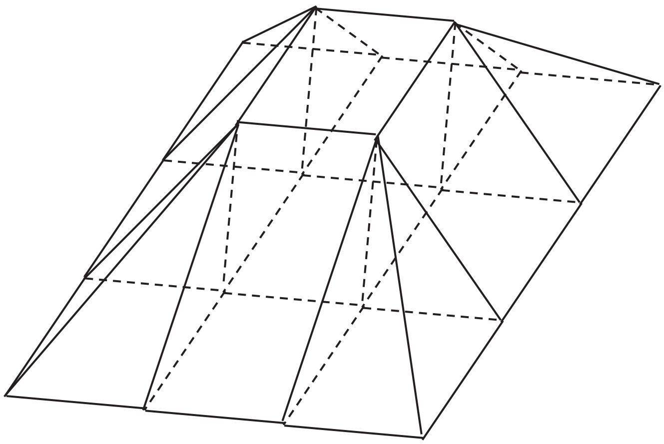


圖 28

為方便討論，我們用表3來表達這個方亭，其中的數字代表該個元件佔其對應立方的幾分之一。

陽馬 1/3	塹堵 1/2	陽馬 1/3
塹堵 1/2	立方 1	塹堵 1/2
陽馬 1/3	塹堵 1/2	陽馬 1/3

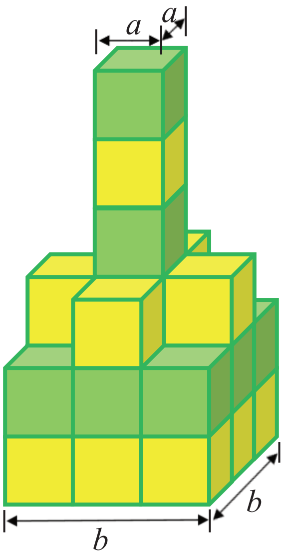
表 3

立方 2	立方 3	立方 2
立方 3	立方 6	立方 3
立方 2	立方 3	立方 2

表 4

然後，我們用遍乘的技巧令表中所有數字變為整數，因此將整個表乘以 6。換言之，六個方亭的總體積可以表 4 表達。

透過遍乘把表中所有數字變為整數的目的是要把所有考慮的立體元件模型轉化為立方。如果我們把這上表所代表的立體轉換回立體模型，應不難想像模型如圖 29：



其中 a、b 分別為方亭的上底和下底。

圖 29

這樣的話，我們便有方法計算出這個立體的體積從而求得一個方亭的體積。但必須注意，除了所有立方的高是相等外，圖中的立方並非全為相同度量的立方體，所以在計算時我們須分別計算不同度量的立方的體積。

這方法在計算一些高度對稱的立體的體積時並非甚麼難事，如〈商功〉篇對方亭的描述。但是，我們可以有更聰明的方法把圖 29 所示的立體的立方重新排列，令我們能更輕鬆地計算這個立體的體積。首先，我們注意到要計算圖 29 所示的立體體積時，最困擾我們的是第三層呈十字型的立體。而它之所以比別層難以處理，正正因為十字型的立體並非我們常見的矩形

方體。針對這一點，我們可以用所有構成圖 29 立體的立方均為等高作考慮。由於這些立方等高，我們知道要表達表4所示的立體，圖 29 只是其中一種我們比較慣於想像的模式，並非唯一。事實上，表4所示立體的每一個立方元件均可任意放置在同一個垂直位置上的不同高度。因此，如果我們把圖 29 中第三層立體左右兩側的立方上移一層，可以得出相同體積、圖 30 所示的模型：

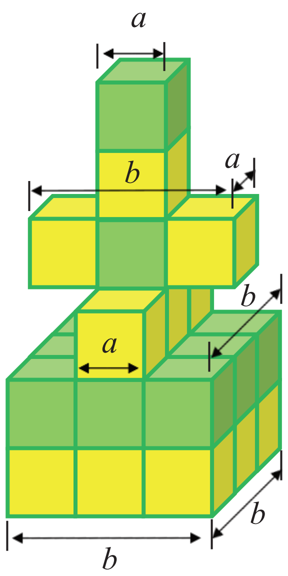


圖 30

這樣的擺放則更方便計算體積了。這一種排列方法比圖 29 優勝之處是我們現在要處理的每一層立體均為矩形方體了。當我們再仔細觀察每一層立體的度量時，不難發現其長與闊全部也是原來的方亭的上底或下底的度量！假設每一層的高度均為 h，當下底邊長為 b、上底邊長為 a 時，六個方亭的體積便是 $\left(2a^2+2ab+2b^2\right)h$ 。

因此，一個方亭的體積便是 $\dfrac{(a^2+b^2+ab)\times h}{3}$ 。

再以另一個例子「芻甍」說明。芻甍意為蓋上草的屋脊，形狀如圖 31：

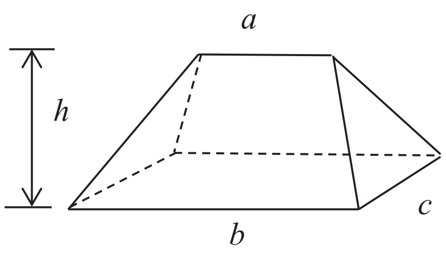


圖 31

其中 a、b、c 和 h 分別是芻甍上、下底的邊長及高。照樣使用棊驗術，可把芻甍模擬為表 5：

陽馬 1/3	塹堵 1/2	陽馬 1/3
陽馬 1/3	塹堵 1/2	陽馬 1/3

表 5

遍乘 6 倍以後，便知六個芻甍的總體積可用表 6 表達：

立方 2	立方 3	立方 2
立方 2	立方 3	立方 2

表 6

由此，我們可知六個芻甍的總體積是 $(2bc+ac)h$ ，所以一個芻甍的體積便是 $\dfrac{(2b+a)\times c\times h}{6}$ 了。

我們可發現更多使用棊驗術計算體積的長處，其中最重要的是我們只在最終的運算步驟才實際代入立體的邊長，因此棊驗術可一併處理一些同種類但並非直立或者對稱性較低的立體。

比如說「芻童」這種立體。它和方亭唯一的分別是其上、下底並非正方形而是長方形，而且把其斜稜延長未必相交於一點，即它並不一定是平截頭體。我們因此不能透過日常課堂中計算平截頭體體積的方法處理芻童的體積，但利用棊驗術，計算芻童和方亭體積的方法卻是完全一致。

再進一步去想，由於我們總能找出一個排列的方法，使遍乘後的立體模型的每一層也是矩形方體，且其度量和原立體的

上、下底度量相同（因為我們把該立體分割時也會按其上、下底的度量分割），所以我們一定能以這些立體的上、下底度量得出其體積公式，這和立體是否直立（即連接上、下底形心的直線垂直於上、下底）無關。當然，在使用棊驗術時我們仍需要對立體有一定限制，如我們須限制立體的上底的稜和對應下底的稜平行，否則在分割立體時我們未必能妥善地單用立方、塹堵、陽馬和鼈臑表達該立體。

