

## 暖包的數學建模

學習階段： 3

範疇： 數與代數、數據處理

學習單位： (i) 公式  
(ii) 數據的組織  
(iii) 數據的表達

目標： (i) 判斷最佳產品的因素  
(ii) 建立一條數學公式來比較不同產品  
(iii) 學習數學建模的過程

先備知識： 利用圖表和統計知識表達量度的數據

教學資源： 暖包、溫度計、工作紙

背景資料：

市面有不同牌子的暖包。當人們購買暖包時，他們會如何選擇呢？在本活動，學生需要建立一個模型，用於判斷最佳的暖包。活動工作紙可以在本例子的附錄中找到。

活動詳情：

### 活動 1：數據收集

1. 教師可以運用以下問題激發學生對活動的興趣。
  - 你如何選購一盒暖包？
  - 當你購買一盒暖包時，你會考慮哪些因素？
  - 何謂**最佳**暖包？
2. 將學生分成 3-4 人一組，討論可能影響他們選擇的因素，並將因素填寫在以下空格。  
\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_,  
\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_,  
\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_.
3. 教師可繼續討論學生們提出的因素，例如價格、大小、重量、外觀、使用時間和效率等。為了找出**最佳**暖包，這些因素必須被量化，且需要設置一個評分公式來比較不同的暖包。有關評分公式的討論將在下一個活動中進行。
4. 教師可與學生討論影響一個暖包「使用時間」的因素。由於暖包的溫度會隨時間變化，教師可要求學生定義暖包的使用時間。

你如何定義暖包的使用時間？

基於甚麼假設？

5. 學生分組工作。他們需要取決最多四個重要的因素，以納入評分公式。

重要的因素：

① \_\_\_\_\_, ② \_\_\_\_\_,

③ \_\_\_\_\_, ④ \_\_\_\_\_.

6. 隨後，學生在下一個任務之前收集有關他們選購不同牌子暖包的因素的數據。

度量	因素			
牌子	①	②	③	④
A				
B				
C				

教師注意事項：

1. 進行本活動時可考慮以下因素：

- 價格
- 功能 / 質量
- 使用時間
- 溫度（最大溫度，平均溫度）
- 大小
- 重量
- 廣告設計
- 有效期
- 其他

2. 有些學生可能會將暖包的特定溫度下降的時間視為使用時間。在這種情況下，教師可以使用以下圖表與學生討論，在量度暖包的使用時間時可能需要考慮其他因素。例如，圖 1 顯示了牌子 A 和牌子 B 暖包的溫度-時間圖。牌子 A 從 50°C 降至 22°C 需要 25 小時，而牌子 B 從 50°C 降至 15°C 需要 25 小時。學生必須以量化方式比較這兩個牌子。學生可以使用某些時間間隔內的平均溫度作為使用時間的指標，以區分這兩個牌子。一種方法是使用 5 小時作為時間間隔單位，再從 0 小時到 25 小時計算平均溫度。

