

探究最大步行速度與腿部長度的關係

學習階段： 4

學習範疇： 數與代數

學習單位： 函數及其圖像
指數函數與對數函數
直線方程

目標： 透過數學模型解釋現實生活情境中的一些現象

先備知識： (i) 認識函數的概念
(ii) 理解指數函數和對數函數
(iii) 理解直線方程

與其他 STEM 教育的學習領域的關係：

高中物理科必修部分中「力和運動」內的「勻速圓周運動」

背景資料：

當你匆忙到某處時，你可能要急步行走。你有沒有留意無論你怎樣行，你的步行速度總會受限制。這正好表示每個人各有自己的最大步行速度。 你可能會同意如果你的腳長些，你的最大步行速度會大些。對於最大步行速度和腿長，兩者之間是否存在線性關係？ 在這活動中，學生將探索一個合適的簡單模型以表示最大步行速度和腿長之間的關係。

活動詳情：

活動 1：

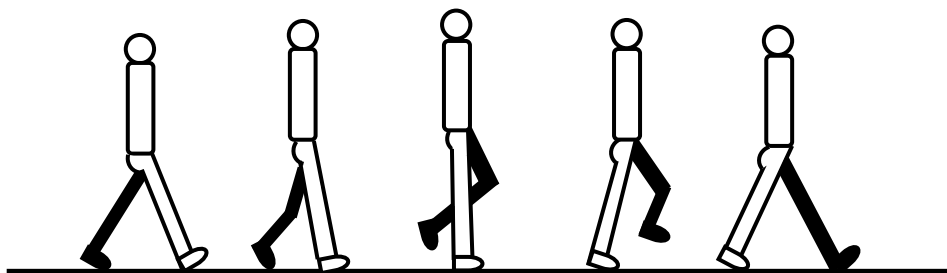
1. 將全班學生(please amend for the rest)分成小組（每組宜不多於四人）。
2. 在每組中，每位學生須在一條 10 米直路上以最快速度步行 3 次，並紀錄其步行時間。
3. 在每組中，每位組員的腿長會以量度左右腿部的長度並取其平均值作計算。至於每條腿的長度是當每位組員直立時，由髖關節至腳底垂直量度所得。
4. 將從以上第 2 和第 3 項所得的相關數據紀錄在以下的試算表內：

組別 _____					
組員名稱	組員的腿部的長度 L m	步行距離 D m	步行時間 t s	最大步行速度的近似值 $\frac{D}{t}$ m/s	平均速度 V m/s (= $\frac{(i)+(ii)+(iii)}{3}$)
		10		(i)	
		10		(ii)	
		10		(iii)	
		10		(i)	
		10		(ii)	
		10		(iii)	
		10		(i)	
		10		(ii)	
		10		(iii)	
		10		(i)	
		10		(ii)	
		10		(iii)	
		10		(i)	
		10		(ii)	
		10		(iii)	

教師注意事項：

- 由於有些人的左右腿部的長度並不相同，為取得更加準確的數值，每位組員的腿長定義為左腿腿長和右腿腿長的平均值。
- 腿長（以米為單位）的量度須準確至 3 位有效數字；時間（以秒為單位）的量度須準確至個位。
- 在活動 1 中，關於步行方面有一些要求：
 - 當組員沿 10 米直路步行時，他們不能跑或甚至左右擺動臀部。
 - 步行姿態須如下：
 - 當一隻腳提起時，另一隻腳須在地上。
 - 當一隻腳在地上時，其腳要直並且身體以此腳的腳掌作圓心以圓弧的形狀上升及下降。

以下是相關的圖示：



4. 教師可製作網上的 Google 表格。每組的學生可運用平板電腦在 Google 表格內輸入有關腿長 L m 和所需的時間 t s。

活動 2：

1. 教師從活動 1 收集所有組別的試算表並合併為一個新的試算表。
2. 教師引導學生從新的試算表抽取腿部長度 L m 和對應的平均速度 V m/s 並以動態數學軟件繪製以 V 對應 L 的圖像。
3. 透過動態數學軟件，每組學生可驗證線性函數模型，即 $V = mL + c$ ，其中 m 和 c 是常數，是否適合描述 V 和 L 的關係。
4. 若線性函數模型並不合適，學生須驗證其他函數模型以找出其中一個模型其圖像能對所有點 (L, V) 作最佳擬合。根據學生對於函數和指數的數學知識，他們可嘗試對以下的函數作相關的探究：
 - $V = aL^2 + bL + c$ ，其中 a, b 和 c 是常數；
 - $V = ab^L$ ，其中 a 和 b 是常數；
 - $V = kL^n$ ，其中 k 和 n 是常數；
 - $V = a \log_b L$ ，其中 a 和 b 是常數。
5. 經過相關的探究活動後，每組須提出合適的模型以說明最大步行速度與腿部長度的關係。

