

探究距離量度應用程式的誤差

學習階段： 3

學習範疇： 度量、圖形與空間
(學習單位：量度的誤差、三角學)

目標： (i) 加深對量度的誤差的概念
(ii) 應用數學知識和計算思維來設計有用的應用程式

先備知識： (i) 求量度的百分誤差
(ii) 運用三角學求直角三角形的未知邊長和角度

其他 STEM 教育學習領域的相關內容：

科技教育學習領域《科技教育學習領域課程指引（小一至中六）》（課程發展委員會，2017）中的「(K2) 程序編寫」學習元素

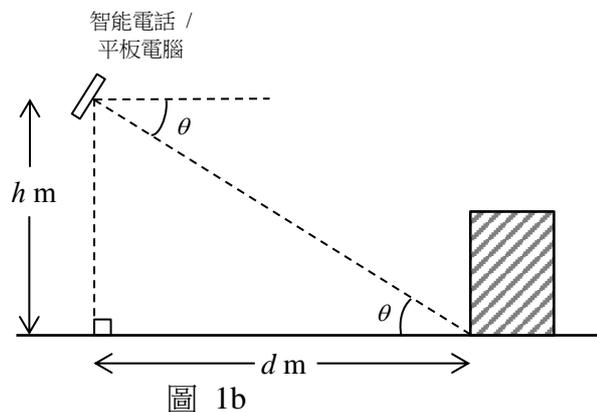
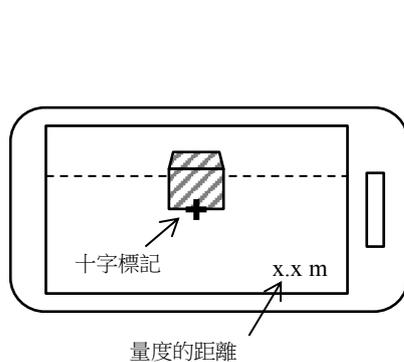
教學資源：

安裝了距離測量應用程式的平板電腦或智能電話（這些應用程式應按本示例中描述的原理操作，例如 Smart Measure）

活動詳情：

活動一

1. 教師引導學生探究應用程式如何計算物件與使用者之間的距離。
2. 每個學生都將平板電腦或智能電話保持在他/她的視線高度，並將屏幕上的十字標記對準鄰近物件的底部（例如課室的門），該應用程式即會顯示學生與該物件的距離（如圖 1a 和 1b 所示）。



在圖 1b：

θ ：由智能電話 / 平板電腦至測距物件底部的俯角

h ：測距儀器至水平地面的高度（通常假定為使用者的視線高度）

d ：物件與使用者的距離

3. 教師為學生提供以上數字，並要求他們回答以下問題。
 - a. 運用三角學，寫出以 h 和 θ 表達距離 d 的公式。
 - b. 應用程式的使用者和測距物件應否位於同一水平面？
 - c. 建議一些量度誤差的來源。

教師注意事項：

1. 上述問題的建議答案為：

- a.
$$d = \frac{h}{\tan \theta}$$

- b. 測距物件和應用程式的使用者應位於同一水平面，否則 h 不是物件底部與測距儀器之間的垂直距離。
 - c. 計算出的誤差可能是由於在屏幕上的十字標記未能對準（由手持引致的搖晃造成），或智能電話的傳感器不準確，而導致的俯角的量度誤差；以及因使用者輸入不準確的高度令視線高度有誤差所致。

2. 教師應在課堂前在平板電腦 / 智能電話預先下載所需的測距應用程式。

活動二

1. 教師引導學生探究由手持引致的搖晃而造成的俯角的量度誤差，對應用程式計算距離的影響。假設 h 是實際的高，而因手持引致的搖晃而造成的俯角的量度誤差在任何俯角 θ 也是相同的，我們可以通過考慮由實際俯角 $+0.5^\circ$ 和 -0.5° 的誤差，計算距離的離差。學生須探究這個距離的差距（以 $L_{\pm 0.5^\circ}$ 表達）在不同的俯角時的值（如圖2）。

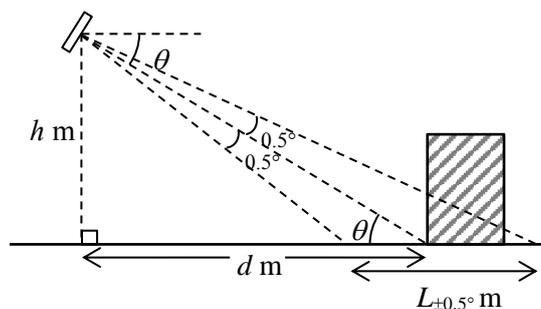


圖 2

2. 教師引導學生用俯角 (θ) 和視線高度 (h) 表示 $L_{\pm 0.5^\circ}$ 。
3. 教師可以向學生介紹以百分數的模式表示 $\frac{L_{\pm 0.5^\circ}}{d}$ ，並以這個與相對誤差相似的概念，顯示在不同俯角 θ 計算距離時，距離的離差相對於距離有多大的影響。
4. 學生可以運用電子試算表找出在不同 θ 值的 $L_{\pm 0.5^\circ}$ 和相應的百分離差，以方便他們進行探究活動。
5. 學生使用以下電子試算表。假設應用程式的使用者的視線高度為 1.5 m，學生須在試算表內設立公式，計算 $L_{\pm 0.5^\circ}$ 和相應的百分離差。

θ	$\tan \theta$	$\tan(\theta + 0.5^\circ)$	$\tan(\theta - 0.5^\circ)$	$L_{\pm 0.5^\circ}$	百分離差 $\frac{L_{\pm 0.5^\circ}}{d}$
5					
10					
15					
⋮		⋮		⋮	
85					