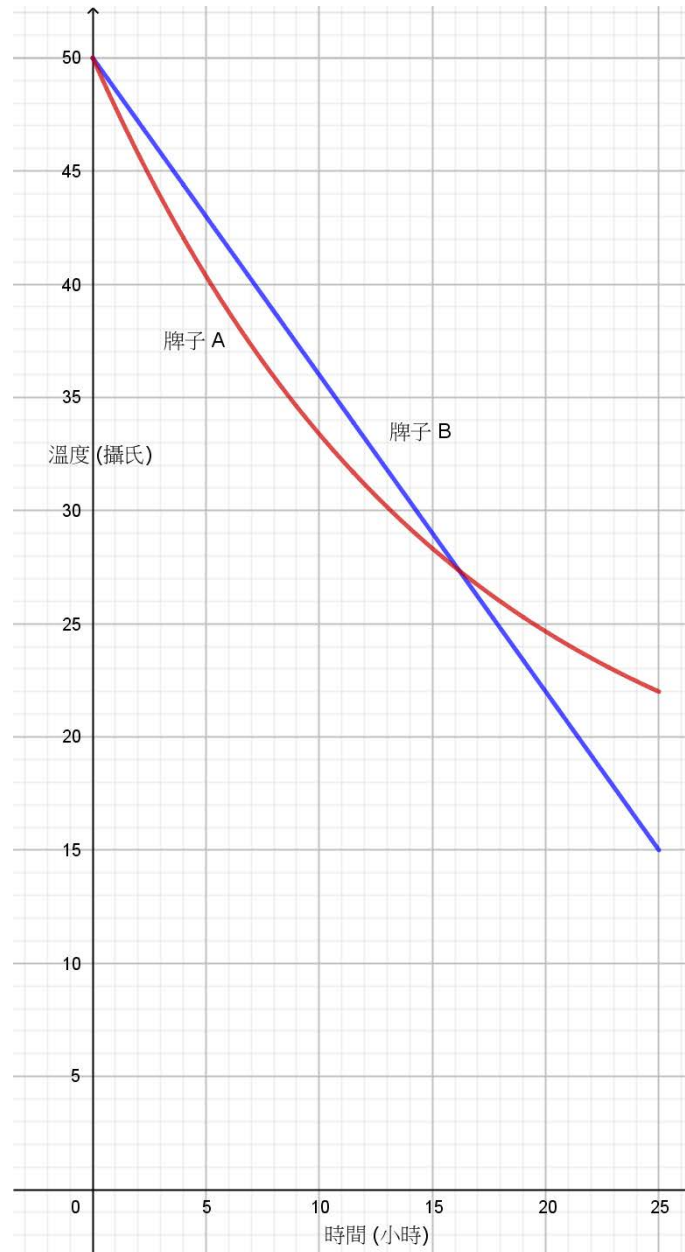


圖 1

3. 教師可以提出以下問題，以增強學生對使用時間的討論。
  - 如何定義一個暖包的使用時間？
  - 牌子 A 和牌子 B 的使用時間是否相同？
  - 你可以描述兩個牌子暖包的差異嗎？
  - 如何計算一個暖包的平均溫度？
  
4. 由於學生可能會在一定時間內收集溫度數據，教師可以利用這些真實數據作為起點介紹平均溫度的概念。

5. 若有足夠時間，學生可以繪製暖包對時間的圖表。他們可以討論不同圖表的特徵，並設定適當的標準來判斷暖包的使用時間。

## 活動 2：數學建模

1. 教師介紹了一些數學建模的基本概念後，讓學生討論如何建立暖包的評分公式。評分公式可包括以下重點：
- 定義一些變量，並加以量度。必要時繪製圖表以表示這些變量。
  - 建立一個比較用的評分公式。
  - 與其他小組成員進行討論和交流。
  - 如有需要，檢討並修改評分公式。
  - 進行計算。
  - 得出最終結論，並在課堂上分享。
2. 教師可以使用以下公式作為起點，讓學生討論以下評分公式是否是一個好的公式。

$$\text{評分公式 1： (使用時間)} \div (\text{價格})$$

建議討論的問題包括：

- 此公式的優點是甚麼？
- 此公式的缺點是甚麼？
- 哪些因素尚未納入考量？

3. 教師可以與學生討論其他公式。

$$\text{評分公式 2： } 0.8 \times (\text{使用時間}) \div 24 + 0.2 \times (\text{價格}) \div 5$$

建議討論的問題包括：

- 為什麼公式中會有「(使用時間)  $\div$  24」這一項？
- 為什麼公式中會有「 $0.8 \times \dots + 0.2 \times \dots$ 」這一項？

