最短路徑與反射

學習階段： 3

學習範疇： 度量、圖形與空間

學習單位： 全等三角形

目標： 運用數學知識解最短路徑問題及欣賞這問題與光學現象的關係。

先備知識： 尺規作圖及幾何證明的知識。

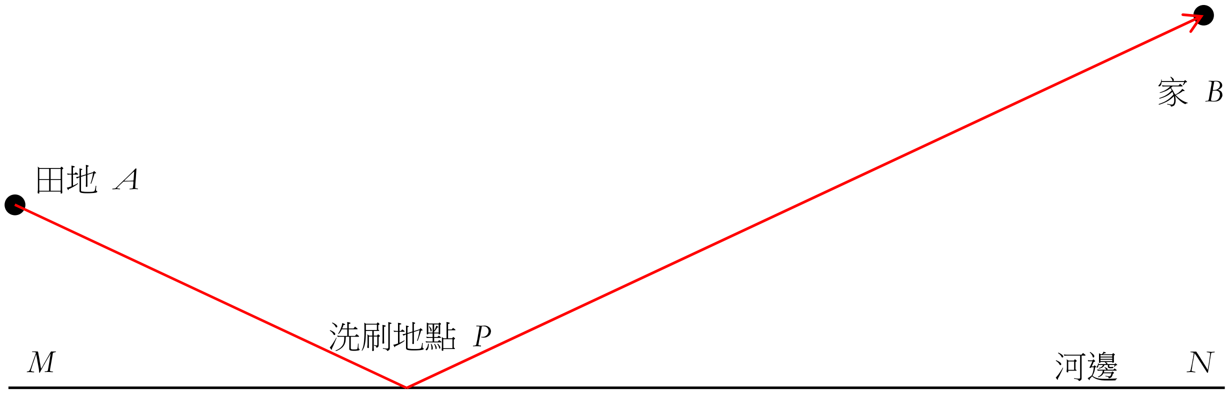
其他 STEM 教育學習領域的相關內容：
科學教育學習領域《科學教育學習領域課程指引補充文件：科學（中一至中三）》（課程發展委員會，2017）中的「光、顏色和光譜以外」。

教學資源： GeoGebra 檔案（ShortestDistance1.ggb, ShortestDistance2.ggb, ShortestDistance3.ggb, ShortestDistance4.ggb）

背景資料：

相傳古希臘有一位農夫向數學家海倫（Hero of Alexandria, 約 10 – 70 AD）提問[1]：

「我每天在田地耕作後要先到河邊洗刷農具，然後再回家。如何從筆直的河岸（MN）選一個最佳的洗刷地點 P，使我從田地（A）到 P，再從 P 到家（B）的路程最短？」



活動詳情：

<u>活動一：最短的路程</u>

1. 教師先引入最短路程問題。

2. 教師引導學生利用提供的 GeoGebra 檔案，探究最佳的洗刷地點 P 的位置，並完成工作紙一。

<u>活動二 a：畫出最短路徑</u>

1. 學生在工作紙二上利用平面幾何的知識，解答以下問題：
   (a) 設 B' 為圖中的一點使 $BB' \perp MN$ 及 $BC = B'C$，其中 C 為 BB' 與 MN 的交點，對 MN 上的任意一點 P'，若 P' 與 C 不重合，證明 $\Delta BP'C \cong \Delta B'P'C$。
   (b) 指出在 GeoGebra 探究活動中找出最佳的洗刷地點 P，其幾何特質。從而證明無論 P' 的位置在那裡，$AP' + P'B \geq AP + PB$。
   (c) 對於任意的點 A 和點 B，以尺規作圖找出最佳地點 P 的位置及畫出最短路徑。
   (d) 證明 $\angle APM = \angle BPN$。

2. 教師引導學生比較上述路線與光線在平面鏡上的反射有何相似之處。

<u>活動二 b：延伸活動</u>

1. 教師引導學生利用光學上的反射原理和幾何的知識，在工作紙二設計一個運用反射原理解難的小遊戲。

2. 教師亦可與科學科教師協作，向學生簡介高錕在光纖的研究和在現實生活的應用。

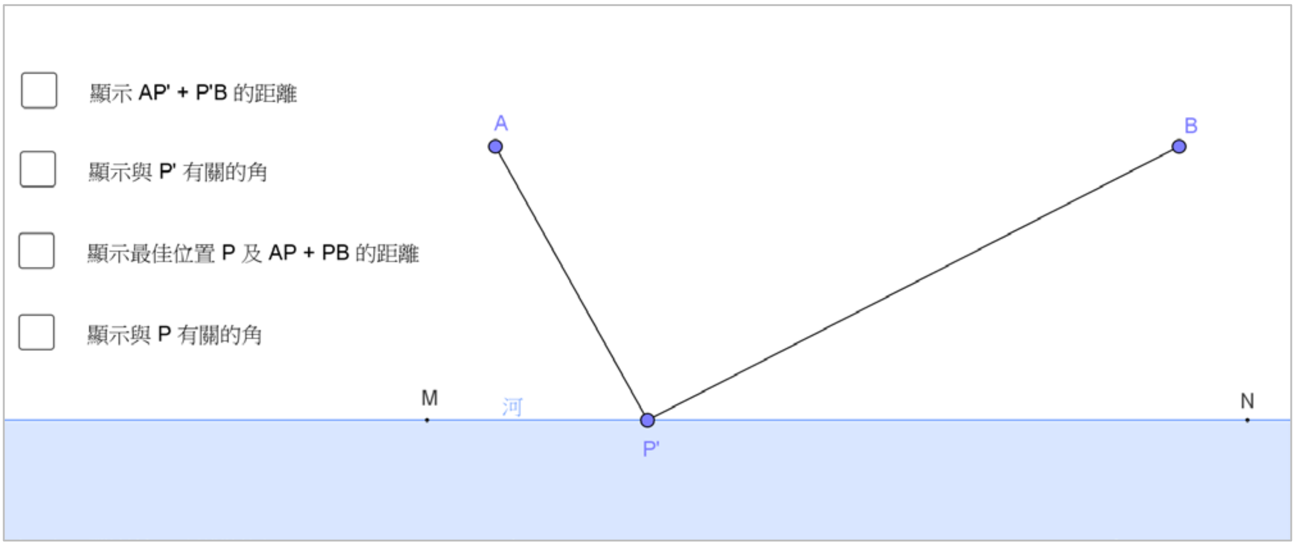
---

[1] 取自傅海倫（2004）：〈物理原理在數學中的應用〉。《數學傳播》28 卷 1 期，頁 63-69。
http://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d281/28107.pdf

