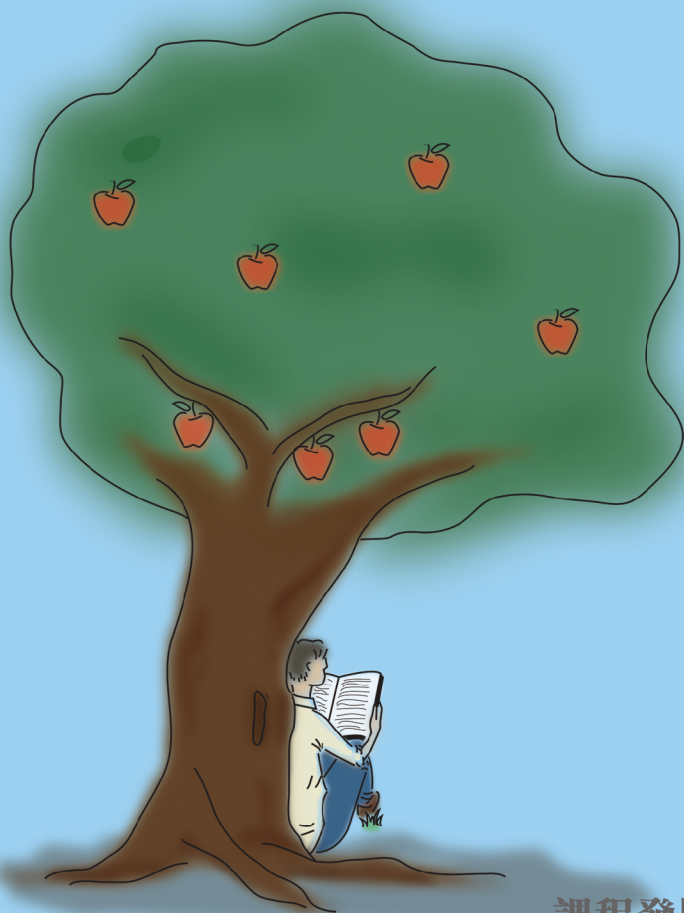


數學百子櫃系列(二十七)

排難解紛的數學 ——公平分配

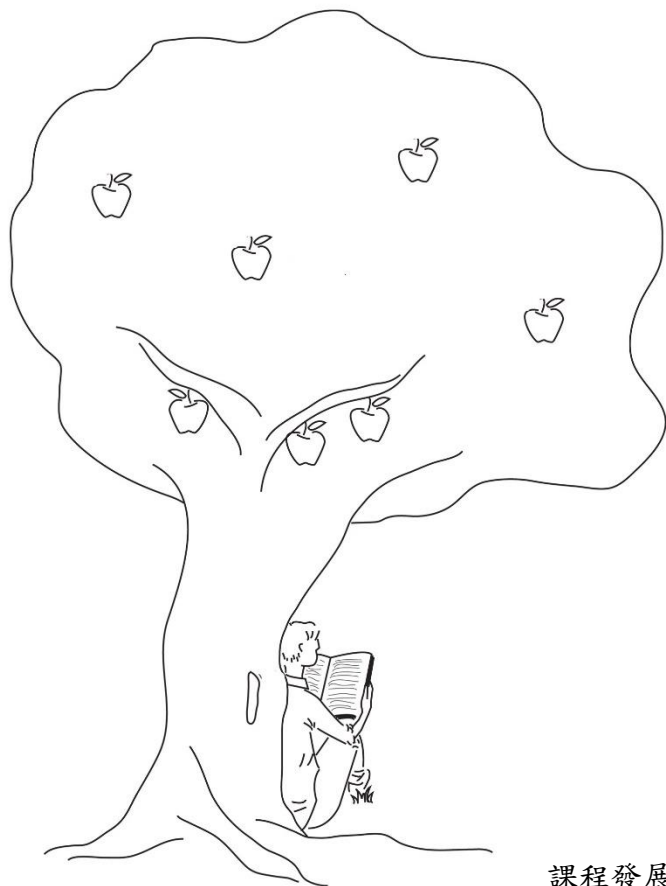


教育局
課程發展處數學教育組

數學百子櫃系列 (二十七)

排難解紛的數學——公平分配

作者 羅家豪、李翠珊



教育局
課程發展處數學教育組

©2021 本書版權屬香港特別行政區政府教育局所有。本書任何部分之文字及圖片等，如未獲版權持有人之書面同意，不得用任何方式抄襲、節錄或翻印作商業用途，亦不得以任何方式透過互聯網發放。

ISBN 978-988-8581-08-5

目錄

	頁數
前言	i
作者簡介	ii
故事大綱	1
人物介紹	3
第一章：「難分難解」的紅豆糕	9
第二章：主婦之間的討價還價	21
第三章：史萊姆也來作祟	29
第四章：慶生真煩惱	43
第五章：虛擬世界下的合作共贏	53
第六章：誰是最佳拍檔	65
第七章：暫別	71
延伸問題參考答案	73
參考書目及網頁	89

前言

為配合香港數學教育的發展，並向教師提供更多的參考資料，課程發展處數學教育組於 2007 年開始邀請大學學者及資深教師撰寫專文，以及蒐集和整理講座資料，輯錄成《數學百子櫃系列》。本書《排難解紛的數學——公平分配》是這個系列的第二十七冊，作者為香港大學數學系羅家豪博士及本科生李翠珊小姐。本書以故事方式介紹數學系學生曉凝，在爺爺奶奶所居住的村落暫住期間，運用數學一一解決公平分配的問題。每章結尾附有「延伸問題」，供有興趣的讀者進一步探索和研究。所有「延伸問題」的詳細解答可以在本書末段中找到。本書內容深入淺出，不僅可供教師參閱，亦可作為學生讀物。此外，本書內容只屬作者個人觀點，並不代表教育局的意見。

本系列叢書得以順利出版，實在是各方教育工作者共同努力的成果。在此，謹向各位學者、教師，以及所有為本叢書勞心勞力的朋友，致以衷心的感謝。

如有任何意見或建議，歡迎致函：

香港九龍油麻地彌敦道 405 號九龍政府合署 4 樓

教育局課程發展處

總課程發展主任（數學）收

（傳真：3426 9265 電郵：ccdoma@edb.gov.hk）

教育局課程發展處

數學教育組

作者簡介

羅家豪，畢業於香港大學數學系，曾任香港浸會大學數學系講師，現為香港大學數學系講師，分別曾任教「Mathematics of Fairness」和「Game Theory and Strategy」兩門課程，亦曾於不同場合演講，與學生及老師分享數學在日常生活中的應用。本書即從上述兩門課程和幾次相關演講的部份內容結集改編而成。羅博士為國際數學奧林匹克(IMO) 香港委員會成員，早年曾與教育局數學教育組合作出版通訊雜誌《數聞》，介紹香港主辦 2016 年 IMO 的點滴。羅博士從小熱愛解數學難題，曾於中學時期代表香港參加 IMO，亦鍾情於著重思考和策略的遊戲，現時主要消閒活動為打橋牌。

李翠珊，畢業於保良局百周年李兆忠紀念中學，現為香港大學四年級學生，主修數學和運算與數據分析(Computing and Data Analytics)，曾擔任數學系學生助教。愛動腦筋，在大學期間始學習編寫程式，對編程愛不釋手。受到日本科普作家結城浩的著作《數學女孩》系列所啟發，渴望以寫作故事的方式分享數學的魅力。

故事大綱

修讀數學系的曉凝在爺爺奶奶所居住的村落暫住期間，引領她的親友由生活瑣事進行一些有關公平分配的數學討論，過程激烈而有趣……

第一章：「難分難解」的紅豆糕

曉凝抵達村落，並帶來了奶奶喜歡吃的椰汁紅豆糕。奶奶留了部分，打算把剩餘的部分給同樣居於村內的孫兒。爺爺建議均分，奶奶則提出以糕點作為昨天孫兒來幫忙打掃的獎勵。曉凝到叔叔家分糕點時，弟妹對分配結果提出各種疑問，引起一場激烈的討論。本章將介紹一些分攤相同而不可分割物品的方法。

第二章：主婦之間的討價還價

曉凝前往拜訪姑姑家時，姑姑和住在附近的方太、楊太正為剛才合租計程車的車資分配和購物時贈送的福袋而理論不斷。曉凝以其數學知識對兩個分配問題提供了解決方案。本章旨在介紹分攤（一）相同而可分割物品及（二）種類複雜而不可分割物品的方法。

第三章：史萊姆也來作祟

第二天早上，曉凝和家人前往遠足和喝茶。結束後，弟妹們偶然看到在商店窗櫺內的史萊姆，最終嬌嬌買了一些給他們玩。回家後，弟妹們為分配史萊姆而起了爭執。曉凝利用所學，公平地進行分配，平息了紛爭。本章會介紹分攤種類複雜而可以分割物品的方法。

第四章：慶生真煩惱

吃晚餐的時候，叔叔說起自己最近在新公司和同事慶祝生日科款的問題。叔叔認為自己一年下來平均比其他同事要付更多費用，覺得不公平，一家人因而討論了一番。本章會介紹能讓該月壽星付較少而全年累積計每人皆付同等費用的分攤方法。

第五章：虛擬世界下的合作共贏

翌日，曉凝和弟妹們在出外用餐期間一起玩電子遊戲。共同參與一場對戰後，他們在分配所獲獎勵時遇到困難。曉凝為他們講解一個論功行賞的方法，他們按照該方法進行分配，得出一個令眾人皆滿意之結果。本章將提出在合作遊戲中按貢獻分配收益的方法。

第六章：誰是最佳拍檔

餐後，曉凝接到爺爺的電話。原來村民大會上參與修樹工程的村民正進行討論，商討如何配對負責檢查樹木與負責攀樹修枝的隊員，會議僵持不下，想請曉凝幫忙。於是，曉凝前往村公所，為村民介紹一個能確保配對穩定的演算法，並即時提供了一個令人滿意的配對方案，化解了一場紛爭。

第七章：暫別

曉凝要回家了，故事也就告一段落。

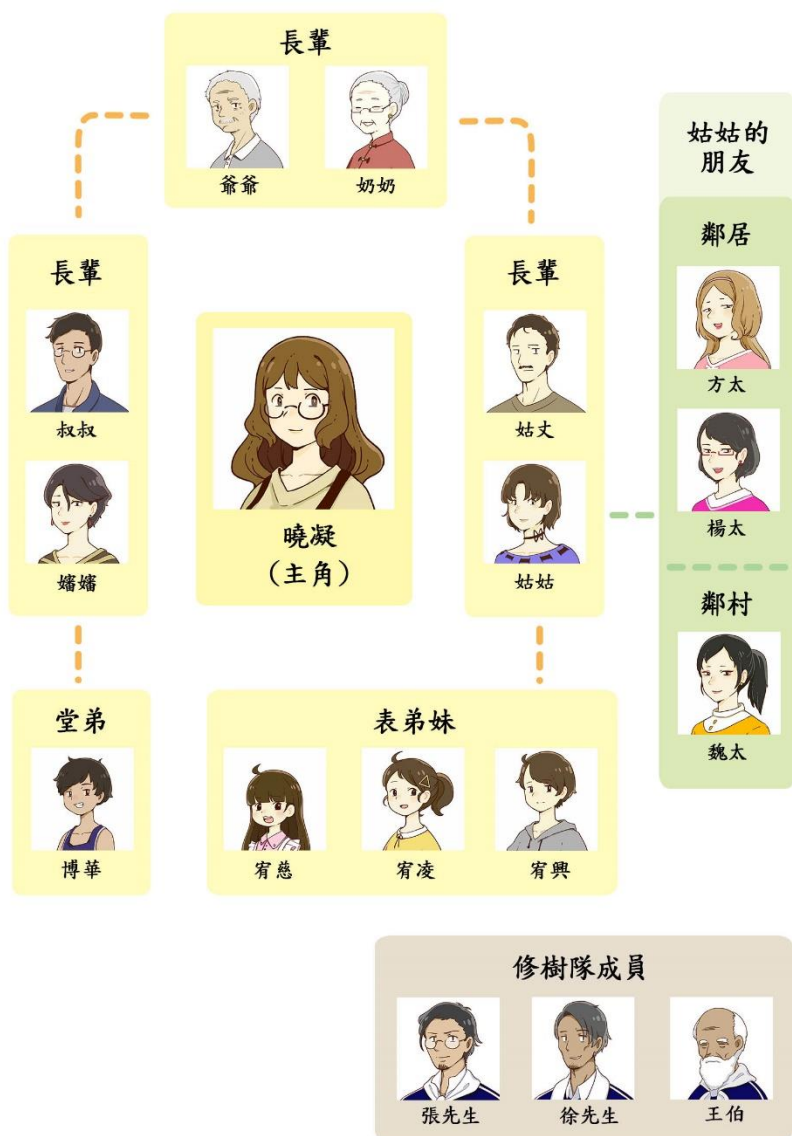
人物介紹

	曉凝 修讀數學系的大學生，一談起數學便滔滔不絕，喜歡與他人分享數學的趣味。趁暑假在爺爺奶奶家暫住數天。
	爺爺 曉凝的爺爺。雖然年長，但頭腦依然精明。在村內擔任村委會委員。
	奶奶 曉凝的奶奶。親切和藹，但從不溺愛孫兒，喜歡賞罰分明。
	叔叔 曉凝的叔叔，爺爺的次子，住在村口的房子。育有一個兒子，最近換了新工作。

	嬸嬸 叔叔的妻子，精打細算。
	博華 叔叔唯一的兒子，數學能力不錯。貪玩，是個典型的高小男生。
	姑姑 曉凝的姑姑，叔叔的妹妹，住在離爺爺家不遠的房子。育有三個孩子，是個家庭主婦。做事謹慎，亦是個有主見的人。
	姑丈 姑姑的丈夫，為人沉靜寡言。
	育興 姑姑家的長子，是個成熟的中學生，很會照顧身邊的人。

	宥凌 姑姑家的長女，宥興的妹妹，與博華同齡。 是個懂事的高小生。
	宥慈 姑姑家的幼女。雖然年紀最小，但很機靈。 嘴饞，不時會鬧別扭。
	方太 姑姑的鄰居朋友，是個隨和的人。
	楊太 姑姑的鄰居朋友，喜歡直話直說。
	魏太 姑姑鄰村的朋友。

	張先生 村內的修樹隊成員。
	徐先生 村內的修樹隊成員。
	王伯 村內的修樹隊成員。



第一章：「難分難解」的紅豆糕

正值暑假，念數學系的曉凝決定到爺爺奶奶家探望他們，順便住個數天。爺爺奶奶居住在靠山的村落，曉凝一大清早便乘車出發到村落去。

「曉凝！我的乖孫，個子長高了不少呢！」奶奶在村口等曉凝的到來，一碰面便笑逐顏開。「奶奶，我很想念您，最近身體好嗎？」兩奶孫一邊往村裡走一邊說笑，走着走着便到家了。

回到家後，爺爺正為曉凝整理房間。曉凝從背包裡取出了一盒甜點，說：「爺爺奶奶，最近我愛上了弄甜點，知道奶奶您愛吃椰汁紅豆糕，所以特意去學，您們嘗嘗吧！」盒裡盛着一個個心形的紅豆糕，奶奶還未吃，心裡已經甜滋滋了。「曉凝，你真乖，還知道奶奶的喜好呢！」爺爺從廚房拿來碟子和叉子，大家便吃了起來。

看着爺爺奶奶吃東西幸福的樣子，曉凝也很滿足。「真好吃！我們多留幾個，剩下的分給弟妹吃好嗎？」奶奶問道。曉凝自然是同意了，她特地預備此份量，就是想讓饞嘴的弟妹試試她的手藝。

於是，爺爺便提出把糕點均分給孫兒們。「你的叔叔有一個孩子，姑姑有三個。你數數這裡還有多少件？」曉凝一共帶了 24 件，剛吃了 3 件，奶奶留了 4 件。「還剩 17 件。」曉凝說。



「要是剩 16 件，那就可以均分了。」爺爺說。若有 16 件糕點可分的話，那 4 個孫兒每人可分 4 件。兩家人孩子數目比例為 1:3，按比例分糕點的話，叔叔家可獲分 $16 \times 1/(3+1) = 4$ 件糕點，以同樣的計算方法，姑姑家則可得 12 件。

「我們多留一件不是問題。不過，孫兒們昨天不是來了幫忙打掃嗎？我倒想按他們付出的時間來分配糕點，好好獎勵勤勞孝順的孩子。」奶奶說。

爺爺接着說：「好的。讓我想想……曉凝，你把這些數字記下來：宥興最乖，整整幫忙了 2 小時，宥凌和博華兩人則付出了 1 小時 30 分鐘，宥慈總是不肯來，只打掃了 30 分鐘。你幫忙算算他們各人該得到多少件，然後到叔叔家把糕點分給他們吧！」。

