

線性規劃與食物攝取量

- 學習階段: 4
- 學習範疇: 數與代數
- 學習單位: 線性規劃
- 目標: 應用線性規劃現實生活中的問題
- 先備知識:
- (i) 理解二元一次不等式
 - (ii) 在平面上表示二元一次不等式的圖象
 - (iii) 解聯立二元一次不等式

與其他 STEM 教育的學習領域的關係:

- (i) 生物課程(中四至中六)學習內容「動物維持生命的活動」的課題「人的營養」
- (ii) 初中科學(中一至中三)單元十二「健康的身體」的課題「營養與健康」

活動詳情:

食物的基本營養素包括碳水化合物，蛋白質，脂肪，維生素等。身體需要從食物中獲取適量的營養，以維持細胞和器官的正常功能，並促進身體的發育和生長。

若已知某些食品的不同營養成份，我們應如何選取食物以滿足由政府 and 專家所建議有關營養攝取量的限制，並同時盡量減省當中的支出?

活動一

1. 教師分發資料頁予學生。資料頁包含十種受歡迎的食物的重量、價格和由營養標籤所展示的營養成分。每一個營養標籤包含最少以下六項資料:

能量 (卡路里)	蛋白質 (克)	糖 (克)
碳水化合物 (克)	脂肪 (克)	鈉 (毫克)

資料頁亦包含由世界衛生組織和香港特別行政區政府衛生署所建議成年人對不同營養成分的每日攝取量的上限或下限。

2. 教師可要求學生由 1 至 10 排列十種食物的次序 (1 代表最喜歡吃，10 代表最不喜歡)，把數字寫在資料頁上食物名稱的上方。
3. 學生須參考資料頁所示各種營養的攝取量的限制，並以滿足以下條件為目標，求他們最喜歡的兩款食物(即標記 1 和 2 的食物)的數量:
 - a) 如果您要同時滿足 **最低能量攝取量** 和 **最低蛋白質攝取量**，試求滿足條件的

- i. 最低消費成本，及
 - ii. 對應的食物數量。
- b) 如果您要同時滿足 **最低蛋白質攝取量** 和不超越 **最高鈉攝取量**，試求滿足條件的
- i. 最低消費成本，及
 - ii. 對應的食物數量。
- c) 如果您要同時滿足 **最低能量攝取量** 和不超越 **最高鈉攝取量**，試求滿足條件的
- i. 最低消費成本，及
 - ii. 對應的食物數量。

(注：學生須應用線性規劃解以上三條題目。)

教師備註：

1. 3(a)的樣本答案：

假設某學生選擇了牛肉漢堡包（218 克，每一個 12 元）和豆奶飲料（250 毫升，每盒 5 元）。設 x 為牛肉漢堡包的數量， y 為豆奶的數量，而 $\$C$ 則為食物的總消費。已知要求每天的最低能量和蛋白質攝取量分別為 2,400 千卡路里和 60 克，我們得到

目標函數： $C = 12x + 5y$ (對應直線 $y = -\frac{12}{5}x + \frac{C}{5}$)

約束條件： $512x + 128y \geq 2,400$ 即 $16x + 4y \geq 75$ (能量) ----- (1)