探究最短路徑

利用提供的 GeoGebra 檔案，移動 P'，從而探究最佳地點 P 的位置，使 $AP + PB$ 的距離為最短。

(1) (a) 從下圖 A、B 的位置，估計最佳地點 P 的位置，並在圖中著色表示該位置。



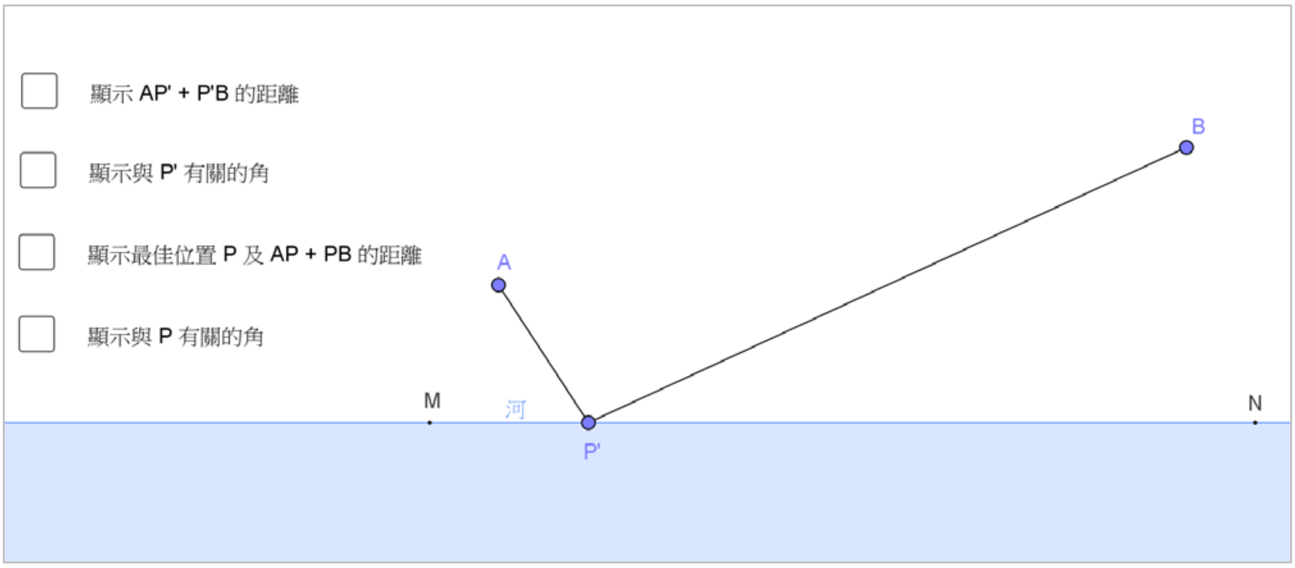
(b) 開啟檔案 ShortestDistance1.ggb，點選「顯示 $AP' + P'B$ 的距離」。
移動點 P'，找出問題中最佳地點 P 的位置。

(c) 點選「顯示與 P' 有關的角」，觀察及填寫以下的角度：

$\angle AP'M =$ __________，$\angle BP'N =$ __________。

(d) 在點 P ，$\angle APM$ 與 $\angle BPN$ 是否相等？ 答：__________
點選「顯示最佳位置 P 及 $AP + PB$ 的距離」及「顯示與 P 有關的角」作驗證。

(2) (a) 從下圖 A、B 的位置，估計最佳地點 P 的位置，並在圖中著色表示該位置。



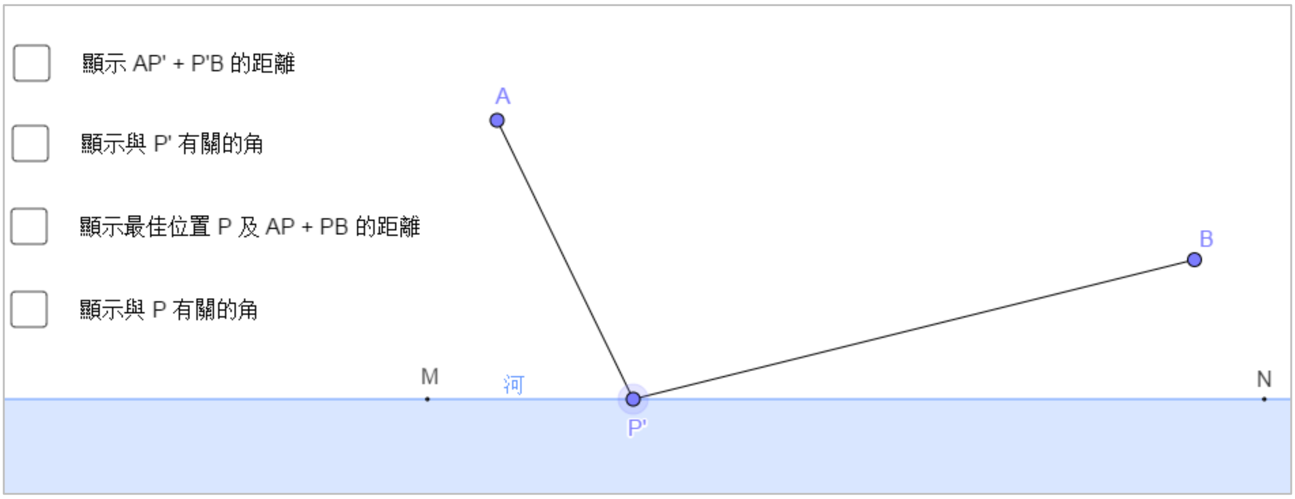
(b) 開啟檔案 ShortestDistance2.ggb，點選「顯示 $AP' + P'B$ 的距離」。
移動點 P'，找出問題中最佳地點 P 的位置。