「沒問題！」曉凝很快完成計算，出發到了叔叔家。

「看看姐姐帶來了甚麼！」正在玩桌上遊戲的弟妹們都跑到門前迎接曉凝，看到那盒糕點後更是興奮不已。「爺爺奶奶告訴了我，你們昨天幫忙打掃了，這些糕點就是你們的獎勵。我按你們的服務時數計算了你們每人可得的件數：宥興 6 件，宥凌和博華有 5 件，宥慈 1 件。」

宥慈扁着嘴，問：「為甚麼我只有 1 件？」

「妹妹，這還不是因為你昨天只幹了半個小時？你早點來幫忙嘛！」宥凌對宥慈說。「不過曉凝表姐，你能告訴我們你是如何得出這個分攤結果嗎？」

「好！是這樣的。昨天宥興打掃了 2 小時，宥凌和博華則幫忙了 1.5 小時，連同宥慈的 0.5 小時，你們付出的總時數是 5.5 小時。因此，宥興所花時間佔總時數的 $2/5.5 \times 100\% \approx 36.36\%$ ，而宥凌和博華各佔約 27.27% ，宥慈則佔約 9.09% 。理論上，由於這裡有 17 件糕點，宥興應該得到 $17 \times 36.36\% \approx 6.182$ 件，宥凌和博華

可得 4.636 件，宥慈應得 1.545 件。不過，我不打算切割糕點了，免得影響糕點的外觀。」

	時間 (小時)	件數
	宥興 2	$17 \times \frac{2}{5.5} \approx 6.182$
	宥凌 1.5	$17 \times \frac{1.5}{5.5} \approx 4.636$
	博華 1.5	$17 \times \frac{1.5}{5.5} \approx 4.636$
	宥慈 0.5	$17 \times \frac{0.5}{5.5} \approx 1.545$
	共 5.5	

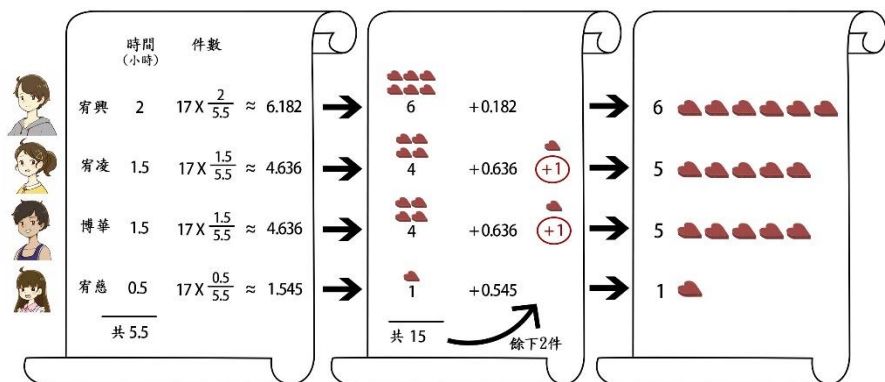
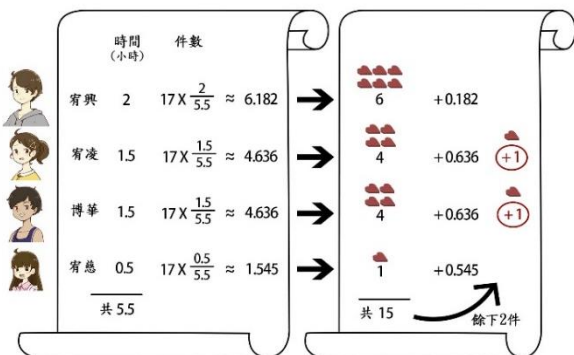
「既然我應得 1.545 件，那麼四捨五入下，我為甚麼不能得 2 件？」宥慈爭取說。

「如果採用四捨五入法，那麼宥凌和博華也應得 5 件，這樣的話，糕點便不夠分。所以，為避免這個問題，我們應改用下捨入法，即宥興、宥凌、博華和宥慈你們分別先獲分 6 件、4 件、4 件和 1 件。」

「那剩下的兩件呢？可以分給我嗎？」宥慈看着自己唯一的一件紅豆糕，再看看別人的，心裡很不是味兒。

「很抱歉，這兩件是你姐姐和博華表哥的。記得剛才的計算嗎？在糕點可被切割的情況下，他們倆應該得到 4.636 件，這個數字比起宥興的

6.182 件以及宥慈你的 1.545 件，小數部分較大。所以，宥凌和博華更應獲得餘下的糕點。」



「假如這裡只有 16 件呢？我在想，既然宥凌和博華所付出的時數是相同的，那麼現在少了一件，不就難以分配了嗎？」宥興能提出這個問題，說明他有認真在思考呢。

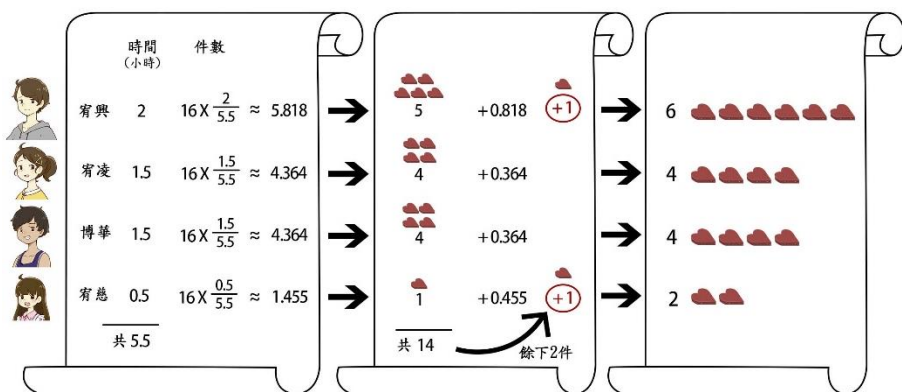
「你提出的問題不無道理，如果有兩個人付出完全相同時間，在分配餘下糕點的步驟上的確有可能出現糕點只剩一件但兩人皆應獲得這件糕點的情況。不過，今次這個問題並不存在。大家知道為甚麼嗎？」

「如果原本糕點只得 16 件，我們應從頭計算。不是嗎？」博華答道。曉凝點點頭說：「沒錯，那你計算看看吧。」

大家圍着博華看他計算，曉凝也從旁指導。

「上面所計算的各人付出時間佔總時數百分比並沒有改變，因此可以直接使用這些數字。所以，在糕點可被分割的情況下，宥興表哥應得 $16 \times 36.36\% \approx 5.818$ 件，我和宥凌應各得 4.364 件，而宥慈應得 1.455 件。這樣對嗎？」

「很好，博華。算得很快呢！」曉凝稱讚說。



「不過，怎麼看起來宥慈反而多了件糕點？」宥凌苦惱地說。「你們看，現在我哥先獲配 5 件，我和博華各 4 件，宥慈 1 件，即餘下 2 件。考慮小數部分的話，我哥和宥慈獲得最後兩件，因此宥慈在糕點總數減少的情況下，分得的糕點數目反而增加。這不合理吧！」

「我們現在使用的分攤方法叫漢彌爾頓法 (Hamilton method)。」這個分攤方法雖然簡易，卻有些缺點。就例如剛才這個情況，糕點總數減少，卻有人因此獲得更多糕點，這就是阿拉巴馬悖論 (Alabama

paradox)¹。」

此時，宥凌突然舉手。「有甚麼疑問嗎？」曉凝問。「不是，但我記得昨天我應該是打掃了 1 小時 32 分鐘。雖然只是 2 分鐘，但我很希望能多吃點表姐做的紅豆糕呢！再算一次可以嗎？」

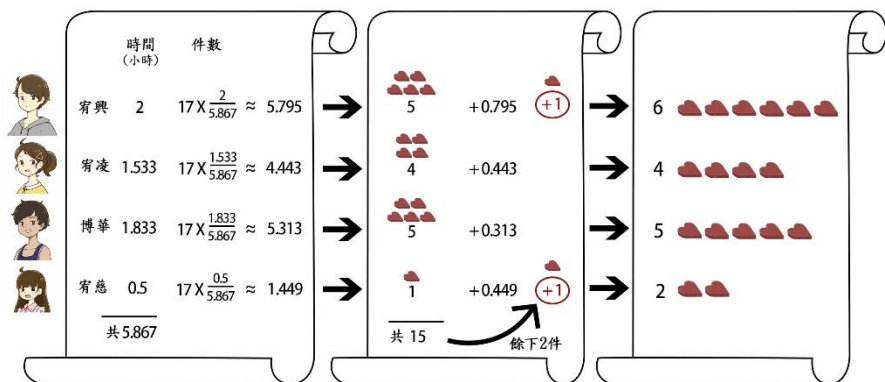
「其實我也打掃了 1 小時 50 分鐘。我昨天打掃到差不多的時候，奶奶吩咐我把舊衣物搬到回收站，可能爺爺奶奶忘記了……」博華跟着說。

「真的嗎？既然如此，我們再計算一次吧！今次誰要試試看呢？」

「我來吧。」宥慈在想，重新計算下，說不定自己可能可以獲得更多糕點。

「把姐姐和博華表哥的付出時間化為小時，兩人分別付出了 $(60+32)/60 \approx 1.533$ 小時及 $(60+50)/60 \approx 1.833$ 小時。因此，連同我的 0.5 小時和我哥的 2 小時，各人付出的總時數是 5.867 小時。現在糕點共 17 件，按照付出時間佔總時數的百分比計……理論上我應獲分 1.449 件，我姐姐應得 4.443 件，博華表哥 5.313 件，我哥哥 5.795 件。然後，我先取 1 件，姐姐 4 件，兩個哥哥各 5 件。剩下 2 件，我們來看小數部分……是我和我哥的！太好了，我有 2 件！」

¹ 1880 年美國人口普查後，國會在使用漢彌爾頓法決定各州份的眾議院議席數目時，發現了阿拉巴馬悖論。如果設立 299 個議席，那麼按人口比例，阿拉巴馬州會獲得 8 席，而如果設立 300 席，則阿拉巴馬州只會獲得 7 席。悖論因而得名。



「不是吧，我的服務時數增加了，而你的又沒有增加，怎麼這件原本屬於我的糕點變成你的？」宥凌不忿地對宥慈說。「曉凝姐姐，你來評理吧！」

「我們竟然果真遇到了這個情況。」曉凝亦覺得不可思議。「在糕點數目維持在 17 件的情況下，宥凌明明服務時間增加，但在博華服務時間同時增加下，宥凌獲得的糕點減少。這正是漢彌爾頓法的另一個紕漏——人口悖論 (population paradox)²。」

「竟然還有人口悖論這種東西！今次真的天助我也了哈哈……」宥慈的話把本來已經不高興的宥凌激得更加憤怒。曉凝勸宥慈別再說下去，但宥慈繼續說：「要是你不貪心，不提出修正時數，那麼你現在就不會只有 4 件啦。」宥凌無言以對，心裡很是鬱悶。

此時，宥興疑惑地問道：「我們真的能相信漢彌爾頓法嗎？畢竟我

² 人口悖論最早發現於 1900 年。當時，眾議院議席按人口比例重新分配予各州份。雖然弗吉尼亞州的人口在過去一段期間增幅比緬因州大，最終的分配結果中，原本屬於弗吉尼亞州的一席卻撥給了緬因州。

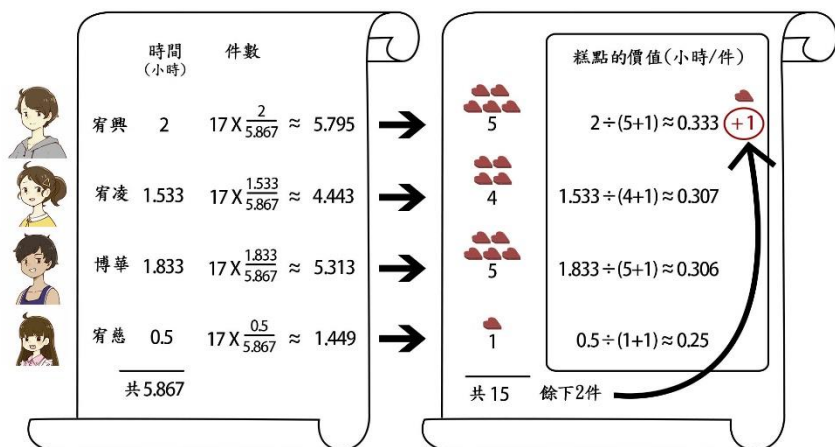
們在短短十分鐘內已經見識過它的兩個漏洞——阿拉巴馬悖論和人口悖論……」

「哥哥，你別問了，假如還有其他分攤方法的話，我可能就不會再有 2 件紅豆糕了。」不過，為了教好弟妹，曉凝還是得公平公正，好讓宥慈知道下次要乖乖幫爺爺奶奶的忙。

「漢彌爾頓法的確有其不足之處。不如我們也嘗試其他分攤方法，看看結果相不相同？」除了宥慈外，所有人都舉手贊成。曉凝便接着說：「讓我們試試傑斐森法 (Jefferson method)。剛剛宥慈計算了，如果 17 件糕點可被分割，宥慈應獲分 1.449 件，宥凌應得 4.443 件，博華應得 5.313 件，宥興應得 5.795 件。既然使用下捨入法分配後會剩下兩件，那麼我們可以思考，為誰加 1 件最值得。」

見弟妹們滿臉問號的樣子，曉凝續說：「如果認為多分 1 件給宥慈是對的，那麼糕點的價值就是 $0.5 \text{ 小時}/(1+1) \text{ 件} = 0.25 \text{ 小時/件}$ 。如果認為多分 1 件給宥凌是對的，那麼糕點的價值就是 $1.533 \text{ 小時}/(4+1) \text{ 件} \approx 0.307 \text{ 小時/件}$ 。同樣地計算，博華和宥興的這個數字是 0.306 和 0.333 小時/件。宥興的這數字最大，所以應該多分一件給他。」

「為甚麼是分給宥興表哥呢？」宥慈不解地問。



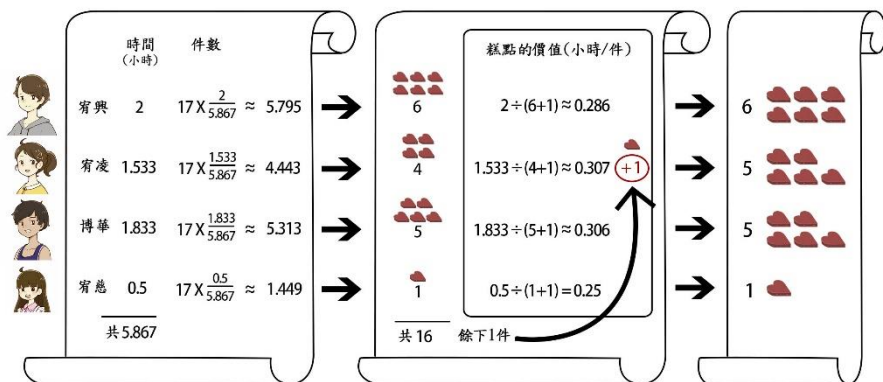
「宥興 0.333 小時/件這個數字代表他將以 0.333 小時換取每一件糕點。如果分給另一人，這人就將用少於 0.333 小時去換每一件糕點，那麼宥興就更有資格多換一件了。分給另一人對宥興不公平。明白了嗎？」

「嗯。接下來的最後一件也是用同樣方式分配嗎？」宥凌問。

「是的。現在只有宥興的件數有所改動，所以我們只須重算宥興的這個數字，即 2 小時/(6+1)件 ≈ 0.286 小時/件。這次宥凌的數字最大，因此她能得到最後一件。所以最後，宥慈得 1 件，宥凌得 5 件，博華得 5 件，宥興則得 6 件。」見這道題終於算完，曉凝也鬆了一口氣。

「我不要用這個方法，我不要。」看見宥慈極不情願的樣子，曉凝亦感到很無奈，畢竟沒有一個方法是完美、能完全公平的。

「曉凝表姐，我願意讓一件糕點給妹妹，我們採用漢彌爾頓法吧。」宥凌突然說。她的這句話簡直拯救了本來正苦惱如何處理這個局面的曉凝。曉凝大感驚訝：「宥凌，你真的很懂事呢！」



延伸問題

- 除了阿拉巴馬悖論和人口悖論，關於漢彌爾頓法還有一個叫「新區域悖論 (new district paradox)」。本題將探討何謂新區域悖論。

假如故事被改寫，宥凌和博華並沒有提出修改時數。而由於宥慈的朋友逸誠昨天來了幫忙 15 分鐘，奶奶希望也分些糕點給他。試運用漢彌爾頓法找出各人可獲得多少糕點？比較原本只分給四個弟妹的結果，你有甚麼發現？