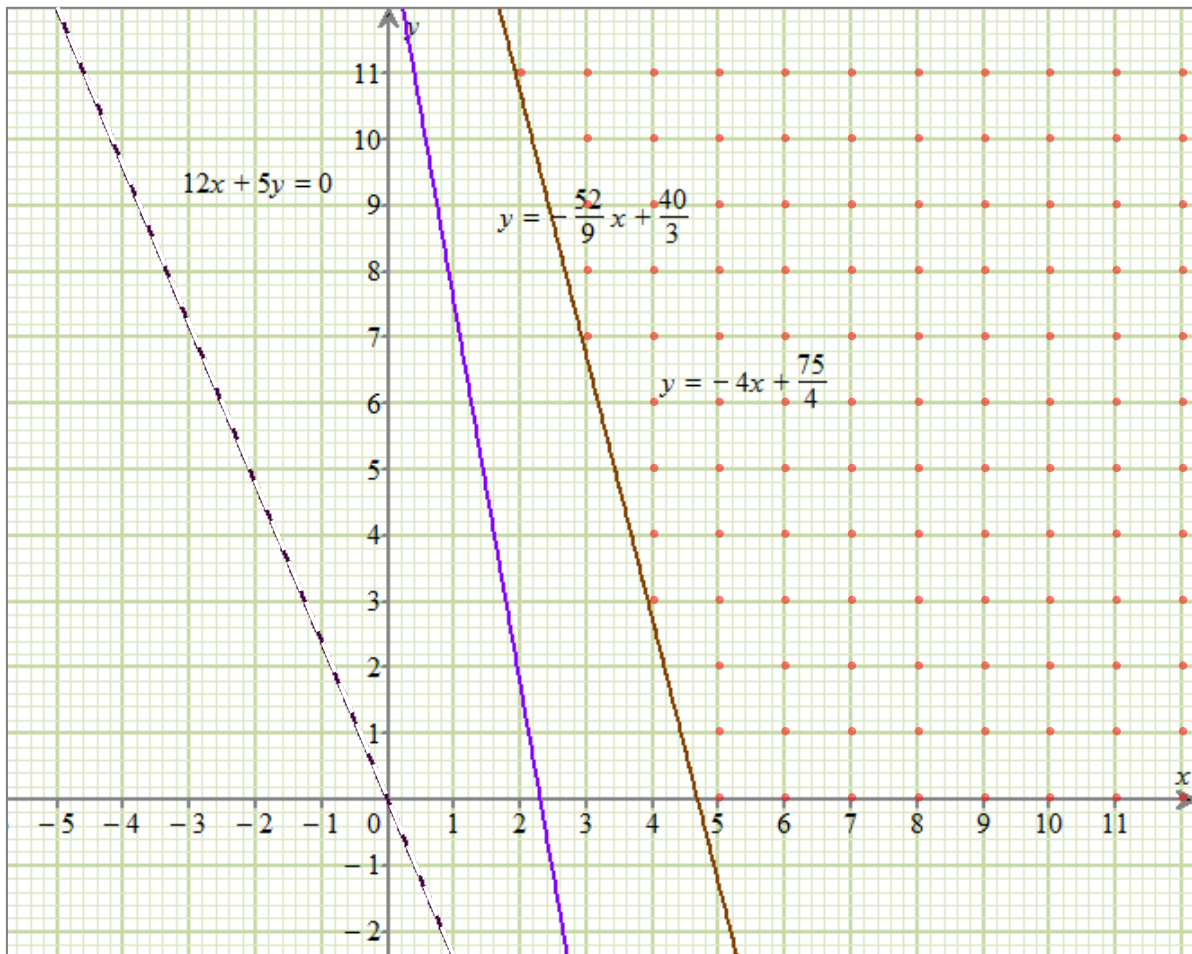
$26x + 4.5y \geq 60$ 即 $52x + 9y \geq 120$ (蛋白質) ----- (2)

$x \geq 0, y \geq 0, x$ 和 y 為非負整數 ----- (3)

將 $16x + 4y \geq 75$ 寫作 $y \geq -4x + \frac{75}{4}$ 和

$52x + 9y \geq 120$ 寫作 $y \geq -\frac{52}{9}x + \frac{40}{3}$

對應邊界和目標函數的線段都繪在下面方格紙上，而可行解則由圖中格點所顯示：



目標函數 蛋白質 能量

將目標函數直線 $12x + 5y = 0$ 移向右側區域，第一個接觸的格點是 $(5,0)$ ，並達到最低消費，即應該購買 5 個牛肉漢堡包和不購買任何豆奶，以滿足有關最低消費成本和營養要求的條件。而 **最低消費** = $[12(5) + 5(0)]$ 元 = 60 元