(c) 若 A、B 和河邊的距離剛好對調（如下圖），試描述點 P 的位置會有甚麼變化。

____

____

____



(d) 點選「顯示與 P' 有關的角」，觀察及填寫以下的角度：

$\angle AP'M =$ __________，$\angle BP'N =$ __________。

(e) 在點 P，$\angle APM$ 與 $\angle BPN$ 是否相等？ 答：__________
點選「顯示最佳位置 P 及 $AP + PB$ 的距離」及「顯示與 P 有關的角」作驗證。

(f) 在前面 2 次探究活動中，從 GeoGebra 檔案找出的最佳位置和你的估計接近嗎？（若有需要，可開啟檔案 ShortestDistance3.ggb 驗證你的估計。）試解釋你的估計，並反思你的估計是否合理。

____

____

____

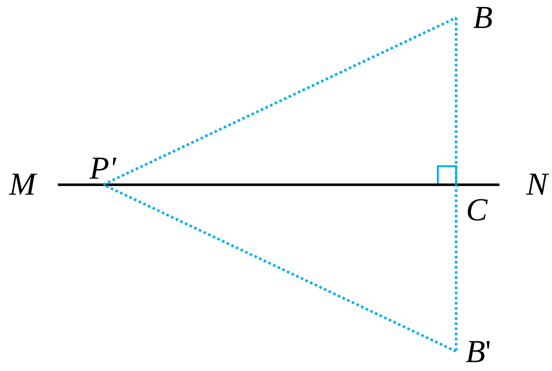
(3) (a) 透過上述情況，你觀察到點 P 有甚麼幾何特性？

(b) 開啟檔案 ShortestDistance4.ggb，移動點 A 和 B 到不同的位置並找出最佳地點 P 的位置，以驗證你的觀察。

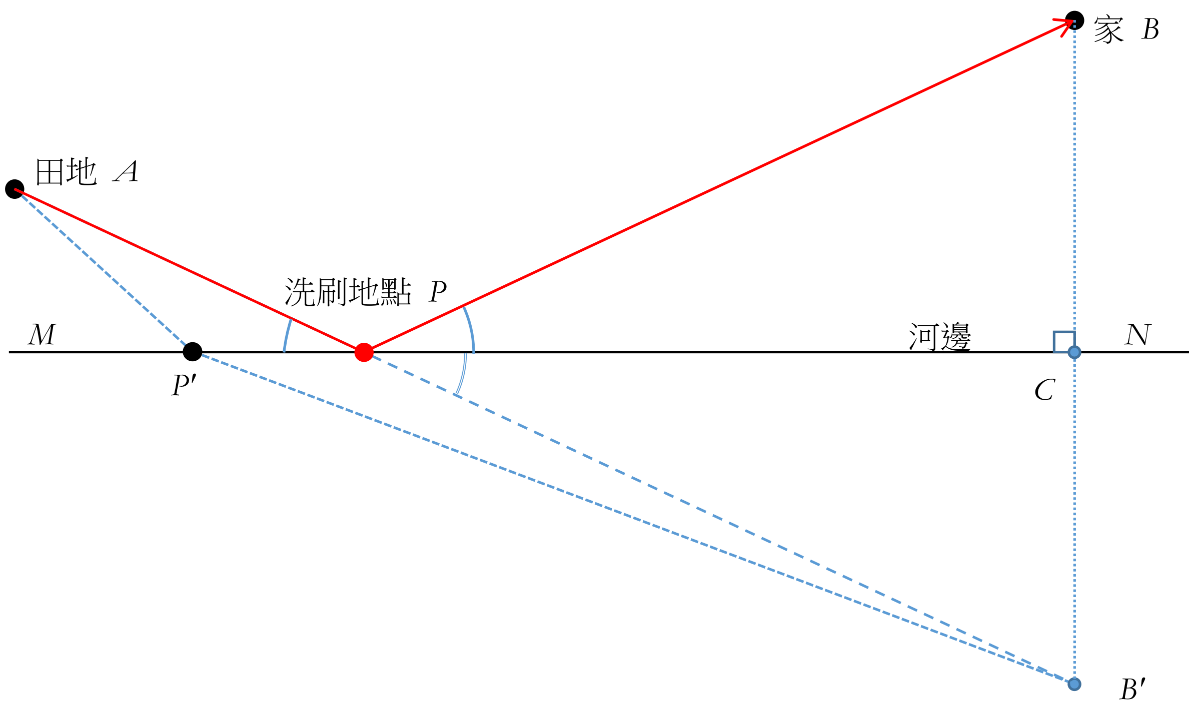
以尺規作圖找出最短路徑

(1) 利用全等三角形的性質，證明若點 P 為前述問題的最佳地點時，路徑 AP 和河邊形成的角與路徑 BP 和河形成的角相等。

(a) 設 B' 為圖中的一點使 $BB' \perp MN$ 及 $BC = B'C$，其中 C 為 BB' 與 MN 的交點，對 MN 上的任意一點 P'，若 P' 與 C 不重合，證明 $\Delta BP'C \cong \Delta B'P'C$。



(b) 開啟 ShortestDistance4.ggb，並點選「顯示最佳位置 P 及 $AP + PB$ 的距離」及「顯示 B' 及 PB'」。試指出點 P 為最佳地點的條件，並提供證明，即證明無論 P' 的位置在哪裡，$AP' + P'B \geq AP + PB$。