- 漢彌爾頓法雖然牽涉多個悖論，但其優勝之處在於能滿足配額法則 (quota rule)，即最終獲分配的數量介乎於上捨入和下捨入數 (例如：若按比例應分得 4.636，則最終的分配數量必定是 4 或 5)。然而，傑斐森法則未能滿足配額法則。

1791 年，美國時任總統華盛頓決定採用傑斐森法來分配眾議院議席。在 1832 年，眾議院議席共 250 席，而各個州份的選民分佈如下：

州份	A	B	C	D	E	F	總計
人口 (以千計)	1646	6936	154	2091	685	988	12500

試以傑斐森法找出當時眾議院的議席分配。你能指出這個例子當中傑斐森法如何違反配額法則嗎？

第二章：主婦之間的討價還價

曉凝分完糕點後回到奶奶家。此時的奶奶正準備晚餐，忙得不可開交。奶奶告訴曉凝，姑姑買了她最喜歡的芒果回來，着曉凝到姑姑家去拿。於是曉凝放下食物盒後又出發了。

曉凝還未到達，離遠已經見到姑姑和兩位阿姨一起，看來是剛購物回來。曉凝向阿姨們打過招呼後，姑姑便對她說：「曉凝，你等我一下，我要先和方太、楊太分好買來的東西。」說完便打開家門，三人走進屋裡，曉凝也就跟了進去。

「對了，還要算一算計程車車資呢！」說話的是楊太，她把手中的購物袋放在茶几上，然後坐在沙發上。方太也跟着放下了購物袋，並從袋裡掏出了個紅色索繩袋。

「是福袋嗎？」曉凝好奇地問。

「嗯，剛剛在超級市場購物滿 1000 元送的。我們說好了要公平地分配，不過裡面的東西每種只有一件，分起來可能有點難度。」姑姑邊說邊把剛買的食材放進冰箱。

「別顧着忙自己的，快點過來吧。」楊太不耐煩地催促姑姑。不過也不能怪她，畢竟這個時候主婦們應該要開始做晚餐了。「好了好了！」姑姑把冰箱關上，走到客廳。

「先算車資吧。剛剛我們回程時碰巧遇到住鄰村的魏太，一起坐車回來，她比我們早約 3 公里下車。我們算好各人的車資後，改天我會問她取。」方太說。

姑姑拿出了手提電話，開啟了備忘錄程式。「這是剛才在車上記下的。你們看看。」



楊太想了想，便說：「按距離比例計算車資，你們說好嗎？」

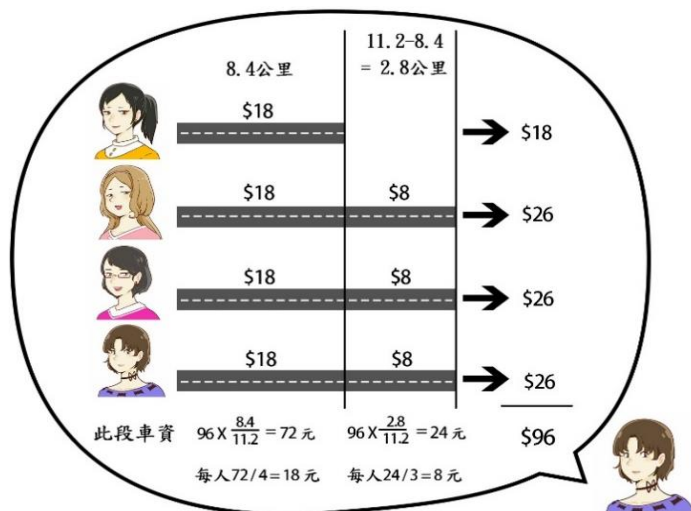
「這是甚麼意思？」方太表示不解。

「就是說，由於把所有人的乘車距離加起來是 $8.4+11.2\times 3=42$ 公里，所以魏太的『距離比例』是 $8.4/42=1/5$ ，而我們的則是 $11.2/42=4/15$ 。按這個比例分攤車資，魏太需付： $96\times 1/5=19.2$ 元，而我們就各付 $96\times 4/15=25.6$ 元。」

	乘車距離 (公里)	應付車資 (元)
	8.4	$96 \times \frac{8.4}{42} = 19.2$
	11.2	$96 \times \frac{11.2}{42} = 25.6$
	11.2	$96 \times \frac{11.2}{42} = 25.6$
	11.2	$96 \times \frac{11.2}{42} = 25.6$
	總計 42	總數 \$96



「是這樣嗎？」姑姑似乎有別的想法。「你們想想，畢竟魏太比我們早下車，首 8.4 公里應該由我們全部人平分車資，最後 2.8 公里則不應讓魏太也湊錢。因為首 8.4 公里的車資為： $96 \times 8.4 / 11.2 = 72$ 元，所以我認為魏太應付： $72 / 4 = 18$ 元。然後，我們三人平分餘下的，即我們每人要付： $(96 - 18) / 3 = 26$ 元。」



「是喔！雖然兩個方法所得出的車資分攤沒差多少，但第二個方法聽起來真的比較公平。」方太說道。



「對。用這個方法吧！」楊太也同意了，她和姑姑隨即拿出錢包，拿了車費給方太。

車資處理好了，是時候研究如何分攤福袋裡的東西了。姑姑從福袋裡取出了一個保溫瓶、一條絲巾、一瓶護手霜，還有一張小卡片，大概是張抽獎券吧。

「好！現在開始分配福袋物品。先和

你們說，我很喜歡這條絲巾，別跟我搶呀！」姑姑打算先下手為強，未料楊太不甘示弱，立即說道：「這可不行，這絲巾比較適合我呢！況且，如果你先選，豈不是對我們很不公平嗎？」方太這時亦點頭和議，說：「楊太說得沒錯，剛剛我們購物，大家買的金額一樣，因此福袋也應該平分。」

這個分配問題難度在於，不僅物品不可分割，價格各異，而且每件物品在不同人的心目中的價值也不同。如果分配結果讓某人認為另一人分得比自己更多，那麼就會產生嫉妒。

「曉凝，你有辦法嗎？」

聽到姑姑的話，曉凝從書桌上取了張紙，撕成三張。「我知道有個類似暗標的方法可以公平分配這些東西。你們先取張紙條，寫下你們認為各個物品值多少錢吧。記住要對自己誠實，不然吃虧的是自己啊！」

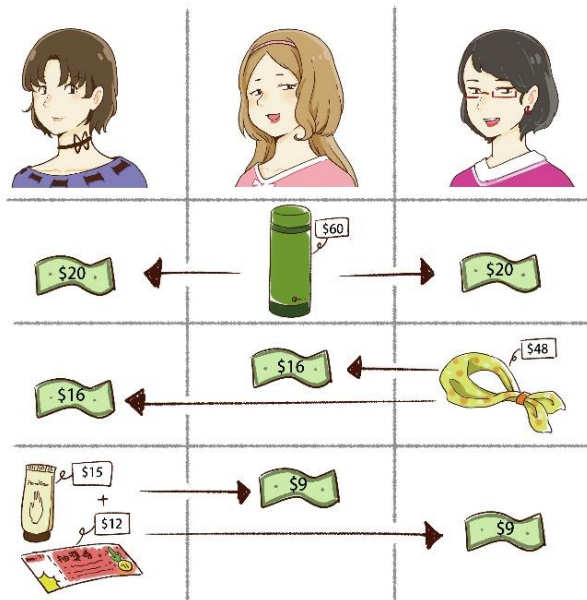
眾人頓時皺眉，猶豫了一下，仍按曉凝的說話去做。寫完後，曉凝把收集得來的紙條放在一起，開始計算。不過，此時姑姑和兩位太太對彼此的出價更感興趣，不禁議論起來。



「你不是說很喜歡這條絲巾嗎？出價這麼低！」楊太說出這番話，大概是後悔自己剛才把絲巾的價錢寫得太高了。「我是很喜歡它，但這種貨色怎麼能值錢 48 元？你這麼喜歡它，只好讓給你了。」楊太雖然生氣，但這是自己決定的價格，也只能認了。

「各位，讓我來講解分攤的方式吧。現在要把四件東西平均分給你們三人，原則上我們應該讓各人都獲得每件東西的 $\frac{1}{3}$ 。首先，出價最高者會獲得該物品。然後，由於獲得物品的那位理應只得到物品的 $\frac{1}{3}$ ，所以她要交出她出價的 $\frac{2}{3}$ 金額，由其餘兩人均分。」

「保溫瓶方面，由於方太的出價最高，保溫瓶由方太獲得。而方太需要交出她出價的 $\frac{2}{3}$ ，亦即 $60 \times \frac{2}{3} = 40$ 元。這 40 元將由楊太和姑姑平分，各得 20 元。絲巾呢，由楊太獲得，楊太需交出 $48 \times \frac{2}{3} = 32$ 元，姑姑和方太皆可得到 16 元。護手霜和抽獎券則屬姑姑，姑姑要交出 $(15+12) \times \frac{2}{3} = 18$ 元，方太和楊太各得 \$9。」



「這樣啊……即我們應得到甚麼，又或者要付多少？」姑姑問。

「先算方太的吧。方太將獲得保溫瓶，而她應付： $40-16-9=15$ 元。楊太則獲得絲巾，同時應付： $-20+32-9=3$ 元。姑姑得到護手霜和抽獎券，而應付： $-20-16+18=-18$ 元。這是個負數，代表姑姑應獲得 18 元。對了，從剛才方太和楊太應付 15 元和 3 元的資訊，其實也可得知姑姑應得 18 元。」

三位首先是對曉凝提出的方案嘖嘖稱奇。但姑姑很快便回過神來，問：「怎麼我除了得到兩件東西外，還有 18 元能拿？曉凝，你確定這個分配是公平的？」

「是公平的。來看看你們三位各得甚麼吧。姑姑，你得到護手霜和抽獎券，在你的角度而言，這些東西合共值 27 元。再加上現金 18 元，你總共得到價值 45 元的東西。」

「那我呢？」方太問。

「也是 45 元。你得到了在你角度而言值 60 元的保溫瓶，而你需交 15 元出來，所以你淨得價值 45 元的東西。」

「真的呢！我得到的絲巾在我角度來看值 48 元，而我則需交出 3 元。」楊太說。

眾人都感到很滿意。於是，福袋問題亦搞定了。把東西分好後，姑姑和曉凝送走了方太和楊太。

回到家後，姑姑還在想剛才福袋的事。「楊太怎麼會認為那條絲巾值 48 元？在我來看，她吃虧了呢！只拿了 35 元的絲巾，還要交 3 元出來，她豈不是只獲得價值 32 元的東西？方太也是，她的保溫瓶不值 60 元吧。我看只值 50 元，加上要交 15 元出來，也只獲得 35 元的東西。而我就聰明了，取得 45 元的東西。」

「其實，方太和楊太一樣會這樣想的。她們一樣會認為，你得到的護手霜和抽獎券不值這麼多，回去也會取笑你呢！」姑姑回頭瞪眼看着曉凝。曉凝連忙說：「別生氣，說笑而已。」

「不過說真的，這個分配方式很不錯呢，起碼能讓我們都覺得自己比對方取得更多，從而避免嫉妒。曉凝，你真的是我們的救星呢！」

延伸問題

1. 姑姑和方太、楊太早前合租了賣物會的一個攤檔，擺賣各自的手工藝，7 天租金合共 3360 元。姑姑 7 天都在擺賣，方太只用了前 5 天，楊太則只在最後 4 天使用。那麼，每人應分擔多少租金？
2. 曉凝在故事中的福袋問題中介紹的是克納斯特繼承程序 (Knaster inheritance procedure)。當時她曾提醒主婦們在入標時要對自己誠實。本題將探討誠實與否和最終收益的關係。

故事中，姑姑誠實地寫下了她心目中每件物品的價值。讓我們來看看不誠實地出價所產生的影響。

- (a) 假如姑姑下調保溫瓶的出價，姑姑的收益會否改變？上調出價又如何？收益會增加還是減少？
- (b) 參考題(a)，探討姑姑修改護手霜出價對她收益的影響。
- (c) 假如你是故事中的楊太，你只希望得到那條絲巾，而你不小心偷看了姑姑和方太的紙條。為了增加自己的利益，你會採取甚麼策略？

第三章：史萊姆也來作祟

曉凝終究完成了奶奶的委托，捧着姑姑的芒果回奶奶家，芒果散發的果香令她巴不得立即吃一大口。晚餐後，曉凝和爺爺奶奶邊看電視邊吃着芒果。爺爺告訴曉凝他們明天早上會去附近登山，叔叔孀孀和孩子們也會來，問曉凝要不要來。曉凝想到要是留在家裡也沒事做，所以就答應了。由於明天要早起，曉凝很早便休息了。

翌日天一亮，曉凝便醒了。爺爺和奶奶早已起床，正準備待會登山的裝備和糧食。曉凝很久沒有遠足了，看到窗外陽光明媚，心裡更是期待。出門後，他們和叔叔孀孀、弟妹們會合，然後出發了。

這次登山的起點在隔壁的村子，走到起點不消十分鐘。行山徑沿途綠樹成蔭，清風迎面吹來，令人精神抖擻。好奇心強的宥興總是能觀察到一些有趣的事物，像是不起眼的蜘蛛、形狀特殊的石頭、樹木等，讓大家有了不少討論話題，熱鬧得很。

到達觀景台後，大家終於能稍作休息，在涼亭下吃點零食。從山上眺望，碧綠的湖泊上散落着翠綠的島嶼，實在令人心曠神怡。當大人們正在享受美景之際，宥慈突然問甚麼時候才可以離開，博華隨即附和。叔叔對他們說再等一會，兩人自然是不願意，哭鬧起來。雖然掃興，但大人們也只好決定提早回程。

下山後已經是中午時分了，曉凝一家到酒樓吃點心。餐後一家人準備回家，但他們途中經過一家小店，櫥窗擺放了各類流行商品，其中一盒盒的史萊姆吸引了宥凌的目光。「宥慈、博華你們看！這款是不是很漂亮？閃閃發光的。」宥慈和博華湊上去看，三人開始談起自己和朋友們擁有的史萊姆有多特別。大人們走了一會，才發現孩子們沒有跟上，連忙回頭着孩子們跟着大人回家。三個孩子你一言我一語，說服大人們

這個玩意在他們朋輩間是多麼流行、何等非買不可。最後，嬌嬌雖然不明白這個玩意到底有甚麼吸引之處，但見博華實在很喜歡這個玩意，適逢買三送一優惠，決定讓他們挑四盒。宥興表示自己已經不再玩這個玩意，於是那三個小鬼便開始竊竊私語地商量要選哪些款式。他們秘密地商議，或許他們認為這裡只有他們三人才能真正進入史萊姆的世界吧。不過，興奮的他們越談越大聲，秘密都要公開了呢！最後，他們選的四個款式名叫「彩虹棉花糖」、「朱古力馬卡龍」、「藍色海洋」和「閃耀夜光」。結賬後，一家人便高高興興回家了。



回家途中，宥凌、宥慈和博華已經在討論如何分攤史萊姆。他們計劃先把每盒的三分之一取出來一起玩，餘下的平均分攤，這樣他們各自回校時可以向同學們炫耀。他們請求大人們批准讓他們這個下午聚在一起玩，大人們同意了。於是，一家人便回到奶奶家。

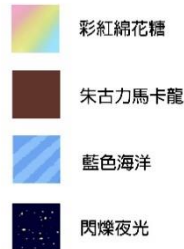
到家後，三個小鬼已急不及待要玩史萊姆了。宥興對此並不感興趣，唯有獨自坐在沙發上打電子遊戲。

「我們先把每盒的三分之一取出來吧。宥慈，你去找奶奶借磅秤吧。」博華吩咐說。真想不到這些孩子年齡輕輕，做起事來竟如此認真。



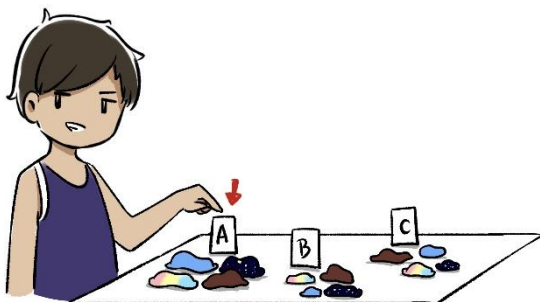
宥慈拿了包了保鮮膜的磅秤回來，這下不用擔心他們把磅秤弄髒了。此時宥凌和博華已經把史萊姆盒子都打開了，宥慈目不轉睛地看着那盒色彩繽紛、軟綿綿的「彩虹棉花糖」，饞嘴的她可能真忘了它是不能吃的玩具吧。「好了，宥慈！你的臉快要貼上去了！」宥凌語畢，大家哄堂大笑。