4. 學生分組討論，設計自己的評分公式，並輸入他們收集的數據進行比較。

我們的評分公式

當你設計自己的評分公式時，基於甚麼假設？

假設 1：

---

假設 2：

---

假設 3：

---

假設 4：

---

5. 學生列出不同牌子暖包的排行榜。

*不同牌子暖包的排行榜*

牌子	得分	次序
A		
B		
C		
D		

6. 學生向全班展示他們的發現。他們必須解釋設計自己的評分公式時所採用的假設。其他學生可以對此進行評論。
7. 學生檢討公式和計算結果。如有必要，進行修改。

教師注意事項：

1. 一些建議的公式，用於討論其特點和缺點：

- ✧ (價格)+(重量)+(使用時間) ①
- ✧ (價格) $\div$ 10+(使用時間) $\div$ 12 ②
- ✧  $0.7\times$ (使用時間) $\div$ 24+ $0.3\times$ (價格) $\div$ 10 ③
- ✧ (平均溫度-36.6) $\div$ [(80-36.6) $\div$ 2] ④

公式的評論：

公式 ①：這三個因素無法直接相加，因為它們來自不同的量度方法。

公式 ②：此公式考慮了標準化因素，因為它假設最高價格為 \$10，最長使用時間為 12 小時。

公式 ③：此公式考慮了標準化因素，因為它假設最高價格為 \$10，最長使用時間為 24 小時，權重因素 0.7 和 0.3 也包含在公式中。

公式 ④：此公式假設暖包的最低溫度為攝氏 36.6 度，最高溫度為攝氏 80 度。

- 2. 教師可以向學生介紹加權平均的概念，以幫助他們設定評分公式。
- 3. 除了建立評分公式外，同樣重要的是，在數學建模的過程中，學生應該意識到評分公式的假設和限制。

## 工作紙

### 引言

如果你要買一盒暖包，該如何比較不同牌子的暖包呢？以下是一些討論的起點問題，供參考：

- 你如何選購一盒暖包？
- 當你購買一盒暖包時，你會考慮哪些因素？
- 何謂*最佳*暖包？

### 活動 1：數據收集

1. 以 3-4 人為一組進行活動，討論可能影響你們選擇的因素，並將不同因素填寫在以下空格。

\_\_\_\_\_， \_\_\_\_\_， \_\_\_\_\_， \_\_\_\_\_，  
\_\_\_\_\_， \_\_\_\_\_， \_\_\_\_\_， \_\_\_\_\_，  
\_\_\_\_\_， \_\_\_\_\_， \_\_\_\_\_， \_\_\_\_\_。

2. 為了找出*最好的*暖包，需要將各種因素量化，並需要一個評分公式來比較不同牌子的暖包。至於評分公式的討論將在下一個活動中進行。在本活動中，我們將量化其中一個因素。
3. 例如，「使用時間」可能是你考慮的暖包主要因素之一。回答以下問題。

你如何定義暖包的使用時間？

基於甚麼假設？



4. 圖 1 顯示了兩牌子暖包的溫度-時間圖。牌子 A 從 50°C 降至 22°C 需時 25 小時，而牌子 B 從 50°C 降至 15°C 需要 25 小時。你必須以量化方式比較這兩個牌子。