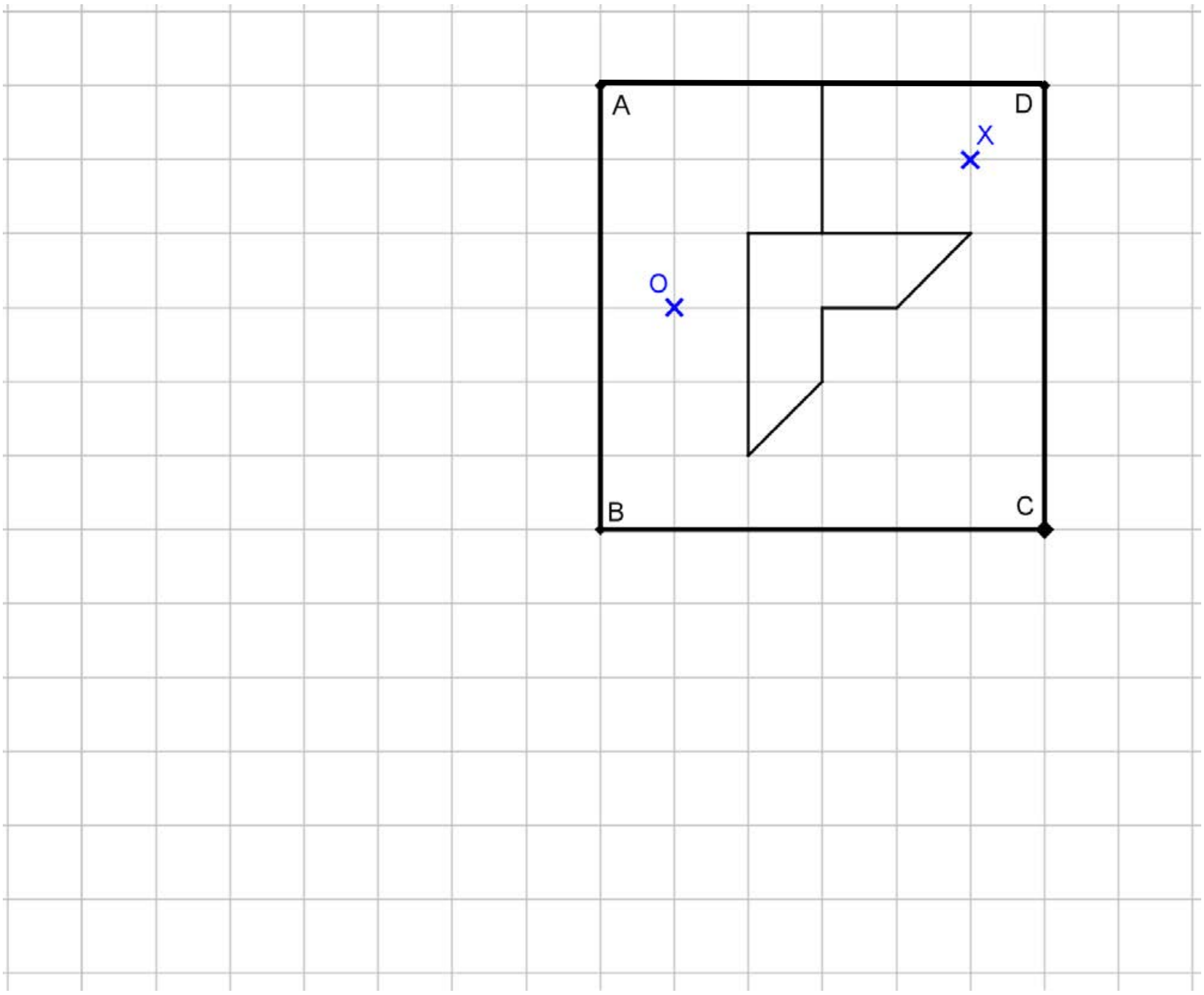
P 為最佳位置的條件：________________________

(c) 對於任意的點 A 和點 B，以尺規作圖在下圖找出最佳地點 P 的位置及畫出最短路徑。

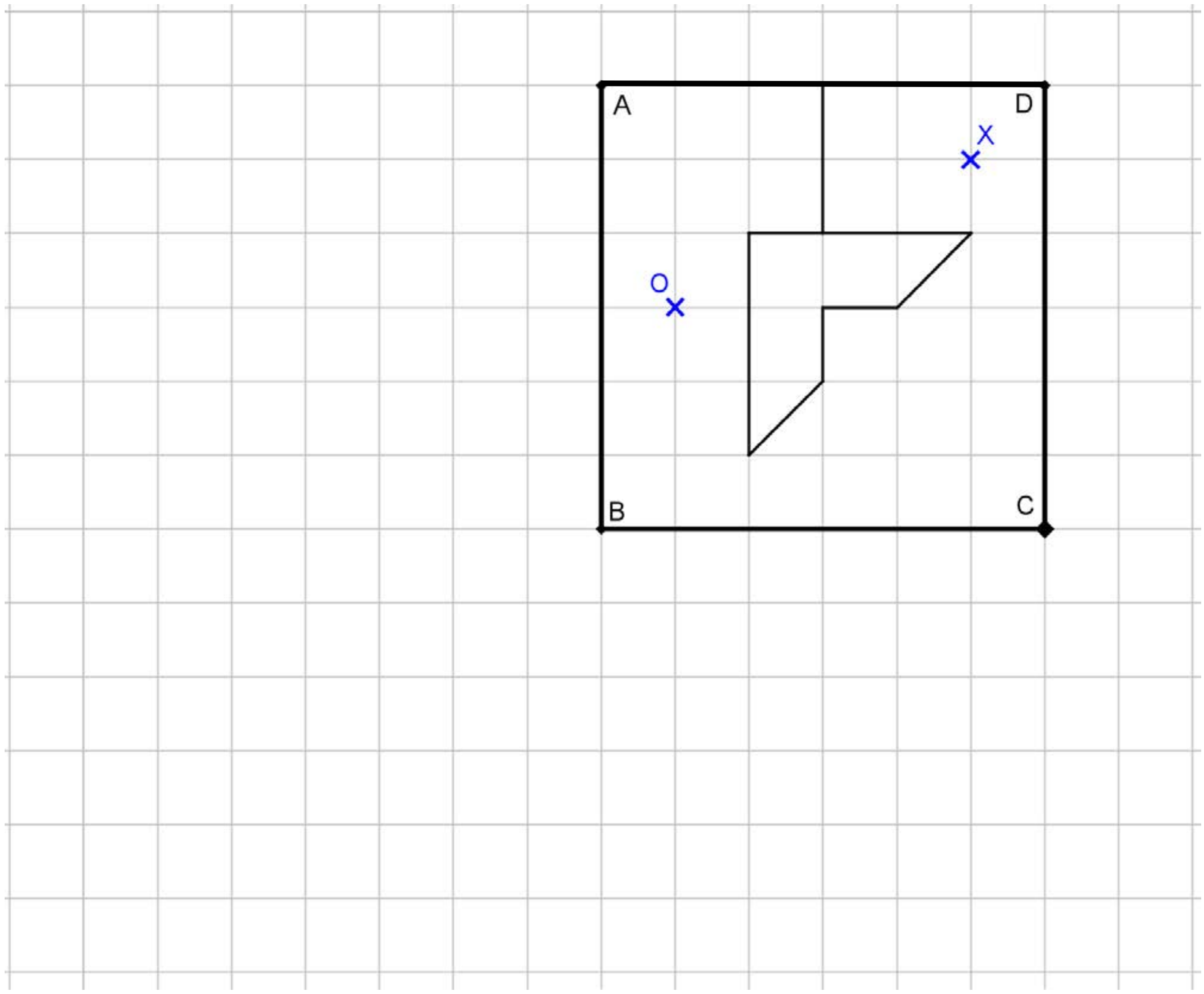
(d) 證明 $\angle APM = \angle BPN$。

(2) 延伸練習題：

(a) 在圖中，*ABCD* 是一間密封的房間，且所有實線代表不透明的牆壁。房間中點 *O* 和點 *X* 分別是管理員和受監控物件的位置。試在房間中適當位置建議安裝平面鏡，使管理員可由點 *O* 在鏡子上監察點 *X*，並繪畫出該反射路線。



(b) 你還可以再建議另一種安裝平面鏡的方法嗎？試在圖中描述你的建議，並畫出該反射路線。



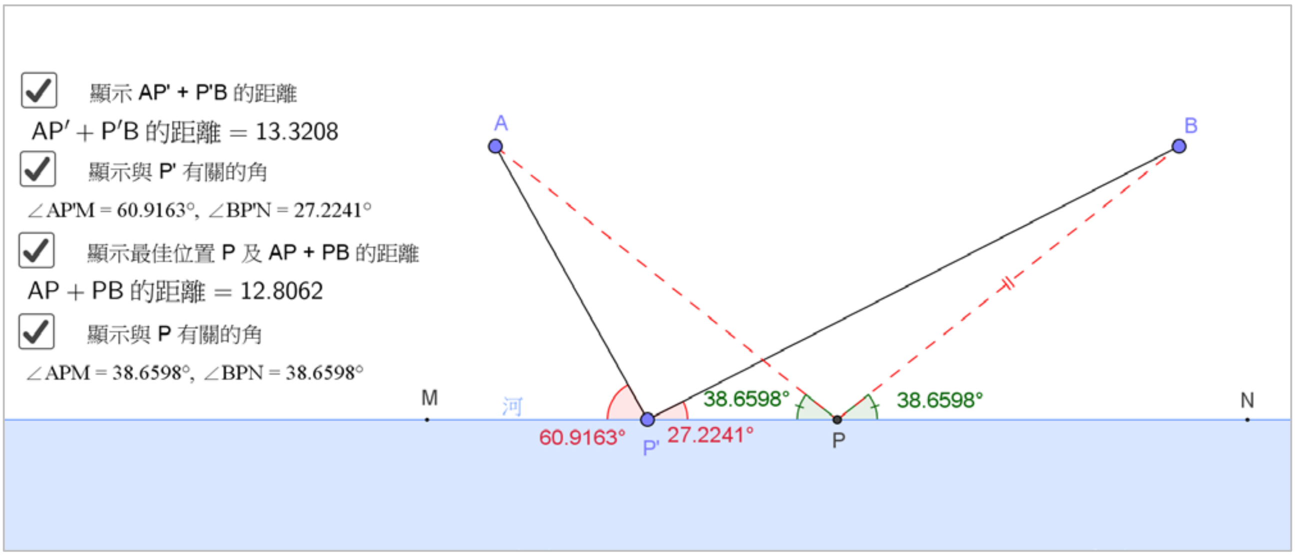
教師注意事項：