每盒史萊姆淨重 150 克，他們三個順利從每盒取出 50 克，放到一旁待一會玩。之後，他們決定先分攤好其餘的史萊姆再一起玩。不過，他們迅即陷入苦思。



「逐個款式平分嗎？」「把四種史萊姆都平分處理似乎不是一個好選擇，因為我們喜歡的款式都不一樣。」「是的沒錯。但同時我亦希望每款都拿一點呢！」「這很難吧，要滿足這麼多要求。」

「讓我來試試吧。」博華花了一點時間，把四種史萊姆分成三組，每組所含的比例不一。「這三組的價值在我看來都是整體的三分之一，很不錯吧。那我就選這份，你們也各選一份就對了。」



「哪有這樣的！又負責分割，分好了自己又先選，還搶了最多的。」
宥慈幾乎哭了，眼泛淚光，曉凝不忍心看着她如此難過，便走過去和他們三個談談。

「博華，你已經負責分割史萊姆，應該先讓宥凌和宥慈先選，最後剩下的就屬於你，這樣才公平。」

「對嘛，要不然你自己拿大部分，剩丁點兒給我們怎麼辦？」宥慈拭着淚說。

「在開始分配之前，我們先學習如何進行基本分配吧。」曉凝手上已經準備了水果啫喱杯和一個小碗作為道具，她開啟包裝，接着說：「宥凌，假設我和你要平分水果啫喱杯，可是裡面不同位置有不同水果，我們喜歡的水果又可能不同，那麼要如何分配才公平呢？」

「如果我把所有好吃的水果留給自己，那麼對表姐來說並不公平。如果表姐你來分的話，我可能又會不滿意。」宥凌喃喃自語。

「我來幫你們分，分完後你們各自取一份不就可以了嗎？」博華說。

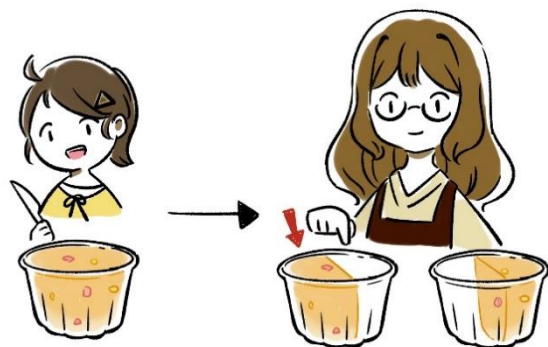
「你別搗亂，這個方法怎麼可能行得通？萬一兩個人選同一份，那麼他們打起來怎麼辦？」宥慈說。

「宥慈很厲害啊，能馬上想到反對的理據。」曉凝笑說。「不如我來

告訴你們一個好辦法吧。只要有凌把水果啫喱杯分成兩份，然後由我來先選一份便可以了。」

「這麼簡單我怎麼想不到！但是，這樣真的可以嗎？」宥凌問。

「你們想想，如果有凌把啫喱杯分成兩份，她會怎樣分？會不會分成一份大、一份小的？」



「不會，否則姐姐你可能會選這份大的，那麼宥凌就會吃虧。」

「博華說得對。你剛剛的用字很準確，我『可能』會選這份大的，但我不一定會這樣做，而且宥凌認為較大的那份，對我而言未必是較大的，因為有可能這份並沒有包含我非吃不可的水果。」

「所以說，宥凌會按自己的價值觀把啫喱杯分成兩半，然後曉凝姐姐來選。這樣一來，姐姐有可能選到在自己眼內超過整一半的份量啊，我說得對嗎？」博華猶豫地說。

「是這樣沒錯。而宥凌如果真的按自己的價值觀把啫喱杯均分，則她只會得到整體的一半。所以其實當分割者也不太划算，最好抽籤決定這個角色分配，這樣更為公平。」

曉凝稍作停頓，隨即續說：「回到史萊姆的問題吧。博華，你現在確

定這個分法在你眼中是平均的嗎？」博華凝視着三組史萊姆，其餘兩組的價值均遠低於自己選的那組，萬一最後自己想要的那組被其他人先取掉，自己就會有損失。但現時再調整的話，則表示剛才他真的太貪心了。他感到很為難，不過為了避免損失，他還是決定作出調整，把每組價值調至整體的三分之一。

重新分好三組史萊姆後，曉凝指揮說：「現在，請宥凌和宥慈各自寫下這三組在你心目中佔整體的百分比吧。我們會試用『單一分配者方法 (lone-divider method)』來分配。」

宥凌和宥慈仔細檢視三組史萊姆。雖然 C 組合起來最重，但它的主要成分是不怎麼討喜的「朱古力馬卡龍」。他們被這款史萊姆的噱頭給騙了，裡面的史萊姆竟然呈稀爛的泥漿色，看起來有點噁心。最後，宥凌和宥慈寫好了自己的意願交給曉凝。

過了一會，曉凝開始說：「讓我公佈分配結果吧。我們會假設博華認為三組對他而言價值相等，即均至少等於整體的三分之一。對宥凌而言，A 組和 B 組均達到或超過整體的三分之一。而宥慈呢，只有 A 組能夠接受。所以，A 組由宥慈得到，B 組由宥凌獲得，而剩餘的 C 組則屬於博華。」

宥凌		宥慈		博華	
A	40%	A	45%	A	33.3%
B	35%	B	30%	B	33.3%
C	25%	C	25%	C	33.3%

宥凌隨即表達不滿：「A 組由宥慈得到，但在我眼中價值比我獲得的 B 組高啊！在我看來，宥慈拿到的比我多 5%。我豈不是吃虧了？」

「作為分割者的我也不划算呀！為了自己最後取得不少於三分之

一，我唯有把每組都安排成相等價值。如此一來，我肯定只能獲得總價值的三分之一。你們至少還有能獲得超過三分之一的機會，不是嗎？」博華說。

「博華，你說得沒錯，然而在這個方法下，此問題恐怕難以避免，皆因你們之間必須要有一人負責分割的部分，下次唯有抽籤決定吧。而剛才宥凌亦準確提出了單一分配者方法的問題。雖然這個方法能保障各人均取得自己眼中的最少三分之一，但並不能避免嫉妒，即認為另一人分得比自己多的情況。不過，我還知道一個可以避免此問題的方法，你們想學嗎？」

看着三個小鬼期待的眼神，曉凝接着說：「我要介紹的方法名為『塞爾弗里奇—康威分配程序 (Selfridge-Conway procedure)³』，這個方法共有兩個階段。首先，我們先抽籤決定你們三個的角色吧。」

抽籤完成，宥凌抽到 1 號牌，博華 2 號，宥慈 3 號。

「第一階段中，宥凌先來把全部史萊姆分成自己心目中的三等份吧。記得剛才的啫喱杯問題嗎？別忘了要對自己誠實啊，否則可能會吃虧的喔！」曉凝再三提醒。

「弄好了。」宥凌說。

「好的，然後博華來評估這三份史萊姆的價值。要是你認為當中價值最高與價值第二高的有相等價值，那就從宥慈開始選一份，然後到博華選，最後宥凌取剩下的一份。這樣便完成分配。」

「不，我不這麼認為。」博華搖頭。「對我來說這份價值最高，那份價值次高。」

³ 塞爾弗里奇—康威分配程序只適用於三人分配，而直到現時為止，數學界還未得出一個能有效率處理異質 (heterogeneous) 資源分配予四人或以上、又可以避免嫉妒的方法。

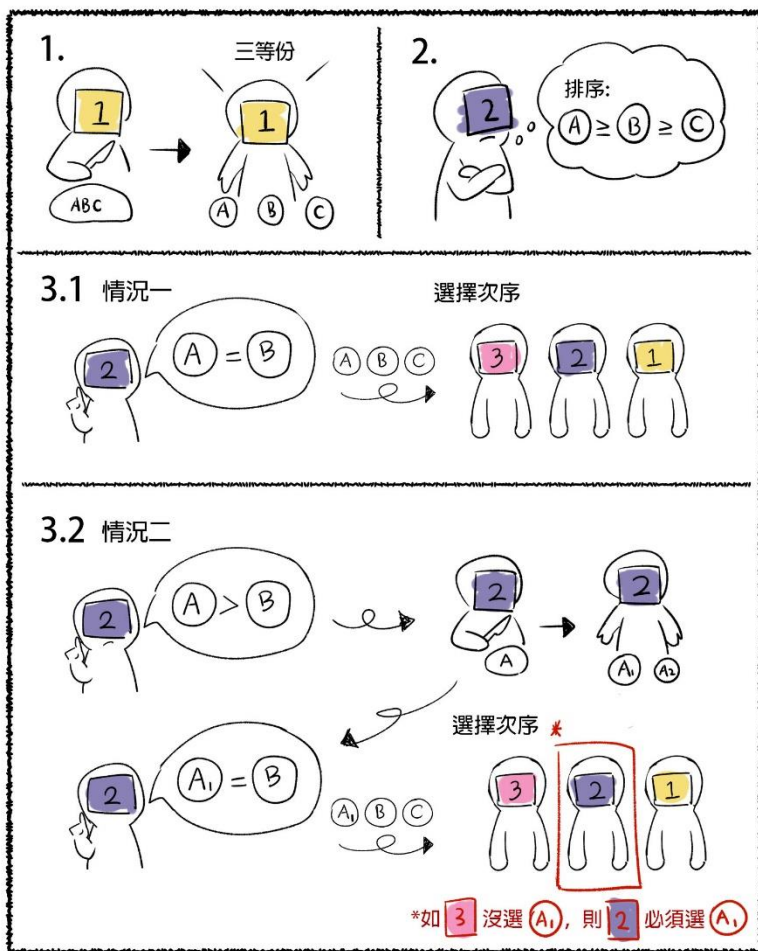
「好的。那請博華你來從價值最高的那份史萊姆移除一點，讓兩組的價值變得一樣高。移除的部分放在一旁即可，我們在第二階段會再處理它。」

「就這樣吧。完成了。」博華說。

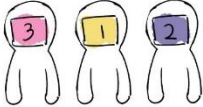
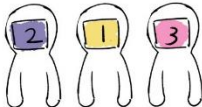
「好。現在宥慈選你認為最高價值的一份吧，然後到博華選，宥凌取剩下的一份。注意，如果宥慈沒有選那份被移除了一點的史萊姆，博華就必須選它，因為剛才是博華負責移除的，現在這份在博華眼裡與本來價值最高的並列第一。」

選完了，曉凝繼續指示：「下一階段，我們要處理餘下的部分。宥凌，你抽的是 1 號牌，這次你會是第二位揀選。宥慈，你剛選了被移去了一部分的那份史萊姆，所以你會是第一位揀選。而博華今次要負責分割餘下的史萊姆成三等份。當然，為了確保自己能取得當中的三分之一，你也應按自己的價值觀平分它。」

博華分好了，曉凝着宥慈先選，然後到宥凌，最後博華取最後一份。





4. 最後分配 A_2	如 $\boxed{3}$ 選了 A_1	如 $\boxed{2}$ 選了 A_1
負責把 A_2 切成三份:		
選擇這三份 的次序:		

整個程序終於完成了。不過，三個小鬼似乎不太滿意。

「曉凝姐姐，我們按你剛剛的指示進行分配，真的公平嗎？」博華一臉茫然地說。

不只是博華，其餘的孩子都在打量着自己獲得的那堆史萊姆，似乎都很懷疑自己有沒有吃虧。

「這個分配程序的確稍為複雜一點，但它的優點是能避免參與者之間互相妒忌。既然你們都對這個方法存有疑問，我們不妨換位思考，看看為甚麼這個方法不會產生妒忌，好嗎？」

弟妹們異口同聲地表示贊同，就連原本在打電動的宥興也湊了過來。「我剛有在聽，你們繼續討論便可以了。」

「宥慈！你來試試從你姐姐的角度思考，看看她會不會嫉妒你。」曉凝吩咐說。

「我嗎？我能夠做到嗎？」宥慈猶豫地說。

曉凝用堅定的眼神看着宥慈，告訴宥慈她可以的。宥慈鼓起勇氣，分析說：「我姐姐抽的是 1 號牌，在首階段負責平分史萊姆。這說明首階段的三份史萊姆在姐姐眼中價值相同。我在第一輪選的是被移去了一部分的那份史萊姆，連同在第二輪取得的那一小份，在姐姐眼中不足整體的三分之一，而姐姐在第一輪已經取得了價值整體三分之一的史萊姆了，所以不會妒忌我。」

「宥慈，你說得很好呢！」聽到曉凝的稱讚，宥慈心裡喜孜孜的。

「博華，輪到你了！來從宥凌的角度思考，看看她會不會妒忌你。」曉凝說道。

「好的，我試試。在宥凌的角度，我和她在首回合取得的同為整體的三分之一。在第二階段.....啊！我知道了。因為我在第二階段負責分割，宥凌選完了，我才拿剩下的一份，所以我拿到的那份在她眼中不及她選的，或者兩份有同等價值。換言之，宥凌不會妒忌我。」

「都分析得不錯呢！」

這時，廚房傳來了奶奶的聲音。「曉凝，你可以過來幫忙嗎？」於是曉凝着弟妹繼續討論，然後進廚房幫忙了。

延伸問題

1. 故事中，有關塞爾弗里奇—康威分配程序不會產生嫉妒的證明尚未完成。你能從博華和宥慈的角度分析為何他們皆不會妒忌另外兩人嗎？
2. 在塞爾弗里奇—康威分配程序中，假如博華在首階段認為宥凌平分後三份當中價值最高與價值第二高的有相等價值，便順序由宥慈、博華、宥凌進行揀選即可。試證明這個程序所產生的分配結果不會引致嫉妒。
3. 故事中介紹的第一個史萊姆分配方法為「單一分配者方法」，由一人進行分割，其餘的人依意願選取。此方法適用於多人分配，然而如博華指出，這個方法對負責切割的人不公平。本題將探討一個可以解決此問題的方法——「最後削減者方法 (last diminisher method)」。

當有 n 個人進行分配時，他們圍成一圈，其中一人從全部史萊姆中取出一個他認為值當中的 $1/n$ 的份量，然後把這份史萊姆向左傳。這個切割者暫時是這輪的最後削減者。隨後，如果有人認為這份史萊姆的價值超過 $1/n$ ，就移除部分令這份的價值減至 $1/n$ ，而這人就成為新的最後削減者；否則就直接把史萊姆向左傳。最後，當這份史萊姆再次到達最後削減者的手上，這位最後削減者就確定帶着這份史萊姆離場。然後，剩下的史萊姆將以同樣方式分給餘下的 $(n-1)$ 人。直到 $n=2$ ，則改用一人分割、另一人選取的方法。

- (a) 這個方法能讓每個人都認為自己至少得到整體的 $1/n$ 嗎？有人能取得超過自己認為的 $1/n$ 嗎？比較「單一分配者方法」和「最後削減者方法」，你認為何者較公平？為甚麼？

- (b) 試舉一個 3 人分配的例子來說明「最後削減者方法」不能避免嫉妒。

第四章：慶生真煩惱

轉眼間已是傍晚時分，廚房傳來了陣陣飯香。在玩耍的孩子們都嚷着餓了，奶奶吩咐他們幫忙端飯菜，他們自然不敢怠慢。一家人都到齊了，大家便一起開動。

電視正在播放最近熱播的連續劇。這齣戲是關於一個新上任的年輕企業總裁面對公司嚴重的內鬥問題，透過對公司上下的仔細調查，對公司的人事關係抽絲剝繭，重整企業架構，成功扭轉局面。而今集講述總裁發現了有些職員仗着自己年資高而霸凌新同事，到處說他們壞話，更經常要求他們請客。

此時，叔叔突然拍了一下桌子，大家都嚇了一跳。

「怎麼了？」爺爺問。

「啊！對不起。剛看到盛希被無理要求請客，實在感到憤憤不平。孩子們，對不起，讓你們受驚了。」見宥慈驚魂未定似的，叔叔連忙安撫她。

「是在新公司發生了甚麼事嗎？」奶奶問道。原來叔叔早一陣子打算轉換工作環境，因此換了新公司工作。

「是有一點事，不過不是甚麼大事。吃完飯再跟你們說吧。」

飯後，姑姑為大家準備了水果，孩子們圍坐地上邊玩紙牌遊戲邊吃水果，大人們則開始聽着叔叔的經歷。

「我不是剛進了新公司嗎？把我也算進去的話，我的部門共有九個同事。剛進去，裡面年資最高的大哥便跟我說他們部門慶祝生日的做法。他們訂的規則雖然不算是欺負我這個新人，但的確對我不利。」