最後，我留下一個挑戰題讓讀者思考：如何利用棊驗術求「羨除」的體積。劉徽說羨除即隧道，其形狀倒和本港的海底隧道入口有些相似。它是一個以三個梯形和兩個直角三角形組成的五面體，其中有兩個梯形互相垂直，情況如圖 32 所示：

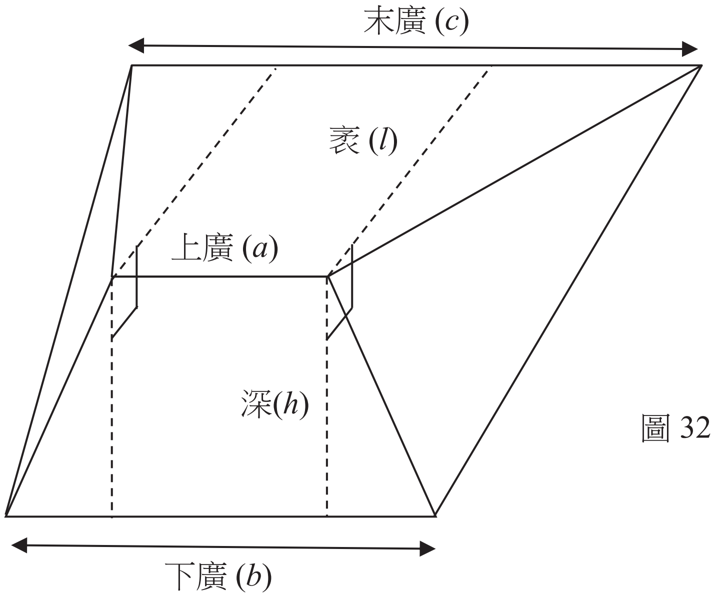


圖 32

注意其邊長的名稱為〈商功〉篇中的慣常用語。深代表垂直的距離，袤代表在水平面上的南、北距離，而上廣、下廣和末廣均代表在水平面上的東、西距離。即現代座標幾何的術語，我們可把這些量度套進三維空間中的座標軸上的量度。另外，我們很容易想像到上廣、下廣和末廣的長度不同，計算羨除體積的難度亦大有不同。最簡單的情況當然是上廣、下廣和末廣的長度相等，則羨除即一個直角三稜柱體。但我們現在假設上廣、下廣和末廣的長度全不相等，則需分開不同情況考慮如何分割羨除並用合適的立體元件模型模擬該羨除了。

我們的挑戰題是：假設末廣長於下廣長於上廣，透過棊驗術，這一個羨除的體積公式是甚麼呢？

若讀者未能直接解開這個問題，我在下一頁留給大家一些提示。讀者可按需要逐一使用提示。

提示一：羨除的體積公式為 $\dfrac{(a+b+c)\times h\times l}{6}$ 。

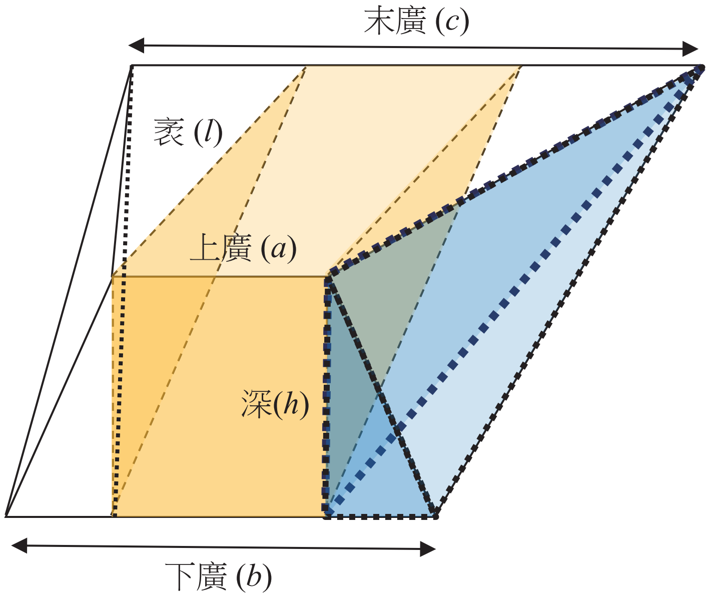
提示二：使用棊驗術模擬這個羨除時，其中一個立體元件為高度等於下廣的塹堵。

提示三：最終這個羨除須用五個立體元件來模擬。

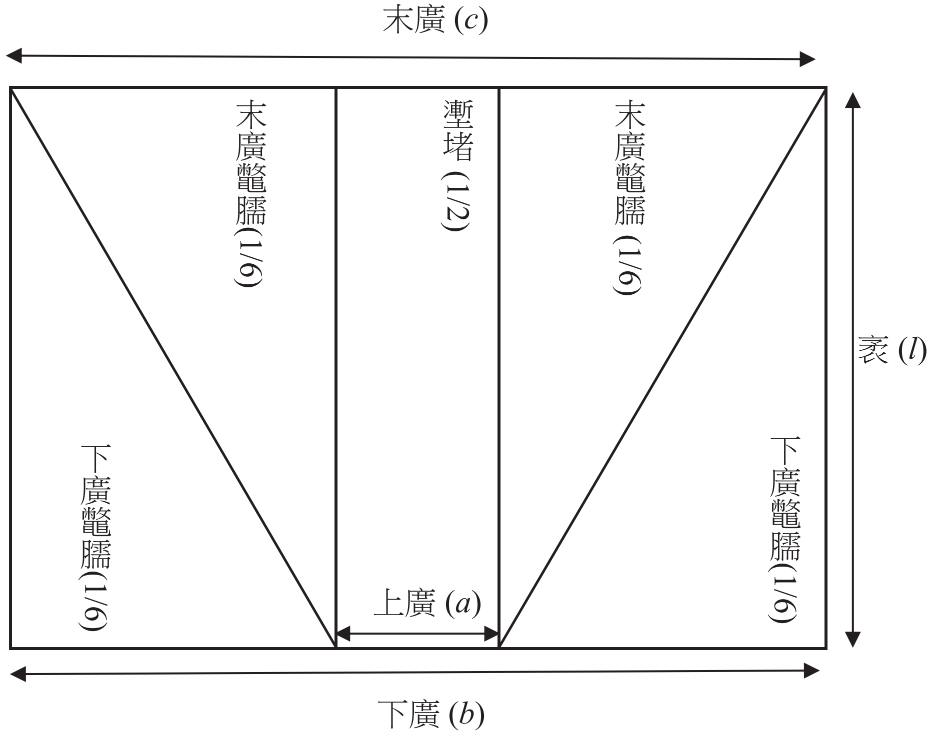
提示四：這五個立體元件分別為一個塹堵和四個鼈臑。

如仍需更多提示，可參閱下頁。

提示五：參下圖。



提示六：參下表。



第五章：球體體積公式 —— 阿基米德

吳家樂
九龍華仁書院

阿基米德生前很喜愛三件東西: 圓錐體、圓柱體和球體，主要是因為他找到了它們之間微妙的關係。他運用了槓桿原理，給出了一個非常漂亮的球體體積公式證明。先備知識是我們要先知道圓錐體體積和圓柱體體積的公式。