1. 類似的問題不時出現於不同的趣味數學書籍。例如：「在河邊建築一座水塔，並從那裡用水管向 A、B 兩個村莊供水。這個水塔應該建築在甚麼地方才能使水管的總長度最短？」[2]

2. 參考答案（工作紙一）

(1) (a) 著色位置為開放題。

(b) 最佳地點 P 的位置的答案根據提供的 GeoGebra 檔案作答。

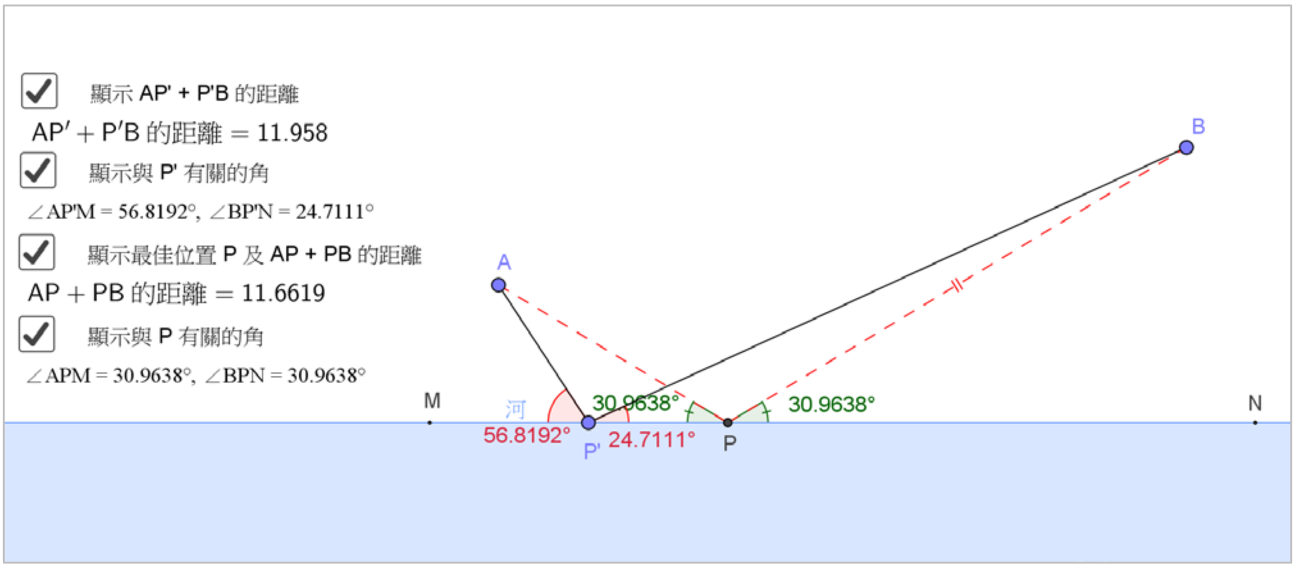


(c) $\angle AP'M$ 及 $\angle BP'N$ 的答案根據提供的 GeoGebra 檔案作答。

(d) 在點 P ，$\angle APM$ 與$\angle BPN$ 是否相等？ 答：是。

(2) (a) 著色位置為開放題。

(b) 最佳地點 P 的位置的答案根據提供的 GeoGebra 檔案作答。



(c) （建議答案）若 A、B 和河邊的距離剛好對調，則點 P 會由較靠近點 A 的一方移到較靠近點 B 的一方，且對調前點 P 與點 A 的距離現在會與點 B 的距離相同。