「怎麼說？」姑姑問。

「妹，遞一下你旁邊的紙筆。」叔叔對姑姑說。



拿到紙筆後，叔叔在紙上畫了個表格。「你們看，九個同事當中，有五個在三月生日，有三個是十一月生日的，只有我在九月生日。在那三個月，每月均有一次生日聚餐，而每頓聚餐都會到某個特定的餐廳點一個價值 1080 元的慶生套餐。他們的規定是該月的壽星不用付款，其餘各人要平均分攤該 1080 元。這個規則對我非常不公平呀！我算給你們看。」語畢便開始填寫那個表格。

(單位：元)	A	B	C	D	E	叔叔	F	G	H	月計總金額
三月	0	0	0	0	0	270	270	270	270	1080
九月	135	135	135	135	135	0	135	135	135	1080
十一月	180	180	180	180	180	180	0	0	0	1080
年計個人金額	315	315	315	315	315	450	405	405	405	3240

「計算方法簡易，只需要把 1080 元除以該月非壽星者數目，便得出非壽星者需付金額，壽星則免費。」叔叔取了一片蘋果，狠狠地咬了一口。「以年計，我要付 450 元，其他人都付得比我少。你們說，是不是很不公平？」

「是呀！你的同事們希望壽星可以少付，這我可以理解，但總得想出一個較公平的方法，讓大家的年計個人金額都一致吧。」嬌嬌說。

「哥！拜託你別斤斤計較啦，一年也只不過多花約一百元而已。」姑姑嘲笑說。

「話可不能這樣說。要是我在這公司待上十年或者更久，我可虧大了！」叔叔認真地說。

「我們公司同事也有類似的生日慶祝活動，不過分攤的規則不同。」姑丈說。「要不要試試看我們的方案，看看能不能公平分攤費用？」

「是怎樣的規則呢？」爺爺問。

「我們看看三月的吧，三月有五位壽星。每位壽星需為其餘四位壽星祝壽，其餘的四位同事則要為五位壽星祝壽。於是每位壽星需付 $4y$ 元，而其餘的同事需付 $5y$ 元。由於聚餐費用為 1080 元，因此我們能寫下這道方程： $5 \times 4y + 4 \times 5y = 1080$ 。解方程後可知 $y = 27$ 。所以在三月的聚會中，該月壽星應付： $4 \times 27 = 108$ 元，非壽星應付： $5 \times 27 = 135$ 元。」

「我明白了。讓我畫個新的表格計算結果。」叔叔很快便完成了計算。

(單位：元)	A	B	C	D	E	叔叔	F	G	H	月計總金額
三月	108	108	108	108	108	135	135	135	135	1080
九月	135	135	135	135	135	0	135	135	135	1080
十一月	135	135	135	135	135	135	90	90	90	1080
年計個人金額	378	378	378	378	378	270	360	360	360	3240

「原來這個方法也不行。那怎樣才行呢？」姑丈喃喃自語。

曉凝一直都專心聽着大人們的對話。姑丈提出的方案雖然未能達到要求，但卻啟發了她。

「乍聽姑丈你提的方案，我認為問題出於每頓飯費用相同，但當中的壽星數目不同。看這表格，你們有發現嗎？非壽星者固定要付 135 元，比平均要付的即 $1080/9 = 120$ 元為多，而且這個定額是當 8 個人攤分 1080 元時每人需付的金額，絕非巧合，因為該方程其實可以寫成『壽星數目 $\times$ (壽星數目 - 1) $\times y +$ (總人數 - 壽星數目) $\times$ 壽星數目 $\times y =$ 聚餐費用』，透過因式分解可知『壽星數目 $\times y \times$ (總人數 - 1) = 聚餐費用』，而非壽星者要為每位壽星祝壽，『壽星數目 $\times y$ 』正正是非壽星者需付金額，因此每位非壽星者需付金額必定為：壽星數目 $\times y =$ 聚餐費用 / (總人數 - 1) = $1080 / (9 - 1) = 1080 / 8 = 135$ 元。」

曉凝喝了口茶，續說：「另外，壽星皆付得比平均要付的 120 元為少。所以關鍵在於自己生日的月份壽星有多少個。壽星愈多，非壽星者則愈少，於是非壽星者的總貢獻金額會較少，導致壽星要付較多錢，使年計個人金額也較高。」

大人們仔細看了曉凝寫的算式。確定了大家明白後，曉凝續說：「我想到了個方案，你們要聽聽看嗎？」

「乖孫，說來聽聽，是個怎樣的方案？」奶奶興致勃勃地問。

「相對於剛才的方案，今次我們首先預算每人科款 120 元，但每位壽星應付的分別由其餘 8 人來平均攤分。以三月為例，由於有 5 位壽星，每位壽星要為其餘 4 位壽星祝壽，亦即要付： $4 \times 120 / 8 = 60$ 元。而非壽星者除了要付自己的 120 元外，還要分擔 5 位壽星的部分費用，因此應付： $120 + 5 \times 120 / 8 = 195$ 元。同樣地計算其他月份，我們可以得出這個表格。」

(單位：元)	A	B	C	D	E	叔叔	F	G	H	月計總金額
三月	60	60	60	60	60	195	195	195	195	1080
九月	135	135	135	135	135	0	135	135	135	1080
十一月	165	165	165	165	165	165	30	30	30	1080
年計個人金額	360	360	360	360	360	360	360	360	360	3240

「哇！曉凝很厲害啊！這個方法能確保每位同事在一年內能讓其他同事均分他的 120 元預算一次，所以就能讓每人的年計個人金額都相同。」奶奶讚歎。

「對呀！其實，在設計方案時，我們有一些假設，而這些假設均能夠以方程來表示。」

「先設 N 為總人數， S 元為每次慶祝費用。在叔叔的處境中， $N=9$ ，

$S=1080$ 。從剛才三個分攤方案中，你們可以觀察到每位同月壽星所付的金額是相同的，非壽星亦然。所以，我們可以先假設 a_i 元為 i 月壽星在 i 月份聚餐的需付費用， b_i 元為非 i 月壽星者在 i 月份聚餐的需付費用，同時設 n_i 為 i 月的壽星數目。在此情況， i 可以是 3、9 或 11，而 $n_3=5$ ， $n_9=1$ ， $n_{11}=3$ 。由於壽星和非壽星合起來需湊足聚餐費用，所以 $n_i a_i + (N - n_i) b_i = S$ 。已知壽星付得不比均分的情況多，即付得不多於 S/N 元，非壽星則付得不少於 S/N 元，因此我們可以假設 $a_i = S/N \times (1 - p)$ ， $b_i = S/N \times (1 + q)$ ，當中 p 和 q 皆為非負數。代入至方程可得： $n_i \times S/N \times (1 - p) + (N - n_i) \times S/N \times (1 + q) = S$ 。」

「為了探討 p 與 q 的關係，我會對這算式進行簡化，你們看看。」

$$\begin{array}{ll}
 n_i \times S/N \times (1 - p) + (N - n_i) \times S/N \times (1 + q) = S & \\
 \text{全式乘以 } N/S \Rightarrow & n_i(1 - p) + (N - n_i)(1 + q) = N \\
 \text{展開 L.H.S.} \Rightarrow & n_i - n_i p + N - n_i + Nq - n_i q = N \\
 \text{全式減去 } N \Rightarrow & -n_i p + Nq - n_i q = 0 \\
 \text{移項並抽公因式} \Rightarrow & n_i p = (N - n_i)q \\
 \text{移項} \Rightarrow & p : q = (N - n_i) : n_i
 \end{array}$$

「按照 p 和 q 之比例，我們可設 $p = k_i(N - n_i)$ 和 $q = k_i n_i$ ，當中 k_i 為非負實數。代入至 a_i 和 b_i 可得 $a_i = S/N \times [1 - k_i(N - n_i)]$ 及 $b_i = S/N \times (1 + k_i n_i)$ 。」

「我們希望每位同事全年需付總額相同。在三月生日的同事，三月需付 a_3 元，九月和十一月則分別需付 b_9 元和 b_{11} 元，因此全年總共要付 $(a_3 + b_9 + b_{11})$ 元。同樣地，九月生日的同事全年需付 $(b_3 + a_9 + b_{11})$ 元，十一月的需付 $(b_3 + b_9 + a_{11})$ 元。所以，我們應設 $a_3 + b_9 + b_{11} = b_3 + a_9 + b_{11} = b_3 + b_9 + a_{11}$ 。」

「由方程 $a_3 + b_9 + b_{11} = b_3 + a_9 + b_{11}$ ，我們可透過移項得到 $b_3 - a_3 = b_9 -$

a_9 。由方程 $b_3+a_9+b_{11}=b_3+b_9+a_{11}$ ，我們可得到 $b_9-a_9=b_{11}-a_{11}$ 。」

「現在來看看我們在上面得到有關 a_i 和 b_i 的表達式。由於 $a_i=S/N \times [1-k_i(N-n_i)]$ 、 $b_i=S/N \times (1+k_i n_i)$ ，可算得： $b_i-a_i=S/N \times (1+k_i n_i)-S/N \times [1-k_i(N-n_i)]=S/N \times [1+k_i n_i-1+k_i(N-n_i)]=S/N \times (k_i n_i+k_i N-k_i n_i)=Sk_i$ 。注意第二步進行了因式分解，第三步則進行了展開。因為 $b_3-a_3=b_9-a_9=b_{11}-a_{11}$ ，所以 $Sk_3=Sk_9=Sk_{11}$ ，這說明 $k_3=k_9=k_{11}$ 。我們劃一把它們寫成 k 。」

「代入 N 、 S 和 n_i 值，我們可以得到這個表格。」

(單位：元)	A、B、C、D、E	叔叔	F、G、H
三月	$a_3=120(1-4k)$	$b_3=120(1+5k)$	$b_3=120(1+5k)$
九月	$b_9=120(1+k)$	$a_9=120(1-8k)$	$b_9=120(1+k)$
十一月	$b_{11}=120(1+3k)$	$b_{11}=120(1+3k)$	$a_{11}=120(1-6k)$
年計個人金額	360	360	360

「那麼 k 等於多少？」嬭嬭問。

「無論 k 等於多少，分攤結果都能達到有關月計總金額和年計個人金額的兩個要求。而如果 $k=1/8$ ，就正正是剛才我提的那個方案。你們代入 $k=1/8$ 便會明白了。」

「而如果 k 等於其他數值，雖然仍能達到我們的要求，但卻不一定像當 $k=1/8$ 時具有實質含意。另外，若然代入 $k=0$ ，就會得到最沒趣味的方案，即壽星與非壽星者付同一價錢。」

「還有，如果我們不希望 a_i 當中有負數，即壽星不但不用付錢還能獲得現金作為生日禮物的話，有三道不等式需要成立： $120(1-4k) \geq 0$ 、 $120(1-8k) \geq 0$ 和 $120(1-6k) \geq 0$ 。從不等式 $120(1-4k) \geq 0$ ，我們可得 $1-4k \geq 0$ ，所以 $4k \leq 1$ ，即 $k \leq 1/4$ 。以同樣的方式計算可知 $k \leq 1/8$ 和 k

$\leq 1/6$ 也要成立。因此， k 不能大於 $1/8$ 。」

「真想不到看似簡單無聊的一個生活問題可以引發一場豐富的數學探究！雖然我回到公司未必真的可以說服我們的同事改用這個分攤方案，但我真的學到很多呢！」叔叔說。

「曉凝，你真棒！」聽到大家的讚賞，曉凝害羞得漲紅了臉。

延伸問題

1. 故事中，叔叔的公司部門同事以生日聚餐的形式慶生。另一種常見的慶生方式是在同事的生日月份湊錢為他送生日禮物。本題將探討應如何分攤送禮費用。

現假設叔叔與同事決定改以送禮形式互相慶祝生日，每位同事在自己的生日月份均能得到一份價值 180 元的禮物。

- (a) 試利用曉凝提出的方案(即在每個生日月份，先預算每人科款該月禮物總值的 $\frac{1}{9}$ ，接着每位壽星應付的分別由其餘 8 人來平均攤分)來計算每位同事的年計個人金額。這個方案公平嗎？為甚麼？
- (b) 試利用姑丈提出的方案(即在每個生日月份，讓每位壽星付 $[(\text{壽星數目}-1) \times y]$ 元，其餘同事每位付 $(\text{壽星數目} \times y)$ 元，而各人付的費用合起來等於該月禮物總值)來計算每位同事的年計個人金額。這個方案公平嗎？為甚麼？
- (c) 試參考曉凝在本章最後「代入不同 k 值」的做法，探討上述方案以外的其他公平方案。

第五章：虛擬世界下的合作共贏

昨天的遠足活動令很久沒運動的曉凝累壞了，這天她九時許才起床，起床時下肢仍然痠痛。曉凝有點後悔昨晚答應今天帶弟妹們到村外吃午餐和到處走走。想到自己不能拖着疲憊的身軀帶弟妹們出外，她拉拉筋後才步出房間。

爺爺奶奶已經外出購物了，給曉凝留下了字條。曉凝到廚房舀了一碗粥當早餐吃，剛吃了一口，手提電話突然顯示了一則由博華傳來的訊息：「姐姐，最近我和宥凌在玩『怪獸物語』，你要不要玩玩看？」怪獸物語是個新款的電子遊戲，玩家在城市空間內捕獲怪獸並馴服它們。訊息還附了安裝遊戲程式的連結，曉凝按了進去，也被那些精緻的遊戲畫面吸引着。就這樣，曉凝也加入「馴獸師」的行列了。

十一時半，曉凝聯絡了弟妹們，在叔叔家門外集合，然後一行五人便出發了。

「姐姐，你安裝了『怪獸物語』沒有？」博華好奇地問。

「是姐姐最近很愛玩的那個遊戲嗎？我也很想玩，可是我沒有自己的手提電話。」宥慈說。

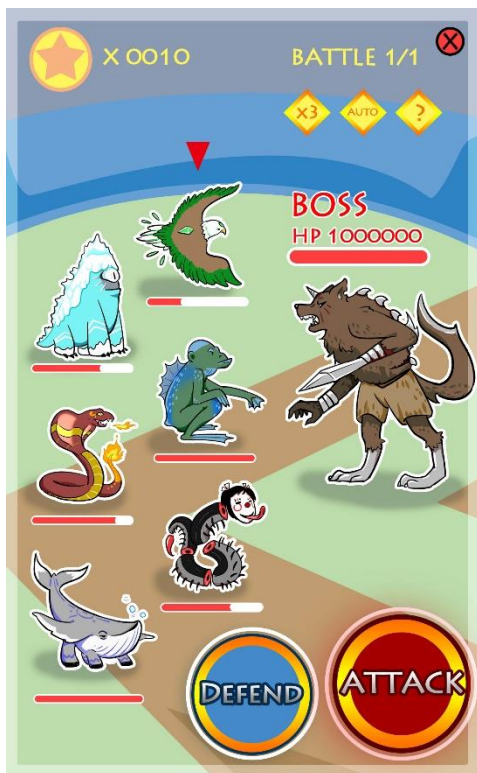
「我剛下載了，不過只完成了基本設定。對了，你們待會教我玩好嗎？」曉凝說。

「沒問題！不過我們還只是新手，我現在只達到第 9 級，博華現在是第 11 級，對嗎？」宥凌望望博華，博華向她點頭。

「你們的級別算是低嗎？」宥興問。

「當然！我有個同學現在已經是第 42 級了。我與他的級數差太遠了。」博華說。

曉凝和弟妹們在路上有說有笑，不久便來到了餐廳。點餐後，大家立即各自開啟了遊戲程式，一起進入了「怪獸物語」的世界。



「表姐，現在跟隨你的是擁有鋼翼的滑翔鷹，它是新手的基本伙伴。將來你有機會遇到其他怪獸的話，你便可以收服它們。不過，每名玩家可以保留的怪獸數目設有上限，上限與玩家級數掛鉤。像我現時只達第 9 級，所以只可以擁有 2 隻，超過了第 10 級，就可以擁有 3 隻等等。」

「那怎樣才可以升級？」

「這就要儲經驗值了。每次捕捉怪獸或在指定場所進行戰鬥，你都可獲得經驗值。另外，若在戰鬥中勝出，你會獲得星幣，星幣可用於訓

練怪獸和提升裝備。」

「戰鬥是如何進行的？」

「由於我們的級別低，現時我們只能到指定場所挑戰該位置的頭目怪獸。我們要派出自己擁有的怪獸進行戰鬥，每次可派出的怪獸數量都不同。而如果我們幾個連線玩的話，我們可以合作派出精良的怪獸陣容對付頭目怪獸，勝算將會大增。」



「要不要先試一遍？」博華迫不及待地問。

於是，曉凝、博華和宥凌便連線組隊，並選了要挑戰盤踞在本區球場的頭目怪獸——回魂狼。回魂狼屬於鋼系怪獸，擁有金鋼爪、念力子彈、吸血等技能，而且攻擊命中率高，是個強勁的對手。