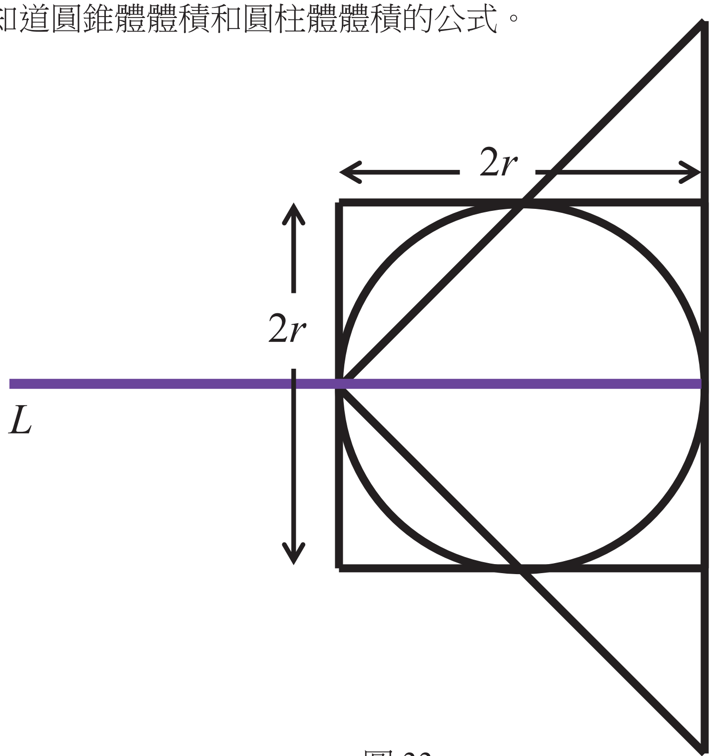


圖 33

首先，他把圓形、正方形和三角形沿軸 L 旋轉得出一個球體、圓柱體和圓錐體。之後找出它們的橫切面體積，即球體薄片體積、圓柱體薄片體積和圓錐體薄片體積。阿基米德發現到：

(球體薄片**體積** + 圓錐薄片**體積**) $\times 2r$

= 圓柱**(半徑= 2*r*)**薄片**體積** $\times x$

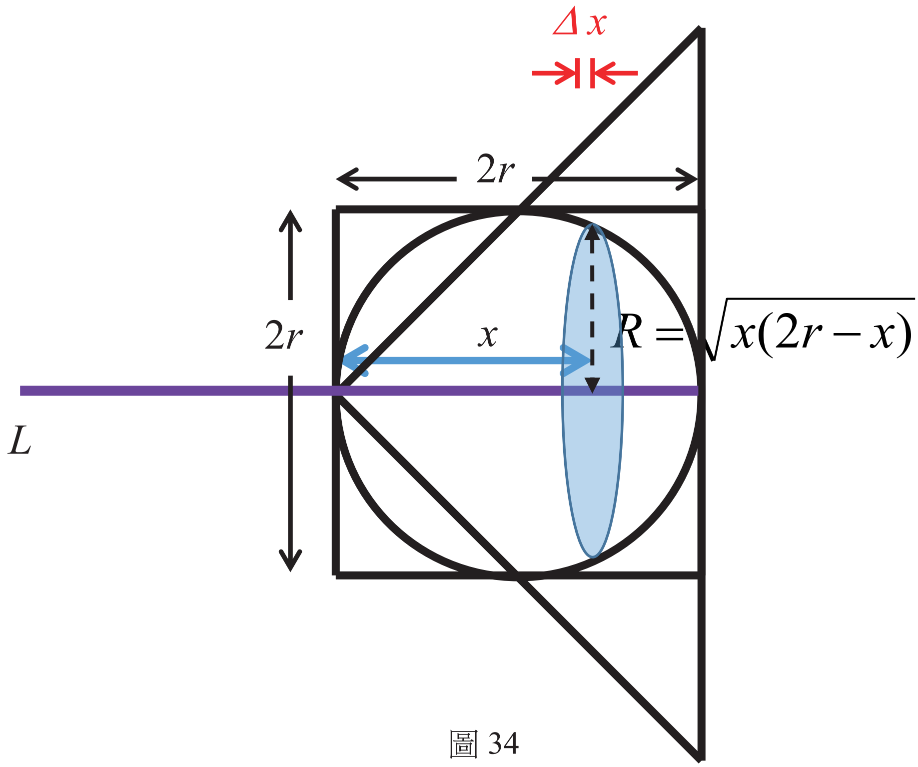


圖 34

於是他就巧妙地運用了槓桿原理把球體薄片、圓柱體薄片和圓錐體薄片放在天秤適當的位置以達至平衡狀態(如圖 35):