---

[2] 取自 Perlman, Y（原著），戴中器譯（2000）：《趣味幾何學》，臺北：九章出版社，頁 282-283。

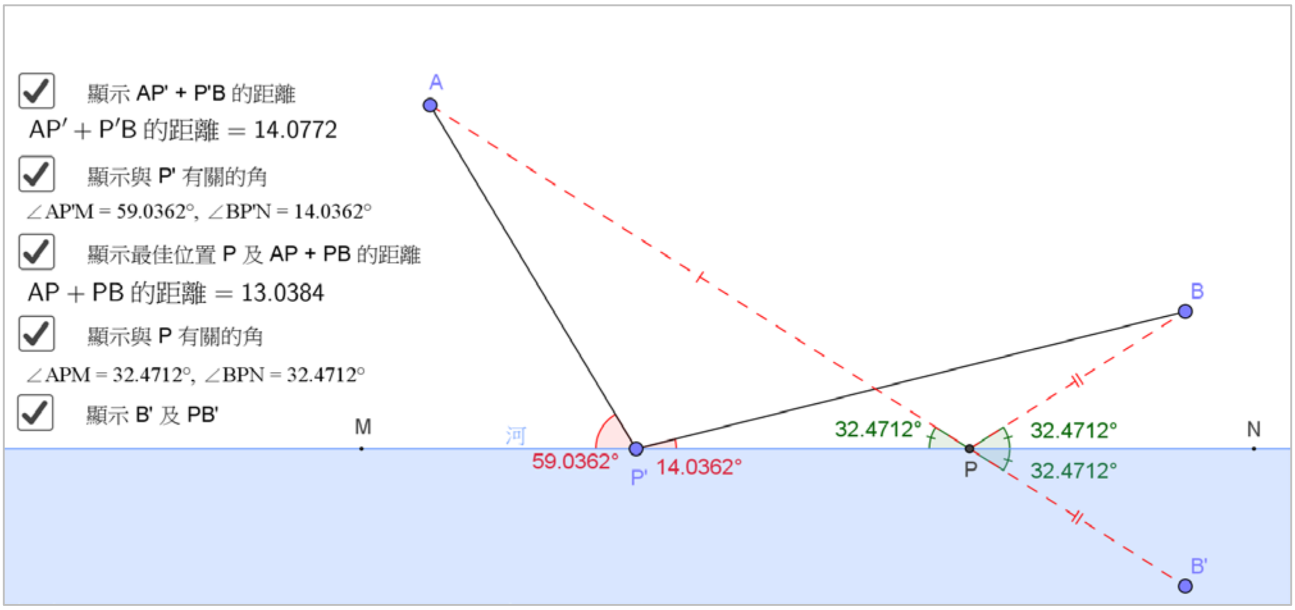
(d) $\angle AP'M$ 及 $\angle BP'N$ 的答案根據提供的 GeoGebra 檔案作答。

(e) 在點 P，$\angle APM$ 與$\angle BPN$ 是否相等？ 答：是。

(f) **（開放題，建議答題方向）**透過在學生考慮因應點 A、B 和河邊的距離的不同而估計最佳位置的活動，期望學生能指出點 P 的位置相對地會較接近與河邊距離較小的一點。如 (1) 的情況，由於點 A、B 和河邊的距離相等，因此點 P 應大約在 A、B 的中間，而 (2) 的情況，因為點 A 較近河邊，因此點 P 的位置應在 A、B 之間較接近 A 的位置，反之若 A、B 和河邊的距離的位置對調，點 P 的位置亦會相應對調至較接近 B 的位置。

(3) (a) **（開放題，建議答題方向）**學生應能透過觀察發現$\angle APM$ 等於$\angle BPN$ 的特徵，從而猜想對於任意的點 A 和點 B，其最佳地點 P 的位置均有$\angle APM$ 等於$\angle BPN$ 的幾何特性。