「在這場對決中，我們要派出 3 隻怪獸對戰。我目前只有水棲猿和冰山魔兩隻怪獸，尚未與回魂狼對戰過。博華，你有經驗嗎？」宥凌問。

「這個對手我前一陣子才對戰過，也是用我現在身邊的伙伴火舌蛇、幻影百足和巨鯨獸。由於巨鯨獸屬於水系，技能不外乎是水花、噴泉、大聲咆哮等，對回魂狼完全不管用，因此一下子就被打敗了。而火舌蛇的火焰球雖然能灼傷回魂狼，但回魂狼憑其金鋼爪剎那間就殲滅了火舌蛇。那一場對決，幻影百足可是最有用的，它投的暗毒和其突襲成功令回魂狼的戰鬥力大大下降。最終這個怪獸組合只為我帶來 60 個星幣。」博華說。

怪獸伙伴一覽		
曉凝	宥凌	
滑翔鷹	水棲猿	冰山魔
		
博華		
火舌蛇	幻影百足	巨鯨獸
		

「那我們這次應派出哪三隻怪獸呢？」曉凝請教說。

「表姐，你想快速升級還是隨意玩？有個資深玩家收集了不同玩家的對戰結果，並收錄在資料庫內。我們可以參考這個來決定要派出怎樣的怪獸組合。」宥凌說。

「竟然有資料庫？可以看看嗎？」曉凝對此又是驚奇又是佩服。

宥凌開啟了另一個應用程式，在畫面上選擇了對戰對手——回魂狼，然後輸入了三人擁有的所有怪獸伙伴，不消一會程式便傳回了搜尋結果。

「你們看，在資料庫記載的所有可組成的組合中，冰山魔、火舌蛇和幻影百足為最佳組合，所帶來的星幣最多。另外，系統還提示我們有一個組合尚未有記錄。那個組合是……找到了，是滑翔鷹、冰山魔和幻影百足。」宥凌說。

「不如我們先嘗試這個組合，順便補充一下資料庫的數據？」宥興說。

「聽起來很有意思。就這樣決定好嗎？」宥慈問。

「好呀！不過我們的餐點來了，吃完才開始玩吧。」於是曉凝和弟妹們趕快開動了。

吃完之後，大家隨即又開始進行遊戲了。博華把宥凌的冰山魔、曉凝的滑翔鷹以及自己的幻影百足加進了怪獸戰隊，然後三人一同進入球場接受挑戰。博華和宥凌都專注在自己的部分，曉凝作為新玩家有點無所適從，幸好有宥興和宥慈在旁給予意見和提點，終於順利完成了這場對決。

「哇！我們贏了！」宥凌歡呼，並與曉凝擊掌。博華瞪大眼睛看着電話螢幕說：「最重要的是，我們得到 400 個星幣，比資料庫所寫的那個最佳組合帶來的星幣數目還要多！」

「真的嗎？竟然是由我們幾個首先發現。太好了！」宥凌高興極了，馬上把這個發現登記在資料庫內。

完成登記後，宥興突然問說：「你們打算如何分配所得的星幣？」這個問題令大家沉靜了下來。

「表哥，你怎麼問這種問題啦？我們說好了一起合作對戰，當然要平均分配這些星幣，不是嗎？」博華回應說。

「我不是這個意思。我在想，雖然你們三人一同參與這場對決，但你們所應得的真的相同嗎？例如，我認為幻影百足是勝出這場對決的關鍵，所以博華應該得到較多星幣。」

「說得也是。不過具體來說，我們可以如何決定誰能得多少星幣？要判斷誰的貢獻較多，好像有點難。」

「也不是沒有辦法。」曉凝說。「宥凌，讓我看資料庫。」

宥凌把電話遞給曉凝，曉凝看到資料庫列出了所有可組成組合的所得星幣數目，便說：「有這些資料便可以了。首先，讓我先定義何謂『聯盟值』。一個聯盟由一個或以上玩家組成，而其聯盟值就是該聯盟可以確保的最高收益。在我們這個情況下，一個聯盟的聯盟值就是該聯盟可以贏得的最多星幣數目。我們先建立一個表格來記錄我們三人可組成的聯盟和相應的聯盟值吧。你們認為如果我獨自參戰，我可以贏得多少星幣？」

「可是，表姐你只有一隻怪獸，並不能作賽。所以數目是 0 個嗎？」博華疑惑地說。

「答對了，也就是說，由我獨自組成的聯盟，聯盟值是 0 個。同樣地，宥凌只有兩隻怪獸，所以可保證贏得的星幣數目也是 0 個。」曉凝說。

「那麼博華哥哥呢？他有三隻怪獸，由他獨自組成的聯盟，聯盟值應該就是派出他擁有的那三隻怪獸可獲得的星幣數目了，對嗎？」宥慈提議說。

「宥慈，很不錯喔！讓我看資料庫，檢查一下博華上次是否真的取得了 60 個星幣……」曉凝邊查看資料庫邊說。

「姐姐，不用查了吧！我怎麼會騙你們呢？」博華說。

「我不是在懷疑你，只不過想說多核實一次也無妨。對，真的是 60 個。」曉凝認真地對博華說，希望他能明白事理。

「接着，讓我們來考慮由我和宥凌組成的聯盟之聯盟值。宥凌，你來找出答案吧。」曉凝把手上的電話遞給宥凌，讓她查閱資料庫。

宥凌邊想邊說：「如果我和表姐合作，那麼我們出戰的唯一策略是

派出滑翔鷹、水棲猿和冰山魔。所以，我只需查查它們對戰回魂狼時的帶來的星幣數目。所以答案是.....找到了，是 160 個。」

「好的。那如果我和博華合作呢？宥興，你有沒有想法？」曉凝問。

「如果你們合作，那麼你們共有 4 隻怪獸，因為要選三隻出戰等同於選一隻不出戰，而有 4 隻可供選擇，所以可出戰組合共有 4 個。而 4 個組合當中帶來最多星幣的組合為最佳組合，你們的聯盟值應該就是最佳組合帶來的星幣數目。」

「正解。同樣地，如果宥凌和博華合作，你們有 5 隻怪獸，只要把這些怪獸名稱輸入至資料庫，就會找到當中的最佳組合。順便一提，你們可出戰的組合共有： ${}_5C_3=10$ 個。」

「最後，我們也知道如果三個人一同合作，最佳組合可以帶來 400 個星幣，所以聯盟值就是 400 個。」宥慈說。

「沒錯！讓我們查一下我和博華合作，以及宥凌和博華合作的最佳組合，然後記下這些數據吧。」

「完成了！大家來看看吧。」

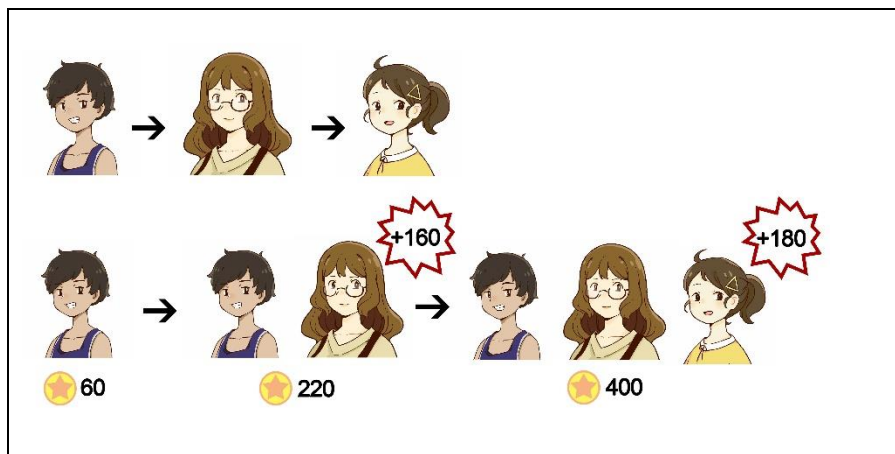
聯盟	最佳組合	聯盟值 (個)
曉凝	怪獸數量不足，無法作賽	0
宥凌	怪獸數量不足，無法作賽	0
博華	火舌蛇、幻影百足、巨鯨獸	60
曉凝、宥凌	滑翔鷹、水棲猿、冰山魔	160
曉凝、博華	滑翔鷹、火舌蛇、幻影百足	220
宥凌、博華	冰山魔、火舌蛇、幻影百足	380
曉凝、宥凌、博華	滑翔鷹、冰山魔、幻影百足	400

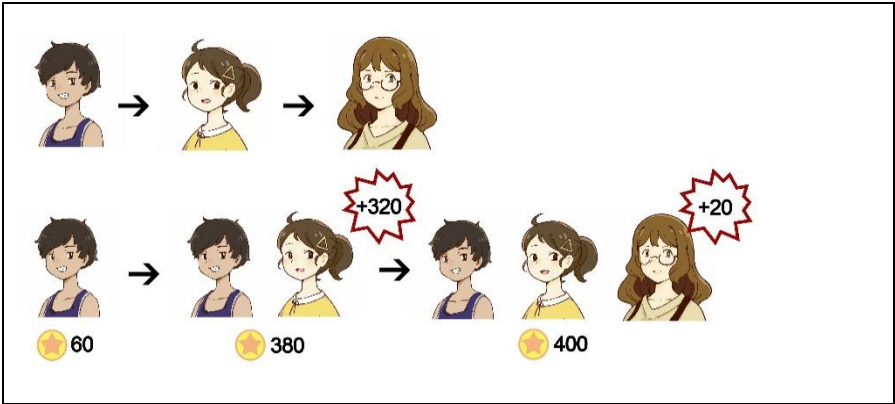
「值得注意的是，如果聯盟 A 是聯盟 B 的子集 (Subset)，即 $A \subseteq B$

B，則聯盟 A 的聯盟值必然不多於聯盟 B。因為但凡聯盟 A 可組成某個組合出戰，聯盟 B 也可組成該組合。」

「那接下來我們要做甚麼？」

「要開始計算沙普利值 (Shapley value) 了。」曉凝回答。「我們現在的目標是要攤分由我們三人合作得到的這 400 個星幣。要衡量三人對聯盟的重要性，我們可以考慮各人為聯盟帶來的邊際貢獻 (marginal contribution)，亦即加入聯盟後帶來的額外價值。不過，聯盟的組成次序不同，各人的邊際貢獻亦會有差異。例如，假如博華成立聯盟，他的邊際貢獻為 60 個星幣。然後他先邀請我加入其聯盟，我和博華可以用滑翔鷹、火舌蛇和幻影百足的組合來贏得 220 個星幣，因此我的邊際貢獻為： $220-60=160$ 個。最後，宥凌加入聯盟，三人合共可贏得 400 個星幣，所以宥凌的邊際貢獻就是： $400-220=180$ 個。可是，如果博華先邀請宥凌，再邀請我的話，那麼博華的邊際貢獻依舊為 60 個星幣，但宥凌的邊際貢獻變成： $380-60=320$ 個。當中的 380 是宥凌和博華可以保證贏得的最多星幣數目。然後，我的邊際貢獻就是： $400-380=20$ 個。由此可見聯盟的組成次序的影響。」





喝了口奶茶後，曉凝繼續說：「因此，沙普利值把全部的組成次序，亦即是排列 (permutation)，都納入考慮。剛才我們已經考慮了兩個排列了，而三個人的可組成排列共有： $3 \times 2 = 6$ 個，因為 3 個人都可以成立聯盟，然後從其餘 2 人當中選一個先加入。只要把全部排列都思考一遍，然後對每個人在這 6 個排列中的邊際貢獻取平均值，就可得出各人的沙普利值了。」

「別說了。我們先計算邊際貢獻吧。」宥慈急不及待想知道結果。「讓我來試試看可以嗎？」於是宥慈按照曉凝所說的步驟製作了表格。

排列	邊際貢獻 (個)		
	曉凝	宥凌	博華
曉凝、宥凌、博華	0	160	240
曉凝、博華、宥凌	0	180	220
宥凌、曉凝、博華	160	0	240
宥凌、博華、曉凝	20	0	380
博華、曉凝、宥凌	160	180	60
博華、宥凌、曉凝	20	320	60
沙普利值 = 平均邊際貢獻 (個)	60	140	200

「就是這樣嗎？」

「沒錯，宥慈。注意表格上的每行加起來都等於 400，因為邊際貢獻加起來就是三人的總貢獻。而計算出來的平均邊際貢獻，即沙普利值，就是這個方法所提議的分攤結果。」曉凝說。

「明白了。這聽起來好像不錯。這個攤分方式有甚麼特別之處嗎？」宥凌問。

「當然有。沙普利值最基本的特性就是各人的沙普利值之總和必定等於各人聯合起來組成的聯盟之聯盟值，因為沙普利值的構思就是為了對這個大聯盟共同獲得的收益進行攤分。第二，沙普利值不受與玩家的標籤次序支配。剛才我們在聯盟值的表格上列出大聯盟的名單時，我是排在第一位，接着是宥凌，最後是博華。不過，即使採用其他標籤次序，最後得出的沙普利值必然相同，因為沙普利值把全部大聯盟名單的所有排列都納入考慮，而不僅是其中一個。另外還有一些有用的特性，如果有興趣的話我們遲些再談吧。」

「好啊！」弟妹們異口同聲地說。

「結賬吧！我們出外逛逛再回家。」於是，他們便離開餐廳，往公園方向走去。

延伸問題

1. 有了賣物會擺賣的經驗，姑姑決定要開小食店，於是租了個鋪位。她打算只賣包裝零食，預計憑自己一人一個月能賺取 7000 元利潤。方太知道後也想加入，她弄的撈麵很好吃，估計能讓小食店的利潤增加至 10000 元。由於撈麵製作需時，外聘兩名兼職員工協助方太的話，每位可帶來額外 2400 元的利潤。
 - (a) 試找出姑姑、方太及兩名員工當中所有可組成聯盟的聯盟值。
 - (b) 試列出步驟計算姑姑、方太和兩位員工的沙普利值。

第六章：誰是最佳拍檔

到了公園，孩子們毫不猶豫地奔向位於公園中央草坪旁的遊樂區，不過烈日當空，遊樂設施正被太陽曬得燙熱。於是曉凝便帶他們到湖邊走走，吹吹涼風，看看湖中的錦鯉和蓮花。平常孩子們都在公園的遊樂區或者球場活動，這次他們終於能真正感受到公園的美。

「前面有一座小拱橋呢，我們去那裡吧！」博華興奮地大喊。

走到石拱橋上，壯觀的湖畔景色便映入眼簾。橋上有位老翁往湖裡撒下魚糧，吸引了一羣鯉魚在橋下不斷打轉。

「表姐，我也想要餵魚，可以嗎？」宥慈問。

於是曉凝帶孩子們到橋下的小賣部，買了一袋魚糧，順便買了幾瓶涼飲消消暑。回到橋上，大家都分到了一些魚糧在手，看準時機撒下魚糧。待在橋上不知不覺快要一個小時了，大家都玩得不亦樂乎。

曉凝這個時候收到爺爺的來電。原來村公所正在舉行定期會議，會上正討論新一年的修樹計劃，作為村委會成員的爺爺也在會議之上。村內的修樹工程向來都是由村民自行處理的，村內修樹隊的16位隊員中，有一半人負責檢查樹木，另一半負責攀樹修枝，每次行動中，檢查樹木和攀樹修枝的工序需要同時進行，因此會安排二人一組出動。不過，由於上年的分組安排令修樹隊的隊員相當不滿，他們現正在會議上為此事鬧得熱烘烘的，所以想問曉凝有沒有辦法來幫忙解決問題。曉凝答應了，然後和孩子們回村裡去。