- 除了選取提供的 10 種食物，學生亦可自由揀選其他食物並從食物標籤搜集相關的營養資料。
- 當考慮更多食物營養的限制、約束條件便會增加，而應用線性規劃求最低消費和對應的食物數量將變得更複雜。

活動二(延伸)

- 若選取多於兩種食物，教師可引導學生繼續探討這問題。
- 教師解說在現實生活中，我們不會局限於選取兩種食物，但數學課程中的線性規劃只涉及處理兩個變量。

3. 教師可引導學生使用 Microsoft Excel 的一個稱為 Solver 的增益集(Add-ins)處理多於兩個變數的優化問題。在附錄中刊有運用 Excel 解難的過程。

教師備註:

1. 教師可要求學生完成以下相類似的題目:

如資料頁所示，學生每日進食須符合五項食物營養要求:

最低的能量攝取量:	2,400 千卡
最低的蛋白質攝取量:	60 克
最低的碳水化合物攝取量:	350 克
最高的脂肪攝取量:	65 公克
最高的鈉攝取量:	2,000 毫克

假設我們能任意選取資料頁的 10 種食物，試求:

- a) 能滿足上述營養要求的最低費用，
 - b) 每種食物的相應數量。
2. 與活動一情況相約，學生可自由選取其他食物來設計餐單，以最少量金錢滿足營養所需。
 3. 學生須擷取使用 Excel Solver 的屏幕資料，和提供其他數值計算過程。

參考資料:

1. 香港特別行政區政府衛生署網站內有關卡路里和食物中的不同營養素的網頁
http://www.change4health.gov.hk/tc/healthy_diet/facts/calories_nutrients/index.html
2. 世界衛生組織網站內有關健康飲食的網頁
<http://www.who.int> (經由連結 “Media centre”, “All WHO fact sheets” 及 “Health and Diet”)

資料頁

(i) 10 種受歡迎的食物及它們的營養資料顯示如下:

食物	可樂汽水 (330 毫升)	麥精維他奶 (250 毫升)	高鈣牛奶 (236 毫升)	即沖麥皮 (30 克)	三文治 (100 克)
	能量 (卡路里)	139	128	94.4	135
蛋白質 (克)	0	4.5	6.8	4	8.4
糖 (克)	35	15	14.9	15	5.1
碳水化合物 (克)	35	19	14.9	23	44.6
脂肪 (克)	0	3.8	0	3	3.6
鈉 (毫克)	13	188	118	150	422
價格 (元)	6	5	7	4	4

食物	餅乾 (100 克)	即食碗麵 (100 克)	即食麵 (100 克)	牛肉漢堡包 (218 克)	蝦肉燒賣 (150 克)
	能量 (卡路里)	275	301	463	512
蛋白質 (克)	4.2	9	10.3	26	17
糖 (克)	38	0.7	2.4	0	4.5
碳水化合物 (克)	64.8	35.2	58.9	40	20.5
脂肪 (克)	0.25	13.8	20.7	27	14.3
鈉 (毫克)	188	1,140	1,936	824	855
價格 (元)	5	7	3	12	8

(ii) 根據世界衛生組織和香港特別行政區政府衛生署的資料，對於一名成人來說，透過一個健康和均衡的餐單，不同營養成分的每日攝取量建議如下:

下限 (十類)		上限 (五類)
能量 \geq 2,400 卡路里	碳水化合物 \geq 350 克	鹽 \leq 5 克
蛋白質 \geq 60 克	蔬菜 \geq 400 克	糖 \leq 50 克
膳食纖維 \geq 25 克	鈣質 \geq 1,000 毫克	脂肪 \leq 65 克
鐵質 \geq 20 毫克	維他命 A \geq 1,000 微克	鈉 \leq 2,000 毫克
維他命 C \geq 75 毫克	維他命 E \geq 20 毫克	膽固醇 \leq 200 毫克/分升