6. 討論問題：
 - a. 距離的百分離差是否對所有 θ 的值也相同？在哪個 θ 值的範圍內應用程式的準確性較低？
 - b. 距離的百分離差與 h 之間有什麼關係？

教師注意事項：

1. $L_{\pm 0.5^\circ}$ 的值僅用於研究 θ 的誤差如何影響 d 的計算值，而不是 d 的量度誤差。

$$2. \quad L_{\pm 0.5^\circ} = \frac{h}{\tan(\theta - 0.5^\circ)} - \frac{h}{\tan(\theta + 0.5^\circ)} \quad \text{及}$$

$$\text{百分離差} = \frac{L_{\pm 0.5^\circ}}{\frac{h}{\tan \theta}} = \frac{\tan \theta}{\tan(\theta - 0.5^\circ)} - \frac{\tan \theta}{\tan(\theta + 0.5^\circ)}$$

3. 一般而言，電子試算表軟件通常以弧度作為角度的量度單位。由於學生未學過度數和弧度之間的轉換，老師應為學生提供求 $\tan \theta$ 的公式。此外，老師亦可為難以設定電子試算表內公式的學生提供下列公式。

值	應對公式	備註
$\tan \theta$	$=\text{TAN}(A2*\text{PI}()/180)$	A2: θ
$\tan (\theta + 0.5^\circ)$	$=\text{TAN}((A2+0.5)*\text{PI}()/180)$	
$\tan (\theta - 0.5^\circ)$	$=\text{TAN}((A2-0.5)*\text{PI}()/180)$	
$L_{\pm 0.5^\circ}$	$=(G2/D2)-(G2/C2)$	C2: $\tan (\theta + 0.5^\circ)$ D2: $\tan (\theta - 0.5^\circ)$ G2: h
百分離差	$=E2*B2/G2$	B2: $\tan \theta$ E2: $L_{\pm 0.5^\circ}$ G2: h

4. 當視線高度為 1.5 m，對於不同 θ 的值， $L_{\pm 0.5^\circ}$ 及對應的百分離差的值分別為：

	A	B	C	D	E	F	G
1	θ°	$\tan \theta$	$\tan (\theta + 0.5^\circ)$	$\tan (\theta - 0.5^\circ)$	$L_{\pm 0.5^\circ}$	百分離差	視線高度
2	5	0.087	0.096	0.079	3.481	20.3%	1.5
3	10	0.176	0.185	0.167	0.870	10.2%	1.5
4	15	0.268	0.277	0.259	0.391	7.0%	1.5
5	20	0.364	0.374	0.354	0.224	5.4%	1.5
6	25	0.466	0.477	0.456	0.147	4.6%	1.5
7	30	0.577	0.589	0.566	0.105	4.0%	1.5
8	35	0.700	0.713	0.687	0.080	3.7%	1.5
9	40	0.839	0.854	0.824	0.063	3.5%	1.5
10	45	1.000	1.018	0.983	0.052	3.5%	1.5
11	50	1.192	1.213	1.171	0.045	3.5%	1.5
12	55	1.428	1.455	1.402	0.039	3.7%	1.5
13	60	1.732	1.767	1.698	0.035	4.0%	1.5
14	65	2.145	2.194	2.097	0.032	4.6%	1.5
15	70	2.747	2.824	2.675	0.030	5.4%	1.5
16	75	3.732	3.867	3.606	0.028	7.0%	1.5
17	80	5.671	5.976	5.396	0.027	10.2%	1.5
18	85	11.430	12.706	10.385	0.026	20.1%	1.5

5. 討論問題的建議答案：
- 當角度接近 0° 和 90° 時，距離的百分離差較大，因此在使用應用程式測量遠離或靠近使用者的物體的距離時，準確度會較低。
 - 距離的百分離差與視線高度 h 的值無關。

活動三

- 如果學生有興趣，老師可以要求學生進一步調查：
 - 學生可以探究視線高度 (h) 的量度誤差如何影響物件距離的計算結果。
 - 學生可以通過測量放置在某個預設距離（例如 0.3m、1.5m 和 5m）外的物件，來驗證關於活動二中關於距離的百分離差與俯角之間關係的結論。

2. (挑戰活動) 學生可以製作一個距離測量應用程式，並顯示距離的百分離差供使用者參考。

教師注意事項：

1. 教師可要求學生分組探究。
2. 老師應給予學生足夠的機會讓他們自行討論並得出結論，而不是給他們直接的提示。
3. 教師可進一步解釋 d 的誤差與 h 的誤差之間的關係，即假設 θ 是準確的，則 d 的百分誤差等於 h 的百分誤差。這是因為對於任何俯角的量度：

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\frac{h + \Delta h}{\tan \theta} - \frac{h}{\tan \theta}}{\frac{h}{\tan \theta}} = \frac{\Delta h}{h}$$

其中 Δd 和 Δh 分別代表 d 和 h 的誤差。

4. 測量應用程式在今時今日被廣泛使用，教師可以鼓勵學生從互聯網上發現更多測量應用程式並研究其運作原理。

本示例主要涉及以下共通能力：

1. 溝通能力
 - 理解、分析並回應老師的口頭指示和工作紙上的說明
 - 使用適當的語言和數學方法來表示計算方法和結果
2. 明辨性思考能力
 - 理解距離測量應用程式的局限
 - 根據足夠的數據和證據作出合理的結論
 - 通過比較不同俯角的百分離差，評論距離測量應用程式在不同俯角的表現
3. 運用資訊科技能力
 - 使用距離測量應用程式進行探究活動