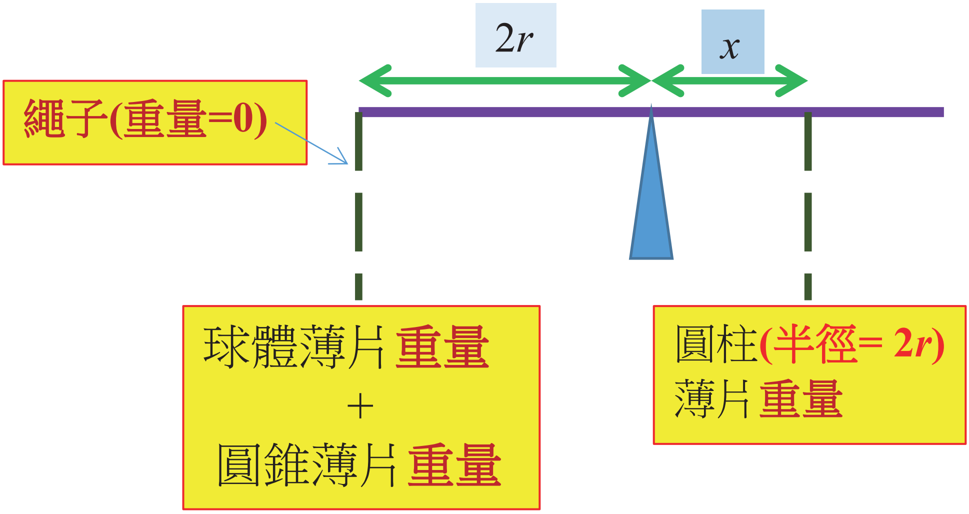


圖 35

既然平衡，我們就把它們的薄片全部放在一起，加起來亦應該是平衡的。最後我們得出以下的平衡狀態：

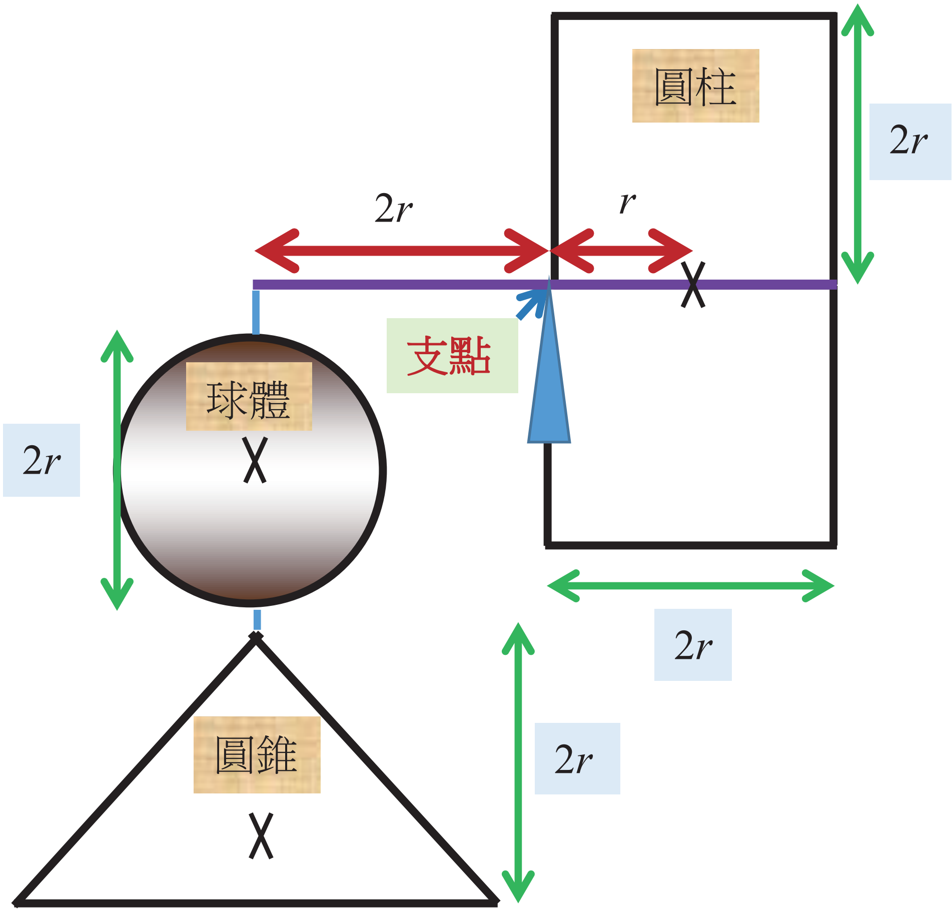


圖 36

用一次槓桿原理，我們就得出以下的公式:

(球體體積 + 圓錐體積) × 2 r = 大圓柱體積 × r

$$[V + \frac{1}{3}\pi(2r)^2(2r)] \times 2r = [\pi(2r)^2(2r)] \times r$$

$$[V + \frac{1}{3}\pi(2r)^2(2r)] = [\pi(2r)^2] \times r$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

球體體積 = $\frac{4}{3}\pi r^3$

這是多麼巧妙的證明啊！

第六章：牟合方蓋

梁子傑

劉徽是我國數學史上一位非常偉大的數學家。他的傑作《九章算術注》和《海島算經》可算是我國最寶貴的數學遺產之一。遺憾的是，關於這位偉大數學家的籍貫、履歷和生卒年代，我們所知甚少，只知道他是魏晉時代的人，即大約生存於公元三世紀。

在《九章算術》第四卷「少廣」中，記述了一個由球體體積計算直徑長度的方法。這方法等同於算式 $V=\frac{9}{16}d^3$。要知道，古人以為圓周率 $\pi=3$，所以上式其實亦即是說 $V=\frac{3}{2}\pi r^3$。劉徽在他的注疏中批評了此算式，並以牟合方蓋的體積來解釋他的觀點。

所謂「牟合方蓋」，就是指由兩個同樣大小但軸心互相垂直的圓柱體相交而成的立體。由於這立體的外形好像兩把上下對稱的正方形雨傘，所以就稱它為「牟合方蓋」。

劉徽指出，一個正方形和它的內切圓，它們面積之比為 4 : π。因此，一個正立方體和它的內切圓柱體，它們的體積之比亦會是 4 : π。同時，一個球體可以內切於一個牟合方蓋之內，因此一個牟合方蓋與它的內切球體體積之比亦為 4 : π，即 $\frac{V_{柱}}{V_{正}}=\frac{V_{球}}{V_{牟}}=\frac{\pi}{4}$。由此，$V_{球}<\frac{V_{柱}}{V_{牟}}\times V_{球}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\times V_{正}=\frac{\pi^2}{16}d^3$，亦

即是說，球體體積比 $\frac{9}{16}d^3$ 為小！可惜的是，劉徽並未能成功地求出牟合方蓋的體積，因此亦未能提出計算球體體積的正確算式。

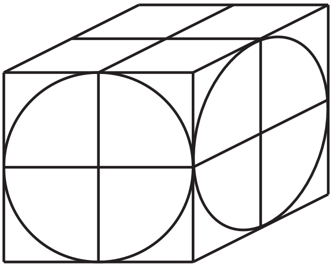


圖 37a 兩圓柱體相交

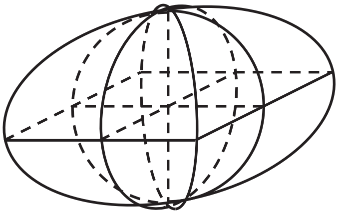


圖 37b 牟合方蓋

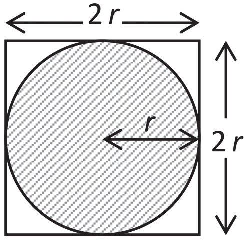


圖 37c 正方形與它的內切圓之比

200 年後，劉徽的工作終於由祖沖之的兒子祖暅所完成。雖然祖氏父子的著作《綴術》經已失傳，但是祖暅計算球體體積的方法卻由李淳風記錄了下來。

祖暅的方法是將原本的牟合方蓋分為 $\frac{1}{8}$，如圖 38a。設 $OP = h$，過 P 作平面 $PQRS$ 平行於 $OABC$。又設內切球體的半徑為 r，則 $OS = OQ = r$。故此，$PS = PQ = \sqrt{r^2 - h^2}$，正方形 $PQRS$ 的面積是 $r^2 - h^2$。