約十分鐘後，曉凝到了村公所。經爺爺的介紹後，曉凝聽了修樹隊隊員對分組的意見。

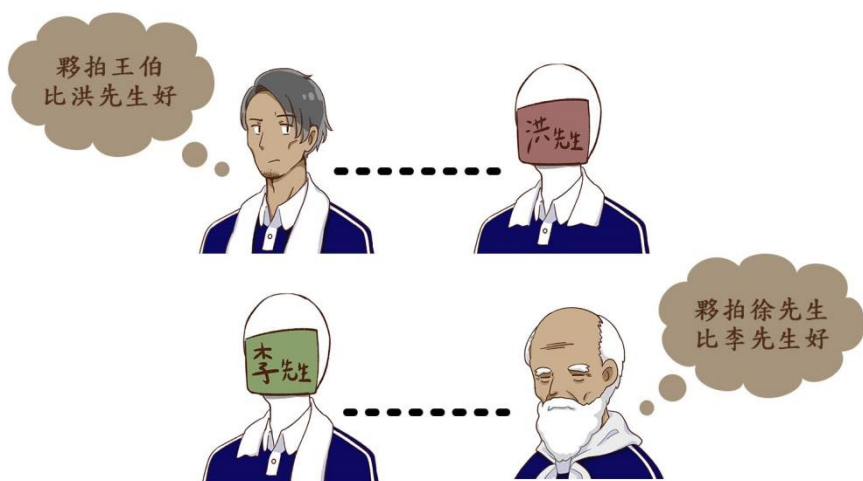
張先生首先發言。「是這樣的。我以往與陳先生合作，不過我發現我

和他似乎不太合得來，出勤時經常見意不合，所以想換組員。」

徐先生也爭着發表意見。「我呢，上年分組時很早答應和洪先生一組，但其實我最希望和王伯一組，我問了王伯，王伯也最想和我一組。王伯，你說是不是？」

「我會這樣說，是因為我比較喜歡清晨時分出動，可是我的拍檔李先生不喜歡，有兩三次明明約好了又放我鴿子，所以才說比較想和徐先生或其他人合作。雖然不想直說，但徐先生不是我的首選。」

隨後又聽了幾位隊員的發言。曉凝好不容易才能找到機會說話。



「你們的想法我都聽到了。我想，大家都應該明白能滿足所有人第一意願的配對並不存在，所以即使我理解大家各有不同意願，也不能確保能安排你們與自己最希望合作的隊員一組。不過，從剛才你們的發言，我明白了現時安排的缺陷。例如，比起現時自己的拍檔，徐先生更想和王伯一組，王伯亦較希望和徐先生一組。所以這不是說明現時的配對組合並不穩定嗎？」

曉凝走到會議室的白板前，續說：「為了確保全部配對組合的穩定性，讓我講解名為『蓋爾—沙普利演算法(Gale-Shapley Algorithm)』的解決方案吧。這個方案是針對一些為人數相同的兩組之間進行一對一配對的命題而設計的，而方案提出的配對組合必然是穩定的，即不會出現像王伯和徐先生同時認為對方比自己拍檔較佳的情況。為了讓你們清楚了解蓋爾—沙普利演算法，讓我們先考慮 4 對的情況吧。」

「請大家看看白板上這兩個表格。假設『字母組』{ A,B,C,D }和『羅馬數字組』{ I,II,III,IV } 各有 4 人，我們現在的任務是在兩組之間進行一對一配對。表格上列明了各人對另一組成員的喜好次序，例如 A 最喜歡 II，其次是 III，如此類推。」

	第一 選擇	第二 選擇	第三 選擇	第四 選擇
A	II	III	I	IV
B	IV	II	I	III
C	II	I	III	IV
D	III	I	II	IV

	第一 選擇	第二 選擇	第三 選擇	第四 選擇
I	B	C	A	D
II	B	C	D	A
III	B	A	D	C
IV	C	A	B	D

「蓋爾—沙普利演算法是這樣運作的。起初，各人都未有拍檔。分配過程中，每個未有拍檔的『字母』依次向自己還未詢問過的『羅馬數字』中的最佳選擇作出詢問。設該羅馬數字為 #。如果 # 未有拍檔，則 # 接受和此字母成為拍檔；如果 # 已與另一字母 * 結為拍檔，則出現兩個情況：如果 # 傾向選擇詢問方，則 # 和 * 的組合解散，# 和詢問的字母成為拍檔；如果 # 傾向選擇現時的拍檔 *，則 # 拒絕詢問的字母，繼續和 * 的拍檔關係。」

「哦！這就不用擔心過早答應人家的問題，因為之後可以反悔。」
徐先生點點頭說。

「沒錯。」曉凝說。「不過，光這樣說應該有點難以理解，讓我們嘗試運用蓋爾—沙普利演算法來處理這個實例吧。我們先考慮 A：因為 A 的第一選擇是 II，而 II 尚未有拍檔，故 II 接受和 A 成為拍檔。接着，B 的第一選擇是 IV，於是 B 和 IV 成為拍檔。然後到 C，而 C 的第一選擇是 II，可是 II 已和 A 結為拍檔.....」

「所以就由 II 做決定，看要跟誰。應該是這樣吧？」王伯自信滿滿地說。

「是的，王伯。由於 A 是 II 的最後選擇，II 更傾向選擇 C，所以 II 改與 C 成對，從而 A 變成沒有拍檔。因此，A 會詢問其第二選擇，即 III。由於 III 未有拍檔，A 和 III 結為一對。最後只剩 D，而 D 的第一選擇為 III，不過相較之下，III 更傾向現時的拍檔 A，所以 III 拒絕 D。之後 D 再考慮其第二選擇，即 I。由於 I 未有拍檔，故 I 接受 D 成為拍檔。於是，所有字母皆成功配對一個羅馬數字，即 A-III、B-IV、C-II、D-I，配對程序結束。」

	第一 選擇	第二 選擇	第三 選擇	第四 選擇
A	① II	④ III	I	IV
B	② IV	II	I	III
C	③ II	I	III	IV
D	⑤ III	⑥ I	II	IV

	第一 選擇	第二 選擇	第三 選擇	第四 選擇
I	B	C	A	⑥ D
II	B	③ C	D	① A
III	B	④ A	⑤ D	C
IV	C	A	② B	D

曉凝為大家一一解答剛才的程序，確保大家都能跟上。

「我們先來看看為甚麼蓋爾—沙普利演算法能產生穩定配對吧。大家只要看看上面的例子便不難明白。舉例說，A 最後的拍檔是 III，但 A 更喜歡 II，那麼會否出現 II 覺得 A 比自己拍檔更佳的情況，從而出現不穩定配對呢？這顯然是不可能的，因為按照演算法，任何字母都按照自

己的選擇優次來進行詢問，因此 A 必定曾被 II『拒絕』或『接受後解散組合』，而這必定是因為 II 跟自己更希望合作的字母成對，故 II 不可能認為其最終的拍檔不及 A 好，從而演算法產生的配對必然是穩定的。」

「這樣聽下來，蓋爾—沙普利演算法真的能解決我們現在面對的困境。不過，如果把字母方和羅馬數字方的角色交換，答案是否一致？」爺爺問道。

「首先，透過這個演算法可知，穩定配對問題必然有解，但一般而言，題解不一定是唯一的。如果把字母方和羅馬數字方的角色交換，演算法的結果仍會是一個穩定的配對，但視乎實際的選擇優次，所得的配對不一定相同。從以上的講解可見，詢問一方不斷『降低標準』，被動的一方則不斷『水漲船高』，最後達至均衡點。事實上，詢問一方會獲得所有解當中對他們來說最佳的選擇，而被動方則剛好相反。」曉凝回答說。

「既然曉凝為我們介紹了這個方法，我們何不試試看？」王伯提議說。

「好。那各位先填寫自己的意願，有沒有問題？」爺爺問。

延伸問題

1. 試把故事中的字母方和羅馬數字方的角色交換，重新執行蓋爾—沙普利演算法。配對結果有分別嗎？
2. 故事中，曉凝曾提及穩定配對問題的題解未必是唯一的。試舉例證明。

第七章：暫別

村委會的事情終於處理好了，曉凝和爺爺一同回家。

「要不是你剛才來了我們的會議，我們都不知要討論到甚麼時候。乖孫，多謝你喔！」

「沒有啦，小事而已。」

「想不到數學在現實生活如此有用。剛才的分組問題根本是個日常問題，但經過仔細研究後，我好像重新認識了它一樣。」

「對呀。雖然學習數學充滿考驗，但在數學的叢林之間探索，往往都有意想不到的收穫！」

回到家了。這是曉凝待在爺爺奶奶家的最後一天，一家人又再聚首一堂吃飯，大家都興高采烈的，孩子們則顯得有點不捨，臨離別前他們都拉着曉凝的手不讓她離開，曉凝和奶奶哄了他們一會才願放手。

「中秋節再見了，會想你們的！」

「我們也是！下次見！」



延伸問題參考答案

第一章：「難分難解」的紅豆糕

1. 要是宥凌和博華並沒有提出修改時數，宥慈、宥凌、博華和宥興本可分別獲得 1、5、5 和 6 件紅豆糕。如果逸誠也來分一杯羹的話，那麼由於宥慈、宥凌、博華、宥興和逸誠分別付出了 0.5、1.5、1.5、2 和 0.25 小時，要是這 17 件糕點可被分割，他們各可得 1.478、4.435、4.435、5.913 和 0.739 件。因此，他們分別先獲分配 1、4、4、5 和 0 件糕點。最後 3 件則由宥慈、宥興和逸誠獲得。總括來說，宥慈、宥凌、博華、宥興和逸誠分別得到 2、4、4、6 和 1 件。同樣的糕點數目，現多分給逸誠一人，曉凝的弟妹每人理應少分了點。可是，宥慈竟然比之前多分了一件糕點。這就是新區域悖論所描述的狀況。
2. 州份 A、B、C、D、E 和 F 的人口（以千計）分別為 1646、6936、154、2091、685 和 988。按照各州份的人口分配 250 個議席，A、B、C、D、E 和 F 理論上分別應獲分配 32.92、138.72、3.08、41.82、13.7 和 19.76 個席位，因此各州份首先分別獲分 32、138、3、41、13 和 19 席，餘下 4 席。接着，我們為各州份計算「人口 / (現時所獲席數+1)」。由於州份 A、B、C、D、E 和 F 的「人口 / (現時所獲席數+1)」分別為 49.879、49.899、38.500、49.786、48.929 和 49.400，而以州份 B 的數字最大，州份 B 增加一席至 139 席。然後，我們需要更新州份 B 的「人口 / (現時所獲席數+1)」至： $6936/(139+1)=49.543$ 。現在，州份 A 的「人口 / (現時所獲席數+1)」最大，因此州份 A 增加一席至 32 席。如此類推。最終，州份 A、B、C、D、E 和 F 的議席數目為 33、140、3、42、13 和 19 席。

州份 B 理論上的配額為 138.72 席，按照配額法則，州份 B 應獲分配 138 或 139 席。但在傑斐森法下，該州份獲分 140 席，因此違反了配額法則。事實上，巴連絲卡—楊格不可能定理 (Balinski-Young Impossibility Theorem) 指出，同時能符合配額法則和避免各種悖論的分攤方法並不存在。

第二章：主婦之間的討價還價

1. 如果按照每人所使用日數佔所有人使用日數的總和去攤分租金，那麼由於所有人使用日數的總和是 $7+5+4=16$ 日，姑姑應付： $3360 \times 7/16=1470$ 元，而以同樣方法計算，方太和楊太分別需付 1050 元和 840 元。然而，要知道如果只有一人擺賣，那個人可以使用整個攤檔的空間，否則空間就需要共用。以上這個方法並沒有考慮這個問題。較公平的方法如下：

7 天租金合共 3360 元，因此日租為 480 元。首三天和最後兩天分別有 2 人在擺賣，而第四和第五天則姑姑和方太、楊太三人都在擺賣。因此，如果在首三天或最後兩天擺賣，就應付日租的 $1/2$ ，即 240 元；第四和第五天方面，三人各應付日租的 $1/3$ ，即 160 元。所以，姑姑應付： $240 \times 5 + 160 \times 2 = 1520$ 元，方太應付： $240 \times 3 + 160 \times 2 = 1040$ 元，而楊太應付： $3360 - 1520 - 1040 = 800$ 元。

2. (a) 下調保溫瓶的出價不會影響姑姑的收益，因為只有最高出價會影響分攤結果，而由於在原本的分配中，保溫瓶並不是由姑姑獲得，下調保溫瓶的出價不會影響獲得保溫瓶的人選和投得之價位，所以姑姑得到的物品和金額是不變的，從而姑姑的收益亦不變。

同樣地，如果姑姑上調保溫瓶的出價至不高於方太的出價，姑

姑的收益仍會維持不變。可是，如果姑姑上調至 60 元以上（或剛好 60 元並以特定方式如猜拳決定保溫瓶由姑姑獲得），那麼情況便有所不同。在此情況下，設姑姑對保溫瓶的最新出價為 y 元。以下是物品的新分配方式：

物品	保溫瓶	絲巾	護手霜	抽獎券
獲得者	姑姑	楊太	姑姑	姑姑
投得價格	y 元	48 元	15 元	12 元

按照以上表格，姑姑獲得保溫瓶、護手霜和抽獎券，對她而言合共值： $50+15+12=77$ 元。因獲得這些物品，她需付： $(y+15+12) \times 2/3 = 2(y+27)/3$ 元，而楊太因得到絲巾需付： $48 \times 2/3 = 32$ 元，姑姑獲得這筆金額的一半，即 16 元。所以姑姑淨得： $77 - 2(y+27)/3 + 16 = (75 - 2y/3)$ 元。由於 $y \geq 60$ ，故 $75 - 2y/3 \leq 35$ ，即姑姑的收益由原本的 45 元降至最多 35 元。

- (b) 在原本的分攤結果中，護手霜由姑姑獲得。設姑姑對護手霜的最新出價為 z 元。

如果姑姑下調護手霜的出價，我們要考慮兩個情況：

情況一：下調至令自己無法得到護手霜的價位，即 $z < 12$ ，或 $z=12$ 而最終決定令姑姑無法獲得護手霜。此時物品分配方式如下：

物品	保溫瓶	絲巾	護手霜	抽獎券
獲得者	方太	楊太	方太	姑姑
投得價格	60 元	48 元	12 元	12 元

按照以上表格，姑姑獲得對她而言值 12 元的抽獎券。
因獲得抽獎券，她需付： $12 \times 2/3 = 8$ 元，而方太因獲得
保溫瓶和護手霜需交出： $(60+12) \times 2/3 = 48$ 元，楊太因
得到絲巾需付： $48 \times 2/3 = 32$ 元，姑姑分別獲得這兩筆
金額的一半，即 $(48+32)/2 = 40$ 元。所以姑姑淨得：
 $12 - 8 + 40 = 44$ 元，少於原來的 45 元。

情況二：下調護手霜標價，但姑姑仍舊獲得護手霜，即 $12 < z < 15$ ，或 $z=12$ 而最終決定令姑姑能夠獲得護手霜。此
時的物品分配方式如下：

物品	保溫瓶	絲巾	護手霜	抽獎券
獲得者	方太	楊太	姑姑	姑姑
投得價格	60 元	48 元	z 元	12 元

按照以上表格，姑姑獲得護手霜和抽獎券，對她而言合共
值： $15+12=27$ 元。因獲得這些物品，她需交出： $(z+12) \times$
 $2/3 = 2(z+12)/3$ 元，而方太因獲得保溫瓶需交出： $60 \times$
 $2/3 = 40$ 元，楊太因得到絲巾需付： $48 \times 2/3 = 32$ 元，姑姑
分別獲得這兩筆金額的一半，即 $(40+32)/2 = 36$ 元。所以姑
姑淨得： $27 - 2(z+12)/3 + 36 = (55 - 2z/3)$ 元。由於 $12 \leq z$
 < 15 ，故 $45 < 55 - 2z/3 \leq 47$ ，即姑姑的收益由原來的 45
元能最多增加至 47 元。

如果姑姑上調護手霜的出價，姑姑仍舊獲得護手霜。此時的
物品分配方式如下：

物品	保溫瓶	絲巾	護手霜	抽獎券
獲得者	方太	楊太	姑姑	姑姑
投得價格	60 元	48 元	z 元	12 元

此分配與上述情況二很接近，唯一不同的是 z 值。根據上面的推論，姑姑淨得： $27 - 2(z + 12)/3 + 36 = 55 - 2z/3$ 元。由於 $z > 15$ ， $55 - 2z/3 < 45$ ，即姑姑的收益會比原來的 45 元少。

- (c) 為了能獲得絲巾，楊太的出價必須高於姑姑和方太（如果有兩人同時出最高價，或許要使用其他方式去決定誰能獲得絲巾，故楊太的出價應僅高於其餘兩人，以免除不確定性）。因此，楊太可出價 35.1 元去競投絲巾，其餘的價格則維持不變。如此一來，楊太不僅能依舊獲得絲巾，而且因獲得絲巾而需交出的金額可從 32 元減至： $35.1 \times 2/3 = 23.4$ 元（少了 8.6 元），從而她需付：的金額變成 $-20 + 23.4 - 9 = -5.6$ 元，即本來應付 3 元的她這時反而可以得到 5.6 元。這代表原本要付 15 元的方太要多付 8.6 元的一半，亦即 4.3 元，而姑姑原本能獲得 18 元，現在只能得： $18 - 4.3 = 13.7$ 元。

本題說明了在主婦們所採用的分配方式（稱為克納斯特遺產繼承程序，Knaster inheritance procedure）當中，每項物件出價最高者若能把出價降至僅高於第二高的出價可以獲益，其他情況下則應誠實出價。由此可見，公開個人的資訊會對自己不利，所以為保障自己利益，主婦們恐怕要謹慎行事，不要洩露情報了。