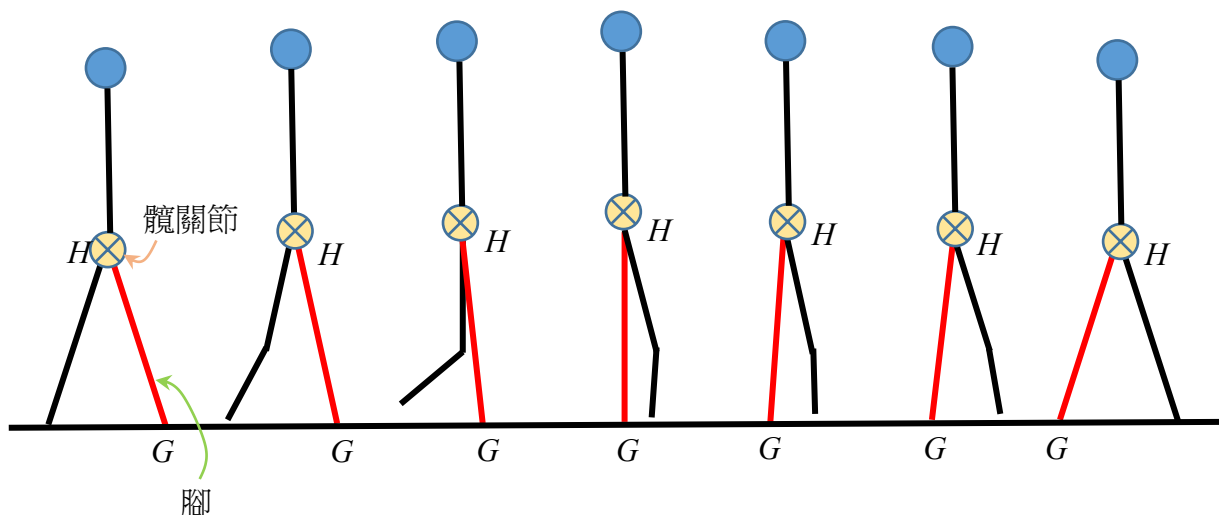
教師注意事項：

對於活動 2，教師應合併由組別得來的所有相關數據並指導學生抽取腿長 L m 和對應的平均速度 V m/s 並輔以動態數學軟件，諸如 GeoGebra，Desmos 等繪製以 V 對應 L 的圖像。同時，教師亦應引導學生運用動態數學軟件中的滑動條求一

個合適的函數，其圖像能對所有點 (L, V) 作最佳擬合。

活動 3 (增潤：對於修讀物理的同學)：

根據在活動 1 中的教師注意事項所提供的步行姿態，人類的步行被模擬為髖關節 H 以腳 G 為圓心和 HG 為半徑作圓弧運動，如下圖所示：



假設

- (i) H 是髖關節，亦是身體的重心所在。
- (ii) H 以 G 為圓心、 HG 為半徑繞 G 作勻速圓周運動。

設 l m、 v m/s 和 a m/s² 為 HG 的長度、 H 的速度和 H 向 G 的加速度。

- (a) 以 a 和 l 表示 v 。
- (b) 假設當 H 在 G 懸垂線上而 H 的向下加速度又不大於重力加速度 g ，證明

$$v \leq g^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}。$$

- (c) 根據 (b)，建議一個合適的函數以表示 L 和 V 的關係並且與活動 2 所得的函數作比較，看看此函數是否更能配合數據。

教師注意事項：

- 1. 對於活動 3，
 - (a) 運用勻速圓周運動中向心加速度公式，

$$a = \frac{v^2}{l}$$

$$v = \sqrt{al}$$

$$v = a^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}$$

(b) 因 H 在 G 懸垂線上而 H 的向下加速度又不大於重力加速度，運用勻速圓周運動中向心加速度公式，我們得：

$$\frac{v^2}{\ell} \leq g$$

$$v \leq \sqrt{g\ell}$$

$$v \leq g^{\frac{1}{2}} \ell^{\frac{1}{2}}$$

(c) 已假設 H 以速度 v m/s 繞 G 作勻速圓周運動。因步行的速度是以水平方向，其速度須少於或等於 v m/s。運用 (b)， $V = kg^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$ ，其中 k 是一個常數，可作為描述 L 和 V 的關係一個合適的函數。

2. 從活動 2 得出的結果可能和以上函數不同，這是由於：
 - (i) 存在量度誤差；
 - (ii) 學生步行的姿態和建議的模型不同，諸如，當步行時，雙腳沒有伸直或臀部擺動。
 - (iii) 有些學生跑步而並非步行。
3. 教師須注意在活動 1 要求特定的步行姿態是為了能與活動 3 的結果作比較。教師可選取其他步行姿態而使學生能嘗試驗證其他關於最大步行速度與腿長的關係的模型。

參考資料：

1. Harrison, A. J., Molloy, P. G., & Furlong, L-A. M. (2016). Does the McNeill Alexander model accurately predict maximum walking speed in novice and experienced race walkers? *Journal of Sport and Health Science*, 7, 372-377
2. McNeill, A. R. (1996). Walking and running. *The Mathematical Gazette*, 80, 262 – 266
3. McNeill, A. R. (2001). *Modelling, Step By Step*. Retrieved 21 December 2018 from Plus Magazine Web site:
<https://plus.maths.org/content/os/issue13/features/walking/index>