利用 Excel Solver 求解線性規劃問題的程序

本示例使用資料頁中的十種食物進行演示。

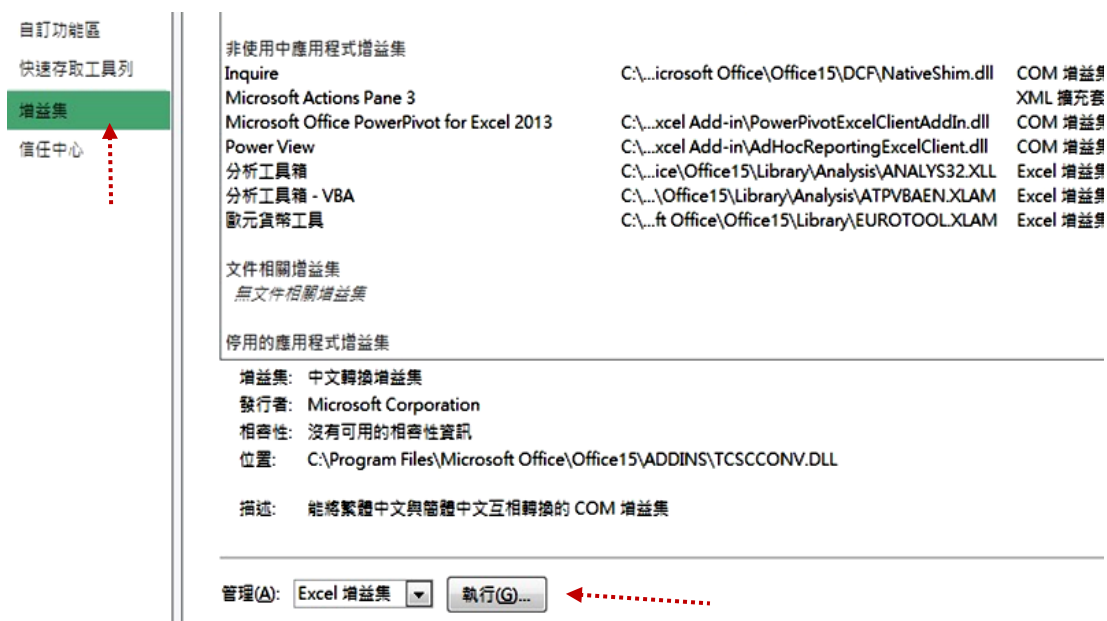
要安裝及使用 Excel 的增益集 Solver 解線性規劃相關的問題，請參考以下的步驟：

步驟一： 開啟 Microsoft Excel，選擇「檔案」，然後點選「選項」。

[對於 Excel 2000 / 2003，點擊上方的「工具」，然後點選「規劃求解」。]