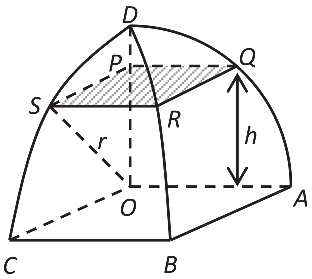


圖 38a 八分之一牟合方蓋

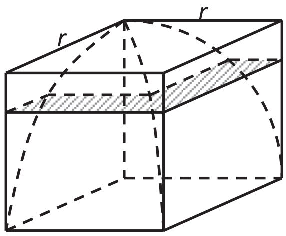


圖 38b 牟合方蓋與正立方體之間

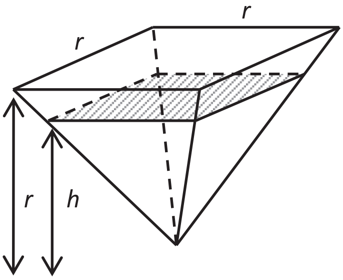


圖 38c 倒立正方錐體

如果將八分之一個牟合方蓋如圖 38b 般放在一個邊長為 r 的正立方體之內，那麼圖中陰影部分的面積便等於 $r^2 - (r^2 - h^2) = h^2$。而這個面積亦相等於圖 38c 中一個倒立的正立方錐體的橫切面面積！

於是，將圖中八分之一個牟合方蓋的體積，加上倒立錐體的體積，就應該等於正立方體體積了。即八分之一個牟合方蓋的體積 $= r^3 - \frac{1}{3}r^3 = \frac{2}{3}r^3$。所以整個牟合方蓋的體積為 $8 \times \frac{2}{3}r^3 = \frac{16}{3}r^3$。最後，根據劉徽的想法，球體體積 $= \frac{\pi}{4} \times \frac{16}{3}r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$。

牟合方蓋？

可能大家會對牟合方蓋感到非常陌生，難以想像。因此，以下就為大家介紹一個製作牟合方蓋立體模型的方法，一起來揭開它的神秘面紗。

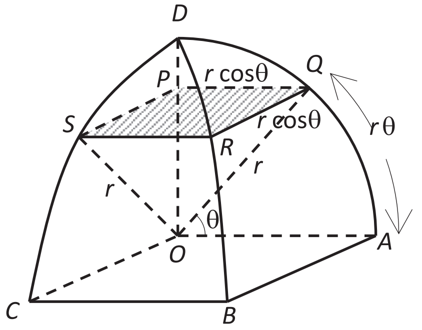


圖 39

圖 39 是一個八分之一的牟合方蓋。*OABC* 為一正方形，*OCD* 和 *OAD* 為兩個四分之一圓，並設 *OA* 為 *r*。要成功地製作出這立體，就要知道曲面 *ABD* 和 *CBD* 的形狀。

留意，將曲面 *ABD* 攤平後，$\angle BAD$ 為一直角。如果 $\angle AOQ = \theta$，則 $\overset{\frown}{AQ}$ 長 $r\theta$。又，從 ΔOPQ 可知 $PQ = r\cos\theta$。因為 *PQRS* 為一正方形，所以 *QR* 亦等於 $r\cos\theta$。利用 *AQ* 和 *QR* 的關係，就可以繪畫出曲面 *ABD* 和 *CBD* 的圖形（見圖 40）。由此，便可製作出牟合方蓋的模型。

製作步驟

1. 在方格紙中繪上一個正方形。建議使用一邊長為 5 個單

位的正方形。

2. 在正方形的兩旁畫上兩個四分一圓。
3. 再在正方形的另外兩旁繪上 *ABD* 的形狀。大家可參考下表中的數據來點出曲線上的點，然後用直尺將各線段連結。
4. 在適當的邊上加上「紙口」。
5. 將圖形剪出，然後用膠水將模型黏合。

6. 只要重複製作多七個模型，就可以得到一個完整的牟合方蓋。

5θ	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$5\cos\theta$	$5\cos\frac{x}{5}$	5	4.90	4.61	4.13	3.48	2.70	1.81	0.85	–0.15