第三章：史萊姆也來作祟

1. 從宥慈的角度看，由於在兩個階段中她都是第一位選的，所以

在每個階段裡，其他人所取得的部分在宥慈眼中價值都不高於自己所得，所以她不會妒忌另外兩人。

從博華的角度看，由於在第一階段裡，他負責把自己認為價值最高的一份史萊姆削減至與價值次高的那份同等價值，而同時他是第二位揀選的，因此無論先選的人選了哪一份，他都必能取得進行移除後三份當中價值最高的其中一份，即在首階段中，博華認為自己取得的不少於其餘兩人。而由於他負責第二輪的切割，故在他眼中第二步可選的三組價值相等。於是，把兩個步驟所得合起來算，博華也會認為自己取得的不少於其餘兩人，所以不會妒忌她們。

2. 在這情況下，由於宥慈先選，她選擇的那份必然是在她心目中價值最高的一組，因此他不會妒忌其他人。輪到博華選擇時，由於他認為價值最高和次高的兩份相同，所以無論宥慈的選擇是甚麼，博華還是可以選到價值最高的其中一份，從而不會妒忌其他人。最後一份則屬於宥凌，由於她負責切割，在她眼中三人所得的價值相等，所以也不會出現妒忌他人的情況。
3. (a) 首 $(n-2)$ 位離場的人均在成為最後削減者的情況下獲得分配，因此在他們眼中，他們所得的是恰好整體的 $1/n$ 。而最後兩位離場的人在每一輪都無法成為最後削減者，意味着在他眼中，前面的人所取得的都不多於整體的 $1/n$ 。因此，他們兩人均認為他們合共所獲得的不少於整體的 $2/n$ 。之後在一人分割、另一人選取的方法下，分割者可獲餘下的一半（即整體的 $1/n$ ），而選取者可獲得餘下的一半或更多。

因此在這個方法下，每人都認為自己至少得到整體的 $1/n$ ，但只有最後兩位離場的人有機會取得超過 $1/n$ 。顯然最後兩人的位置最為有利，但由於離場次序難以被操控（即使有人可以

決定起始時 n 人的排序，也無法知道獲益的最後兩人是誰），因此較公平。相反，在「單一分配者方法」下，只有分割者沒有機會取得超過 $1/n$ ，而誰成為分割者的決定較容易被操控。

(b) 例子如下：

	A 份	B 份	C 份
甲	$1/3$	$1/6$	$1/2$
乙	$1/5$	$2/5$	$2/5$
丙	$1/4$	$1/4$	$1/2$

在第一輪，甲方成為分割者，把在他來說值 $1/3$ 的 A 份切出。由於乙方和丙方認為 A 份價值低於 $1/3$ ，他們沒有進行切割。甲方為這一輪的最後削減者，把 A 份

帶走。接着，設乙方為分割者，把餘下的分成 B 份和 C 份，它們在乙方眼中各值餘下的一半。丙方把價值較高的 C 份帶走，乙方取得 B 份。這時甲方會妒忌丙方，因為丙方獲得 C 份，而 C 份在甲方的眼中比 A 份價值更高。

第四章：慶生真煩惱

- (a) 有別於故事中的生日聚餐，因這次的慶祝形式是送禮，慶祝費用會隨着壽星人數而改變。由於三月、九月和十一月的壽星人數為 5 人、1 人和 3 人，該些月份的慶祝費用分別為 900 元、180 元和 540 元。以三月為例，首先預算每人科款： $900/9=100$ 元，接着每位壽星應付的分別由其餘 8 人來平均攤分。每位壽星要為付其餘 4 位壽星祝壽，亦即要付： $4 \times 100/8=50$ 元。而非壽星者除了要付自己的 100 元外，還要分擔 5 位壽星的部分費用，因此應付： $100+5 \times 100/8=162.5$ 元。同樣地：

九月時預算每人科款： $180/9=20$ 元，該月壽星應付：

$0 \times 20/8=0$ 元，非壽星應付： $20+20/8=22.5$ 元

十一月時預算每人科款： $540/9=60$ 元，該月壽星應付：

$2 \times 60/8=15$ 元，非壽星應付： $60+3 \times 60/8=82.5$ 元

因此得出以下表格：

(單位：元)	A	B	C	D	E	叔叔	F	G	H	月計總金額
三月	50	50	50	50	50	162.5	162.5	162.5	162.5	900
九月	22.5	22.5	22.5	22.5	22.5	0	22.5	22.5	22.5	180
十一月	82.5	82.5	82.5	82.5	82.5	82.5	15	15	15	540
年計個人金額	155	155	155	155	155	245	200	200	200	1620

由此表格可見，各同事的年計個人金額不相同，因此並不公平。

- (b) 先計算三月份的分攤結果。首先考慮其中一位壽星，他不必付款，其餘各人每人付一筆費用為他祝壽，包括其他同月壽星，設這筆費用為 y 元。然後，依次考慮該月生日的其餘四位壽星。於是每位壽星需付 $4y$ 元，而其餘的同事需付 $5y$ 元。由於三月有五位壽星，慶祝費用為 900 元，因此我們能寫下這道方程： $5 \times 4y + 4 \times 5y = 900$ 。解方程後可知 $y=22.5$ 。所以在三月的聚會中，該月壽星應付： $4 \times 22.5=90$ 元，非壽星應付 $5 \times 22.5=112.5$ 元。同樣地：

九月時慶祝費用為 180 元，每位壽星需 0 元，而其餘的同事需付 y 元，方程為 $8y=180$ ，因此 $y=22.5$ ，即該月壽星應付 0 元，非壽星應付：22.5 元。

十一月時慶祝費用為 540 元，每位壽星需 $2y$ 元，而其餘的同事需付 $3y$ 元，方程為 $3 \times 2y + 6 \times 3y = 540$ ，因此 $y = 22.5$ ，即該月壽星應付： $2 \times 22.5 = 45$ 元，非壽星應付： $3 \times 22.5 = 67.5$ 元。

由此得出以下表格：

(單位：元)	A	B	C	D	E	叔叔	F	G	H	月計總金額
三月	90	90	90	90	90	112.5	112.5	112.5	112.5	900
九月	22.5	22.5	22.5	22.5	22.5	0	22.5	22.5	22.5	180
十一月	67.5	67.5	67.5	67.5	67.5	67.5	45	45	45	540
年計個人金額	180	180	180	180	180	180	180	180	180	1620

由此表格可見，各同事的年計個人金額相同，因此算得上是個公平的分攤方案。

(思考問題：故事中，曉凝證明了非壽星者需付金額是固定的。然而，從上表看來，非壽星者需付金額在不同月份並非相同。這與曉凝的論證有否矛盾？為甚麼？)

- (c) 與故事中的生日聚餐形式不同，送禮形式令每次的慶祝費用不一。參考曉凝的計算，我們可以設 $a_i = S_i / N \times [1 - k_i(N - n_i)]$ 及 $b_i = S_i / N \times (1 + k_i n_i)$ 。注意原來表達式的 S 被 S_i 取代，意味不同月份的慶祝費用可以不相同。由於每份生日禮物價值 180 元，設 $s = 180$ ，則 $S_i = n_i s$ 。因此可得知 $a_i = n_i s / N \times [1 - k_i(N - n_i)]$ 及 $b_i = n_i s / N \times (1 + k_i n_i)$ 能夠滿足月計總金額的要求。

至於年計個人金額方面的要求，同樣參照曉凝的計算，可得知 $b_3 - a_3 = b_9 - a_9 = b_{11} - a_{11}$ 。先計算：

$$b_i - a_i = n_i s / N \times (1 + k_i n_i) - n_i s / N \times [1 - k_i(N - n_i)]$$

$n_i] = n_i s / N \times [1 + k_i n_i - 1 + k_i (N - n_i)] = n_i s / N \times (k_i N) = n_i s k_i$ 。由此可知： $n_3 s k_3 = n_9 s k_9 = n_{11} s k_{11}$ 。約去 s 可得 $n_3 k_3 = n_9 k_9 = n_{11} k_{11}$ 。根據 $n_3 k_3 = n_9 k_9$ ，我們知道 $k_3 : k_9 = 1/n_3 : 1/n_9$ 。同樣地，根據 $n_9 k_9 = n_{11} k_{11}$ ，我們知道 $k_9 : k_{11} = 1/n_9 : 1/n_{11}$ 。因此可設 $k_3 = m/n_3$ 、 $k_9 = m/n_9$ 及 $k_{11} = m/n_{11}$ 。這意味 $a_i = n_i s / N \times [1 - m(N - n_i)/n_i]$ 及 $b_i = n_i s / N \times (1 + m n_i/n_i) = n_i s / N \times (1 + m)$ 。

代入 N 、 S 和 n_i 值，我們可以得到以下表格：

(單位：元)	A、B、C、D、E	叔叔	F、G、H
三月	$a_3 = 100(1 - 4m/5)$	$b_3 = 100(1 + m)$	$b_3 = 100(1 + m)$
九月	$b_9 = 20(1 + m)$	$a_9 = 20(1 - 8m)$	$b_9 = 20(1 + m)$
十一月	$b_{11} = 60(1 + m)$	$b_{11} = 60(1 + m)$	$a_{11} = 60(1 - 2m)$
年計個人金額	180	180	180

無論 m 等於多少，分攤結果都能達到有關月計總金額和年計個人金額的兩個要求。而如果 $m = 1/8$ ，就正正是題(b)的方案；代入 $m = 0$ ，則得到乏味的均分方案。

第五章：虛擬世界下的合作共贏

- (a) 為方便討論，設姑姑的代號為 A，方太的代號為 B，而兩位員工的代號分別為 C 及 D。設 S 為 $\{A, B, C, D\}$ 的子集，並設為 S 的聯盟值為 $v(S)$ 元。由於姑姑獨自能賺取 7000 元，故 $v(\{A\}) = 7000$ 。而如果方太加入，則小食店利潤為 10000 元，所以 $v(\{A, B\}) = 10000$ 。外聘一位員工的話，小食店利潤會增至 12400 元，所以 $v(\{A, B, C\}) = v(\{A, B, D\}) = 12400$ 。若外聘

兩位員工，小食店利潤則為 14800 元，因此 $v(\{A,B,C,D\})=14800$ 。另外，在沒有姑姑 (A) 的情況下，則沒有任何利潤，因此對所有沒有 A 在內的聯盟，其聯盟值均為 0。除此之外，在沒有方太 (B) 的情況下，兩位員工並不會為小食店帶來任何額外利潤，故對任何包括 A 但不包括 B 的聯盟，其聯盟值均為 7000。各聯盟的聯盟值詳列如下：

$$v(\{A\})=7000$$

$$v(\{A,B\})=10000$$

$$v(\{A,B,C\})=v(\{A,B,D\})=12400$$

$$v(\{A,B,C,D\})=14800$$

$$v(\{B\})=v(\{C\})=v(\{D\})=0$$

$$v(\{B,C\})=v(\{B,D\})=v(\{C,D\})=v(\{B,C,D\})=0$$

$$v(\{A,C\})=v(\{A,D\})=v(\{A,C,D\})=7000$$

- (b) 見下表。注意邊際貢獻的計算：以排列「BDAC」為例，由於 $v(\{B\})=0$ ，故 B 的邊際貢獻為 0 元。然後把 D 加入至聯盟，由於 $v(\{B,D\})=0$ ，故 D 的邊際貢獻也是 0 元。再把 A 加入，由於 $v(\{A,B,D\})=12400$ ，故 A 的邊際貢獻是 12400 元。最後 C 加入，由於 $v(\{A,B,C,D\})=14800$ ，故 C 的邊際貢獻是：14800-12400=2400 元。

排列	邊際貢獻 (元)			
	A	B	C	D
ABCD	7000	3000	2400	2400
ABDC	7000	3000	2400	2400

ACBD	7000	5400	0	2400
ACDB	7000	7800	0	0
ADBC	7000	5400	2400	0
ADCB	7000	7800	0	0
BACD	10000	0	2400	2400
BADC	10000	0	2400	2400
BCAD	12400	0	0	2400
BCDA	14800	0	0	0
BDAC	12400	0	2400	0
BDCA	14800	0	0	0
CABD	7000	5400	0	2400
CADB	7000	7800	0	0
CBAD	12400	0	0	2400
CBDA	14800	0	0	0
CDAB	7000	7800	0	0
CDBA	14800	0	0	0
DABC	7000	5400	2400	0
DACB	7000	7800	0	0
DBAC	12400	0	2400	0
DBCA	14800	0	0	0
DCAB	7000	7800	0	0
DCBA	14800	0	0	0
沙普利值 = 平均邊際貢獻 (元)	10100	3100	800	800

由上表可知，姑姑應可分得 10100 元，方太可得 3100 元，兩位員工可各得 800 元。

從這個事例中，我們可以看到兩位員工在這情境裡的角色完全一致，因此算得的沙普利值也相同。

第六章：誰是最佳拍檔

1. 演算法的執行步驟詳情如下：

	第一 選擇	第二 選擇	第三 選擇	第四 選擇
I	① B	③ C	⑩ A	⑪ D
II	② B	⑨ C	D	A
III	④ B	⑤ A	D	C
IV	⑥ C	⑦ A	⑧ B	D

	第一 選擇	第二 選擇	第三 選擇	第四 選擇
A	II	⑤ III	⑩ I	⑦ IV
B	⑧ IV	② II	① I	④ III
C	⑨ II	③ I	III	⑥ IV
D	III	⑪ I	II	IV

- ① I 的第一選擇是 B，由於 B 未有拍檔，B 接受和 I 一組。
- ② II 的第一選擇也是 B，由於 I 和 II 分別是 B 的第二和第三選擇，B 改與 II 成為拍檔。
- ③ 我們要重新安排 I 的拍檔。I 的第二選擇是 C，由於 C 未有拍檔，故 C 和 I 一組。
- ④ III 的第一選擇亦是 B，但 III 為 B 的最差選擇，所以現時的配對維持不變。
- ⑤ III 要退而考慮 A。由於 A 未有拍檔，故 A 和 III 一組。

- ⑥ IV 的第一選擇是 C，但 IV 是 C 的最後選擇，所以配對維持不變。
- ⑦ IV 接着詢問 A，同樣地，IV 是 A 的最後選擇，所以配對維持不變。
- ⑧ IV 接着詢問其第三選擇 B。由於 IV 是 B 的第一選擇，B 改和 IV 一組，原來與 B 成對的 II 則變成沒有拍檔。
- ⑨ II 要詢問其第二選擇 C。由於 C 的第一選擇是 II，故 C 改和 II 一組，而 C 原來的拍檔 I 則要另覓拍檔。
- ⑩ I 要詢問其第三選擇 A。由於 A 現時和 III 一組，而 A 對 III 的喜好高於 I，故 A 傾向維持現狀。
- ⑪ I 和其最後選擇，即尚未有拍檔的 D 結成一組。配對程序完成。

最終的分配結果是 I 和 D 一組、II 和 C 一組、III 和 A 一組、IV 和 B 一組，與故事中的配對結果相同。

2. 最簡單的例子如下：對集合 { A,B } 和 { I,II } 進行配對，其中它們的選擇優次如下：

	首選	次選
A	I	II
B	II	I

	首選	次選
I	B	A
II	A	B

透過執行蓋爾—沙普利演算法，我們能找出這個穩定配對問題的題解。

- 如果 { A,B } 作為詢問一方，那麼 A 會和 I 一組，B 會和 II 一組。
- 如果 { I,II } 作為詢問一方，則 I 會和 B 一組，II 會和 A 一組。

兩者皆為此穩定配對問題的解。由此可見，穩定配對問題的題

解不一定是唯一的。

同時，由此例可見，作為詢問方較為有利，在此例中詢問方總是能配得自己的第一選擇，而被動的一方總是配得自己的第二選擇。

參考書目及網頁

Brualdi, R. A. (2012). *Introductory Combinatorics*. New Jersey, NJ: Pearson Education International.

Chiu, S. N., & Ling, L. (2012). *Mathematics of fairness*. Hong Kong: Pearson Education Asia.

Mayer, J. C. (n.d.) Apportionment 2: divisor methods. Retrieved from

<https://people.cas.uab.edu/~jcmayer/Apportionment%202.pdf>

Thomas, L. C. (2012). *Games, Theory and Applications*. New York, NY: Dover Publications.

蕭文強、黃毅英、張僑平 (2019) 。慶生科款談數學。《數學教育》, 41 · 40-48 。

香港特別行政區政府
教育局數學教育組編訂
政府物流服務署印

Prepared by the Mathematics Education Section,
the Education Bureau of the HKSAR
Printed by the Government Logistics Department

ISBN 978-988-8581-08-5



9 789888 581085 >