(b) 最佳地點 P 位置的答案根據提供的 GeoGebra 檔案作答。



3. 參考答案（工作紙二）

(1) (a) 設 B' 為圖中的一點使 $BB' \perp MN$ 及 $BC = B'C$，其中 C 為 BB' 與 MN 的交點。

對 MN 上的任意一點 P'，若 P' 與 C 不重合，

$P'C = P'C$ （公共邊）

$\angle P'CB = \angle P'CB'$ （已知）

$BC = B'C$ （已知）

$\therefore$ $\Delta BP'C \cong \Delta B'P'C$ （S.A.S.）

(b) 從 GeoGebra 檔案，點 P 為最佳地點的條件是 A、P、B' 共線。

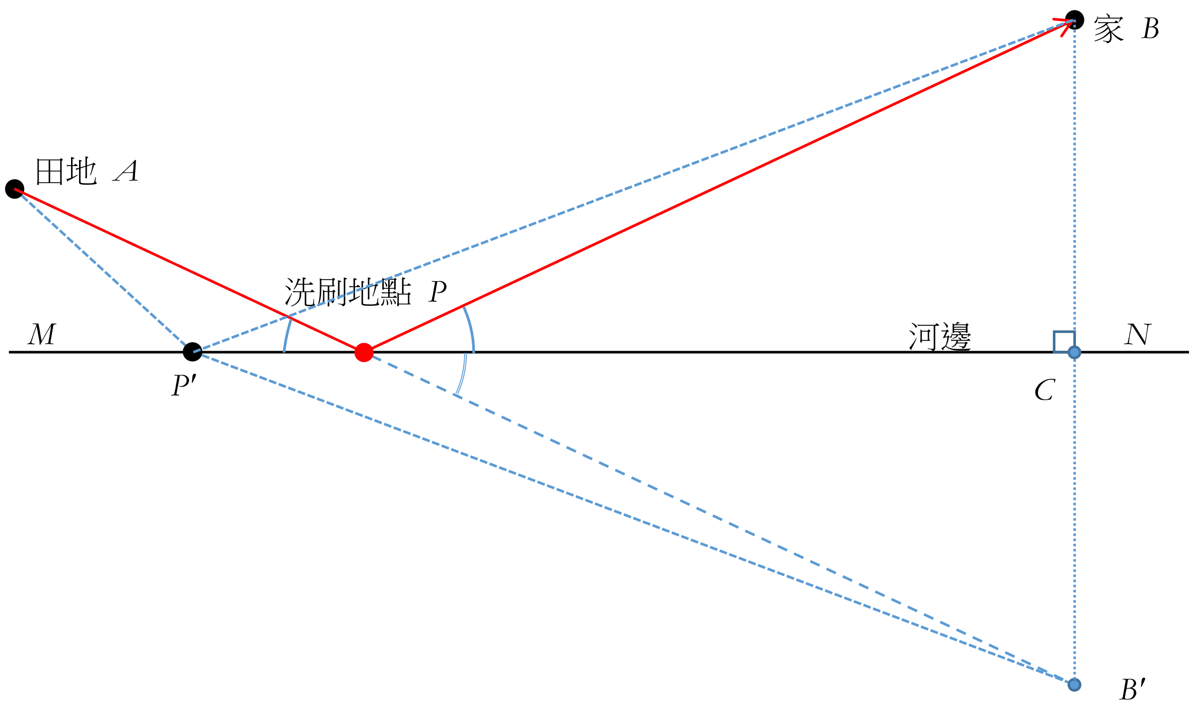
設 P' 為 MN 上任意一點。

由 (a)，$PB = PB'$ 及 $P'B = P'B'$ （全等三角形的對應邊），

由於三角形不等式，$AP' + P'B' \geq AB' = AP + PB'$，

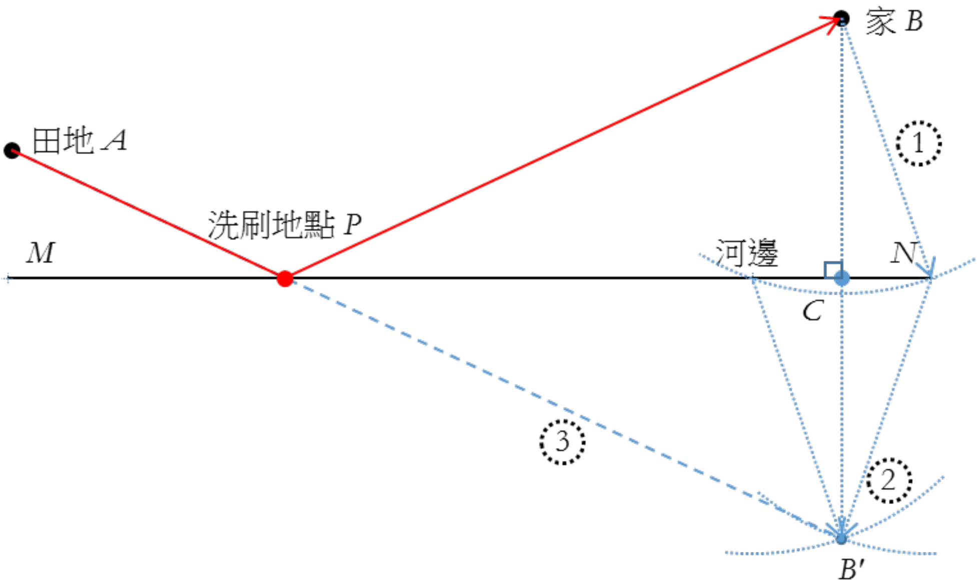
且 $AP' + P'B = AP' + P'B'$ 及 $AP + PB' = AP + PB$