表 7

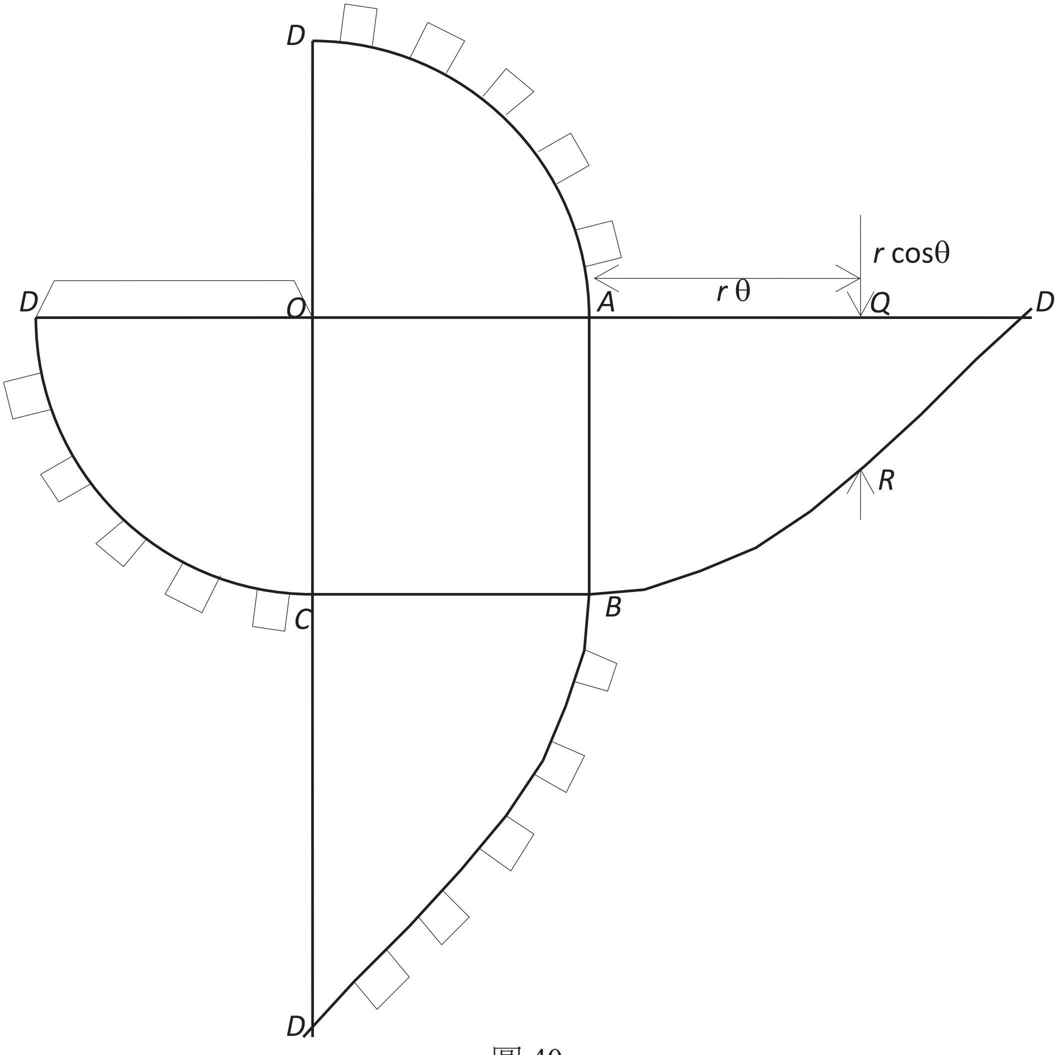


圖 40

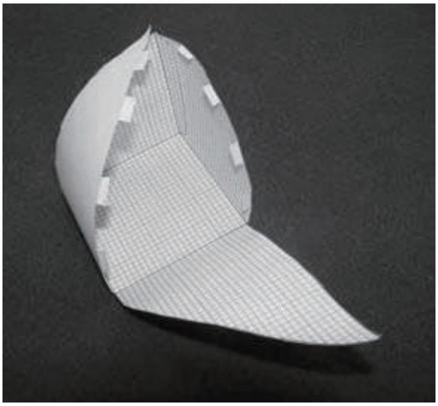


圖 41a 未黏合的牟合方蓋模型

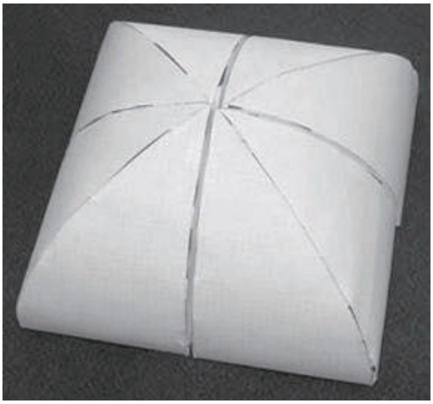


圖 41b 半個牟合方蓋

無處不在的牟合方蓋

雖說我們不熟悉牟合方蓋的形狀，但是它卻無處不在的，只要我們細心觀察，便會留意到它的踪影。

圖 42 香港地鐵車箱內的扶手

圖 43 華盛頓地鐵站內兩圓形隧道的交匯點

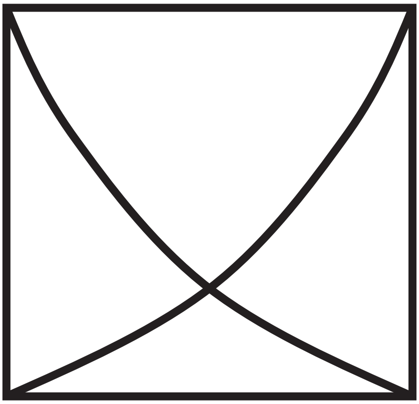


圖 44　香港數學教育學會的會徽

圖 45　菜市場中一個近似牟合方蓋的工具

參考書目

1. 白尚恕（1990）。《*九章算術今譯*》。濟南：山東教育出版社。

2. 梁宗巨（1995）。《*數學歷史典故*》。台灣：九章出版社（原書由瀋陽：遼寧教育出版社於 1992 年出版）。

第七章：總結

蕭文強教授
香港大學數學系

前面五章各自介紹了一些面積和體積的選題，當中引進了豐富的數學歷史素材。首先，讓我說明融會數學歷史素材於課堂教學的一個架構。就每一項選定的課題而言，有三方面的觀點需要考慮：數學史的觀點、數學觀點、教學觀點。作為數學教師，我們應該設法多些知道有關的數學史資料及具備堅實的數學知識，以瞭解該課題，然後著眼於教學方面，以冀能夠在課堂上發揮，讓學生學得更好，明白得更多更深入。

在引言部分我提到「畢氏定理」，不如就以此為例，從一本十八世紀幾何課本的敘述看看前述那三方面的關係。法國數學家克萊羅（Alexis Claude Clairaut， 1713-1765）的著述《幾何原本（Elements de géométrie）》，出版於 1741 年，再版於 1753 年，當中對「畢氏定理」作了如下的敘述。命題十六教導讀者如何得到一個正方形，它的面積等於兩個相同（且較小）的正方形的面積之和，作者給出一個簡單而且顯明的圖形以解決問題 (見圖 46)。

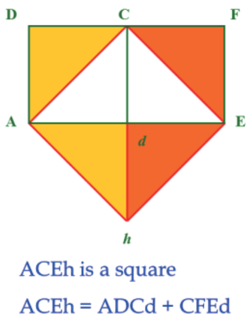


圖 46

接著，作者自然地提出一個更一般的問題，就是命題十七，如何得到一個正方形，它的面積等於另外兩個（不一定相同的）正方形的面積之和。通過圖形的指示，作者借用命題十六的思想解釋了如何做。（「延續命題十六的想法，我們試圖找到 DF 上的一個點 H：滿足（i）當 ADH，EFH 分別繞 A，E 旋轉到 Adh，Efh 時，它們交於點 h，（ii）AH，HE，Eh，hA 均相等而且互相垂直。取 DF 上的一個點 H，使 $DH = CF = EF$。」）(見圖 47)

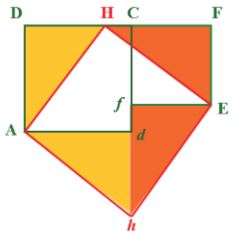
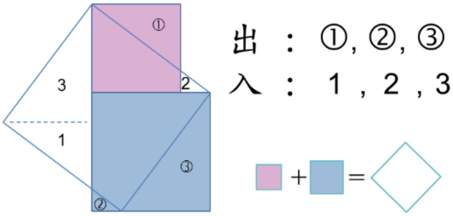