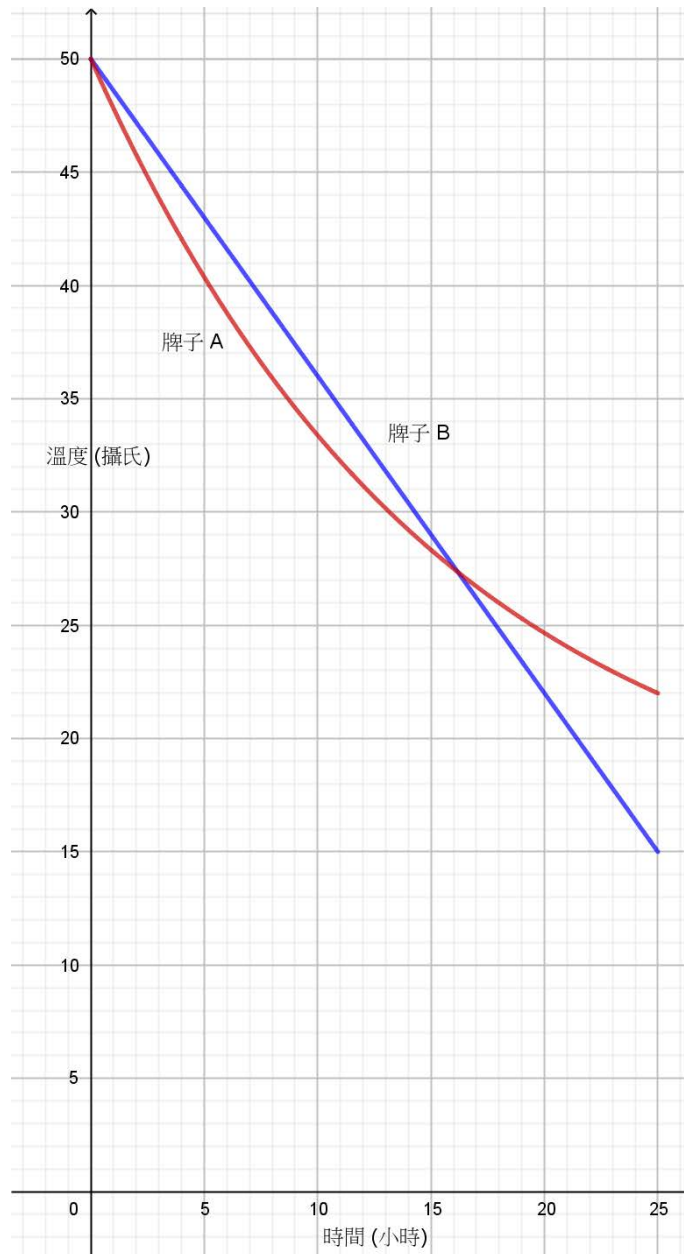


圖 1

你將如何量化以比較這兩個品牌的暖包呢？  
在下面寫下你的建議。

5. 以小組形成進行分組。在設計一個評分公式來比較不同牌子的暖包之前，你必須取決最多四個重要因素，並嘗試量化每個因素以進行比較。

重要的因素：

① \_\_\_\_\_, ② \_\_\_\_\_,

③ \_\_\_\_\_, ④ \_\_\_\_\_.

如何量化這些因素？

因素 ①

因素 ②

因素 ③

因素 ④

6. 在下一個活動之前，請在家收集關於你選購不同品牌暖包的因素的數據。

度量	因素			
	①	②	③	④
牌子				
A				
B				
C				

## 活動 2：數學建模

1. 進行小組討論，設計自己的評分公式，並輸入你在活動 1 中收集的數據進行比較。

### 我們的評分公式

當你設計自己的評分公式時，有哪些假設？

假設 1：

---

假設 2：

---

假設 3：

---

假設 4：

---

2. 列出不同牌子暖包的排行榜。

### 不同牌子暖包的排行榜

牌子	得分	次序
A		
B		
C		
D		

3. 向全班展示你們的發現。解釋設計你們的評分公式時所採用的假設。
4. 檢討公式和計算結果。如有必要，進行修改。

## 工作紙的建議答案

### 活動 1

1. 建議本活動可考慮的因素：

- 價格
- 功能 / 質量
- 使用時間
- 溫度（最大溫度，平均溫度）
- 大小
- 重量
- 廣告設計
- 有效期
- 其他

2. (a) 一個暖包的使用時間 = 特定溫度下降的時間

(b) 假設

- ✧ 周圍沒有熱量散失。
- ✧ 實驗是以公平的方式進行的。

3. 以 5 小時作為時間間距，

$$\text{牌子 A 的平均溫度} = \frac{50+40.4+33.4+28.3+24.7+22}{6} = 33.1 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

$$\text{牌子 B 的平均溫度} = \frac{50+43+36+29+22+15}{6} = 32.5 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

因此，牌子 A 的表現優勝於牌子。