因此 $AP' + P'B \geq AP + PB$，即 $AP + PB$ 為最短路徑。



P 為最佳位置的條件：<u>A、P、B' 共線。</u>

(c) 對於任意的點 A 和點 B，以尺規作圖在下圖找出最佳地點 P 的位置的步驟：



① 以 B 為圓心，取某一比 B 與 MN 距離大的長度為半徑，作弧與 MN（或其延線相交於兩點。

② 以同一半徑，以步驟 ① 所得的兩點為圓心作兩弧相交於 MN 的另一側，得交點 B'。

③ 連結 A 與 B' 與 MN 相交，得點 P。作圖完成。

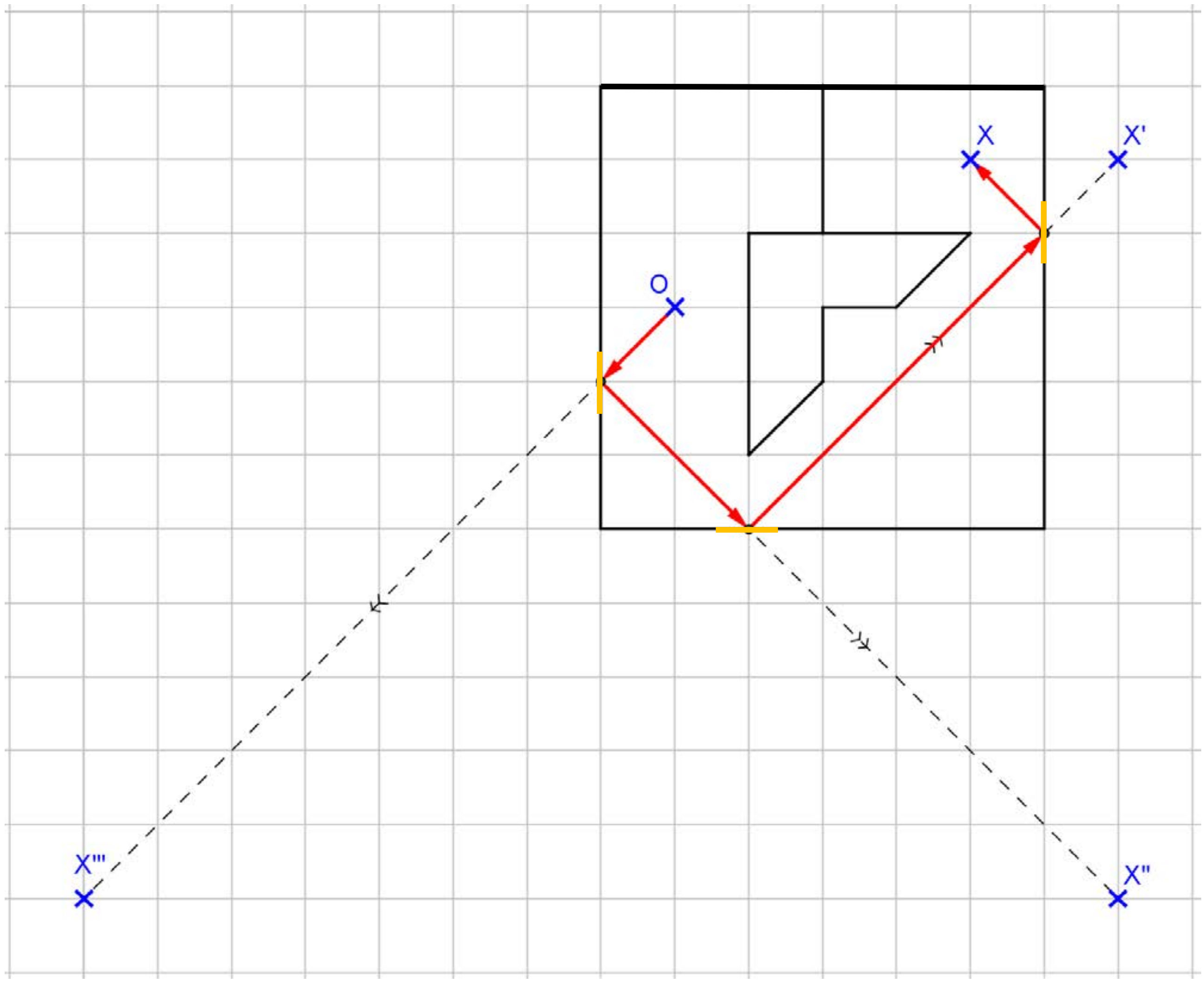
(d) 由於 $\angle APM = \angle B'PC$ （對頂角）

及 $\angle BPC = \angle B'PC$ （全等三角形的對應角），

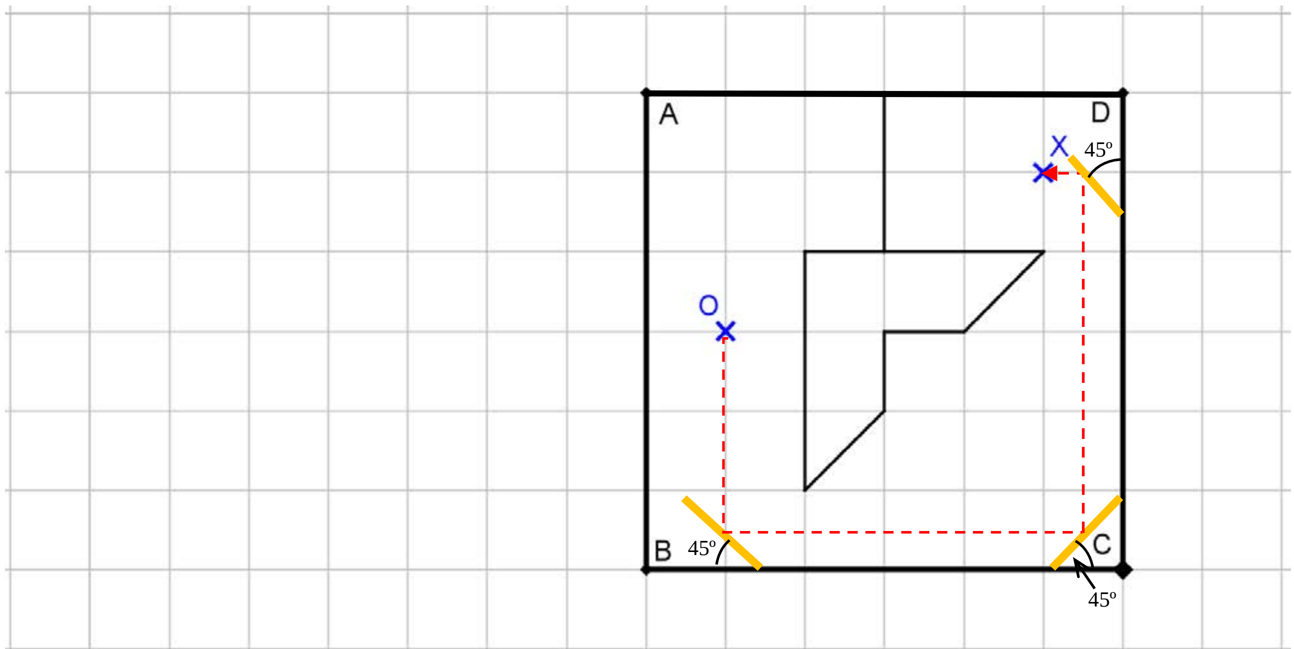
$\therefore$ $\angle APM = \angle BPC = \angle BPN$

(2) 延伸練習題：

(a) (橙色線段表示平面鏡的位置)



(b) (以下例子僅供參考，學生可提出其他可行答案)



4. 教師可與學生討論古希臘的數學家如歐幾里得（Euclid）、托勒密（Ptolemy）等已觀察到上述的最短路徑和光線經鏡面反射時的路徑一致，從而利用幾何學中的最短路徑，並入射角 = 反射角的幾何特質，描述光學中的反射原理。

5. 教師可簡介高錕在光纖的研究和在現實生活的應用（例如：「傑出華人系列：高錕-光纖之父」 http://www.rthk.hk/tv/dtt31/programme/successstories2000），亦可要求學生搜集光纖在電訊和醫療上（例如：內窺鏡檢查）的應用等。