圖 47

從命題十七的構作來看，命題十八（「畢氏定理」）成為順手拈來的副產品！

在古代東方的數學也有類似的案例，譬如之前幾位講者論及的「出入相補原理」便是 (見圖 48)。



出入相補原理
（劉徽 ， 公元三世紀中葉）

圖 48

比較一下古代東西方計算圓的面積的思想方式，對課堂教學甚有意思。我們已經見過阿基米德在公元前三世紀的著述《圓的量度（*Measurement of a Circle*）》如何證明圓的面積 A 等於勾和股分別是圓的半徑與周長的直角三角形的面積 K，運用的是窮竭法與雙重歸謬法，即是若 $A > K$，導致矛盾，但若 $A < K$，亦導致矛盾，故 $A = K$（等於圓的半徑乘圓周的一半）。固然，於邏輯推理而言，這個證明乃無懈可擊，但證明卻必須借助於一個已知的結果。如果我們以為 A 是圓的半徑乘圓周的三份一，證明便無法通過！要獲得那已知的結果，必須通過另外的聰明方法。反觀劉徽的「割圓術」（公元三世紀中葉），雖然不如阿基米德的演繹推理證明如許嚴謹，卻也言之成理，而且通過算法步驟得出正確答案。

劉徽注《九章算術》卷九時提及「出入相補原理」，注卷一時稱作「以盈補虛」，注卷五時又稱作「損廣補狹」，都是運用同一的思想和方法。利用這種思想，劉徽建立了面積理論和體積理論，在卷一作了矩形面積的定義：「凡廣從相乘謂之冪」，在卷五作了標準六面體體積的定義：「以廣袤相乘，以高乘之，得此積。」以矩形面積為起點，利用「出入相補原

理」得到三角形的面積，再推廣至其他直線形的面積，還運用無窮小分割處理曲線形的面積，蘊含了微積分的精神。在三維的情況，中國古代數學家運用「出入相補原理」及「棊驗術」（立方、塹堵、陽馬），加上無窮小分割及「等高處截面積原理」處理眾多體積問題。後一個原理，在西方稱作卡瓦列里原理（Cavalieri's Principle），是意大利數學家卡瓦列里（Bonaventura Cavalieri，1598-1647）在十七世紀提出來的，成為西方微積分的先驅。值得一提的，是劉徽提出來的「陽馬居二，鼈臑居一，不易之率也。」這句話，相隔一千六百多年後與著名的希爾伯特第三問題（Hilbert's Third Problem）的內容極有關連，古今成果唱和，成為數學史的佳話。

回頭重看《原本》卷十二命題二：「兩圓面積之比等於它們直徑平方之比。」古代希臘數學不用公式表達面積的計算，卻習慣上把這個重要的定理寫成如此形式，以今天的公式表達，即是 $A=kd^2$ ，A 是圓的面積，d 是直徑，k 是個常數。由於 $C=\pi d$ ，C 是圓周，π 是圓周率，便得到 $A=\left(\dfrac{2k}{\pi}\right)Cr$ ，r 是圓的半徑。我們也知道 $A=\dfrac{1}{2}Cr$ ，就是說 k 其實是 $\dfrac{1}{4}\pi$ 。$A=\dfrac{1}{2}Cr$ 這回事，在古代數學多處出現，較著名的是公元前三世紀阿基米德的《圓的量度（*Measurement of a Circle*）》，公元三世紀劉徽的《九章算術註》和公元十二世紀 Abraham bar Hiyya ha-Nasi 的《量度論（*Treatise on Mensuration*）》，各自給出精彩的解說 (見圖 49)。這條公式比較一般在中小學課本上見到的 $A=\pi r^2$ 有更豐富和更深刻的數學意義，因為它顯示了一個非常重要的結果，即是圓面積（二維情況）與周長（一維情況）有關。更一般地，有界閉域的面積與其周界上某一數量有聯繫，就是「微積分基本定理」（Fundamental Theorem of Calculus）的內容。

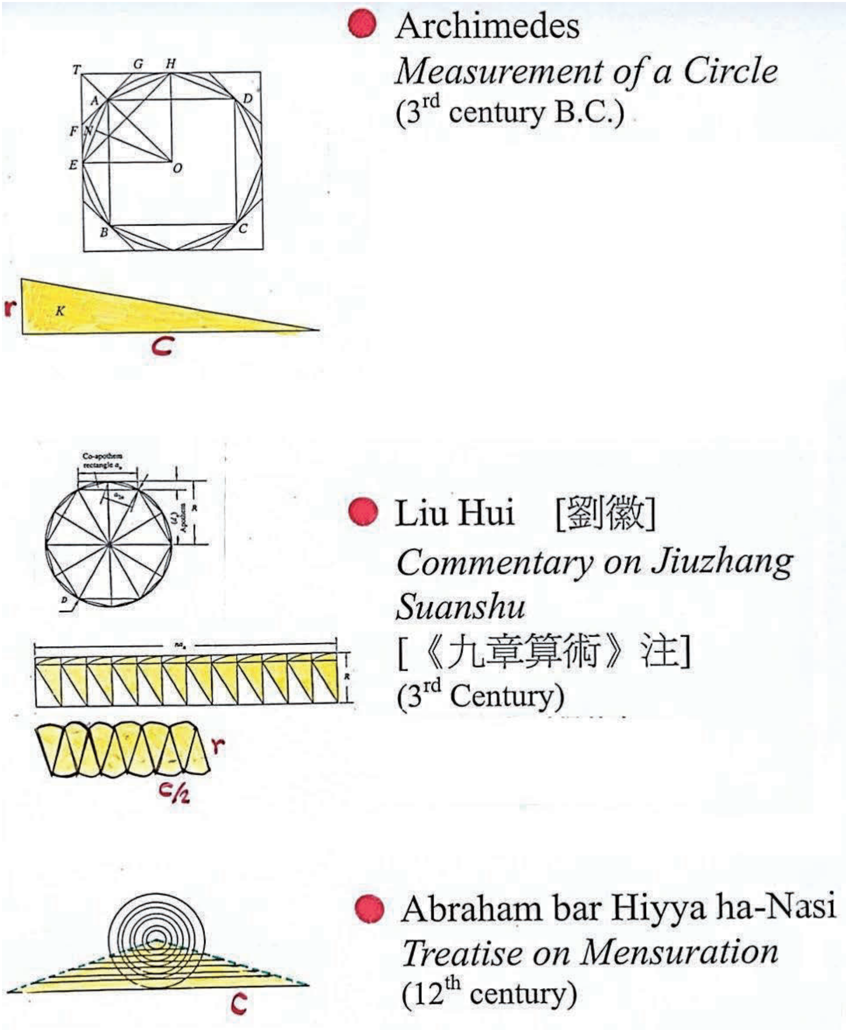


圖 49

看來，面積和體積的概念毫不簡單，雖然自小學以來，面積和體積已經是課堂上討論的課題。面積和體積的概念在歷史上也是由來已久，基本思想就是一個可加的量度，而且在剛體運動底下是不變更的。然而，這個基本概念卻有待四千多年以

降一代又一代數學家的努力，才於二十世紀初把它提煉成精確且易於運用的形式。勒貝格（Henri Lesbesque, 1875-1941）在他的 1902 年博士論文《積分、長度、面積（Intégrale, longueur, aire）》奠下面積理論的基礎，其後由卡拉西奧多里（Constantin Carathéodory, 1873-1950）在其著述《實函數論教程（Vorlesungen Über Reele Funktionen ， 第二版，1927）》作出闡明。

在 1982 年和 1983 年我分別給了兩個普及數學講座，與面積和體積有關，一個題為「微積分的故事」，另一個題為「不用微積分能計算體積嗎？」，文本刊載於其後出版的一本書的第二章及第三章（蕭文強，《1，2，3，…以外》，1990 年初版；1993，1994 年（修訂版））。主要思想是從面積和體積的直觀概念提煉它的精髓，捕捉其要義，得到如下對面積的定義（類似地可作體積的定義）。

每個（可測度）圖形 S 有一個相應的數 $m(S)$ ，滿足以下的屬性：

[A1] $m(S)$ 是非負數。

[A2] 若 S_1 和 S_2 不重疊地組成 S，則
$m(S_1)+m(S_2)=m(S)$ 。

[A3] 若 S' 是 S 的平移，則 $m(S)=m(S')$ 。

[A4] 若 S 是單位正方形，則 $m(S)=1$ 。

漂亮的事情是：對每個（可測度）圖形 S，有辦法賦予滿足 [A1] 至 [A4] 的 $m(S)$，而且得到的 $m(S)$ 是唯一決定了。[A4] 只為求標準化而已，取得一個基準以資比較。至於 [A2] 和 [A3] 的作用，在「出入相補原理」中我們已經多次領教過了。反而毫不起眼的 [A1] 卻起關鍵作用，運用它即是運用了微積分！（欲知詳情，有興趣的讀者可以參考《1，2，3，…以外》和另外兩本英文著作：A. Beck, M.N. Bleicher, D.W. Crowe, *Excursions Into Mathematics*, 1978, Chapter3; V.G. Boltianskii, *Hilbert's Third Problem*, 1978, Chapter 1.）

如果你仍然認為面積和體積乃簡單不過的概念，讓我再提出兩個有關的問題。第一個在課堂上可能是耳熟能詳，甚至有些人以為理所當然，第二個引領我們至高等數學的範疇。

《原本》卷六命題十九說：「兩相似三角形面積之比等於相應的邊平方之比。」命題二十把結果推廣至相似多邊形的情況，由此（加上極限思想）可以再推廣至任意相似圖形的情況。容許我在這兒賣個關子，不展示《原本》的解釋，那是頗為巧妙的。大家可能想到，上面的結果涉及相應邊的平方，與面積是二維的概念有關，如果是相似物體的體積，是三維的概念，便涉及相應邊的立方了。但大家有沒有想過，維數（dimension）是什麼？對維數的討論，可追溯至二十世紀初數學家對何謂幾何圖形（geometric figure）的探討，或者舉一個更具體的特例，何謂曲線（curve）？何謂曲面（surface）？在二十世紀的二十年代蘇聯數學家葉戈洛夫（Dimitri Fedorovich Egorov, 1869-1931）把這個題目交給他的博士生，年青的烏雷松（Pavel Samullovich Urysohn, 1898-1924），後者花了整個夏天專攻這個難題。根據烏雷松的好友兼同窗亞歷山德羅夫（Pavel

Sergeevich Aleksandrov, 1896-1982）後來敘述：「1921 年的整個夏季，P.S. [烏雷松]都在設法尋找一個“最新”的維數定義；他把注意力從一個想法轉移至另一個，時常設法構作例子以說明為何這個想法應該取代那個想法。...終於，將近八月尾的一個早上，P.S. 醒來時頓悟了他創建的「歸納維數（inductive dimension）」的完滿形式。」在二十世紀前期，在眾多頗富盛名的數學家的共同努力下，維數理論取得長足的進展。我們在中學（甚至大學）的數學課程裏對維數的理解是確定物體中某一點所需要的獨立參數（座標）的數目，但在維數理論的發展過程中，出現了好幾種對維數的定義，甚至有些維數並不是整數。那是十分有趣的一段故事，從瑞典數學家科克（Helge von Koch, 1870-1924）和波蘭數學家謝爾品斯基（Wacław Sierpiński, 1882-1969）發現的奇怪“曲線”和“曲面”引領數學家對分形（fractal）的研究，在這兒就不贅了。

以上我們經常提到數學歷史素材，幾位講者亦運用了不少《九章算術》或《原本》書中的事例以增進對數學內容的理解，那都是數學歷史學習小組共同研讀這兩本經典名著的一些心得。讓我以下面一首打油詩作結，以誌小組在學習過程當中獲致的樂趣及其間的心路歷程：

「言必《原本》非崇洋，

心懷《九章》亦平常，

中西卷帙相輝映，

異曲同工意深長。」

	數學百子櫃系列	作者
(一)	漫談數學學與教—新高中數學課程必修部分	張家麟、黃毅英、韓藝詩
(二)	漫談數學學與教—新高中數學課程延伸部分單元一	韓藝詩、黃毅英、張家麟
(三)	漫談數學學與教—新高中數學課程延伸部分單元二	黃毅英、張家麟、韓藝詩
(四)	談天說地話數學	梁子傑
(五)	數學的應用：圖像處理—矩陣世紀	陳漢夫
(六)	數學的應用：投資組合及市場效率	楊良河
(七)	數學的應用：基因及蛋白的分析	徐國榮
(八)	概率萬花筒	蕭文強、林建
(九)	數學中年漢的自述	劉松基
(十)	中學生統計創意寫作比賽 2009 作品集	
(十一)	從「微積分簡介」看數學觀與數學教學觀	張家麟、黃毅英
(十二)	2010/11 中學生統計創意寫作比賽作品集	
(十三)	2011/12 中學生統計創意寫作比賽作品集	
(十四)	數學教師不怕被學生難倒了！— 中小學數學教師所需的數學知識	黃毅英、張僑平
(十五)	2012/13 中學生統計創意寫作比賽作品集	
(十六)	尺規作圖實例、題解和證明	孔德偉
(十七)	摺紙與數學	阮華剛、譚志良
(十八)	2013/14 中學生統計創意寫作比賽作品集	
(十九)	2014/15 中學生統計創意寫作比賽作品集	
(二十)	宇宙的尺度變異定律	龍振強
(二十一)	三次數學危機與勇闖無窮大	梁子傑
(二十二)	2015/16 中學生統計創意寫作比賽作品集	
(二十三)	2016/17 中學生統計創意寫作比賽作品集	
(二十四)	2017/18 中學生統計創意寫作比賽作品集	