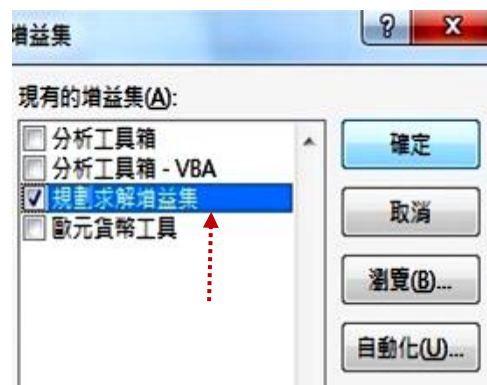


步驟二： 選取左欄的「增益集」，然後從第一個管理項目「Excel 增益集」中選「執行」按鈕，如下圖所示。



步驟三：選擇「規劃求解增益集」，然後按「確定」。

安裝此增益集後，Excel 工具欄上將會出現一個新的 Solver 圖標。以後即使涉及的變量數是多於二，我們也可以點擊它來解決各式各樣有關線性規劃的問題了！



步驟四：建立 Excel 試算表及輸入所有相關原始數據。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2													
3		Soft Drink: Cola	Malted Soya Drink	Calcium Milk	Instant Cereal Drink	Sandwich Bread	Biscuit / Cracker	Bowl Noodle	Instant Noodle	Beef Hamburger	Shrimp Shao Mai	Total	Min / Max Amount
4	Decision Variable	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
5	Cost (\$)	6	5	7	4	4	5	7	3	12	8	0	
6													
7	Energy (kcal)	139	128	94.4	135	248	275	301	463	512	372	0	2400
8	Protein (g)	0	4.5	6.8	4	8.4	4.2	9	10.3	26	22.6	0	60
9	Carbohydrate (g)	35	19	14.9	23	44.6	64.8	35.2	58.9	40	20.5	0	350
10	Fat (g)	0	3.8	0	15	3.6	0.3	13.8	20.7	27	14.3	0	65
11	Sodium (mg)	13	188	118	150	422	188	1,140	1,936	824	855	0	2000
12													

步驟五：在 L5 及 L7 至 L11 六個儲存格內，輸入以下 6 條公式。公式將按第 4 行的食物數量計算購買食物的總金額、能量的總攝取量和四種營養素的總攝取量：

L5 總金額	=B5*\$B\$4+C5*\$C\$4+D5*\$D\$4+E5*\$E\$4+F5*\$F\$4+G5*\$G\$4+H5*\$H\$4+I5*\$I\$4+J5*\$J\$4+K5*\$K\$4
L7 能量的總攝取量	=B7*\$B\$4+C7*\$C\$4+D7*\$D\$4+E7*\$E\$4+F7*\$F\$4+G7*\$G\$4+H7*\$H\$4+I7*\$I\$4+J7*\$J\$4+K7*\$K\$4
L8 蛋白質的總攝取量	=B8*\$B\$4+C8*\$C\$4+D8*\$D\$4+E8*\$E\$4+F8*\$F\$4+G8*\$G\$4+H8*\$H\$4+I8*\$I\$4+J8*\$J\$4+K8*\$K\$4
L9 碳水化合物的總攝取量	=B9*\$B\$4+C9*\$C\$4+D9*\$D\$4+E9*\$E\$4+F9*\$F\$4+G9*\$G\$4+H9*\$H\$4+I9*\$I\$4+J9*\$J\$4+K9*\$K\$4
L10 脂肪的總攝取量	=B10*\$B\$4+C10*\$C\$4+D10*\$D\$4+E10*\$E\$4+F10*\$F\$4+G10*\$G\$4+H10*\$H\$4+I10*\$I\$4+J10*\$J\$4+K10*\$K\$4
L11 鈉的總攝取量	=B11*\$B\$4+C11*\$C\$4+D11*\$D\$4+E11*\$E\$4+F11*\$F\$4+G11*\$G\$4+H11*\$H\$4+I11*\$I\$4+J11*\$J\$4+K11*\$K\$4

步驟六: 在上方「資料」功能區中，我們可以找到「增益集」的「規劃求解」按鈕。請按一下並輸入所有相關的限制條件和目標函數(即總金額)，如下圖所示。

	Soft Drink: Cola	Malted Soya Drink	Calcium Milk	Instant Cereal Drink	Sandwich Bread	Biscuit / Cracker	Bowl Noodle	Instant Noodle	Beef Hamburger	Shrimp Shao Mai	Total	Min / Max Amount
Decision Variable	0	0	4	1	0	7	0	0	0	0		
Cost (\$)	6	5	7	4	4	5	7	3	12	8	67	
Energy (kcal)	139										2437.6	2400
Protein (g)	0										60.6	60
Carbohydrate (g)	35										536.2	350
Fat (g)	0										17.1	65
Sodium (mg)	13										1938	2000

「目標式」須設置為 \$L\$5，由於這數值是代表總金額，因此請選擇「最小」，這表示最終目標是計算 L5 儲存格中的食物總金額的最小值。

將「藉由變更變數儲存格」設置為 \$B\$4:\$K\$4，以涵蓋儲存格 B4 到 K4 之間所有十個決策變量（即達致最低總金額的每種食物數量）。

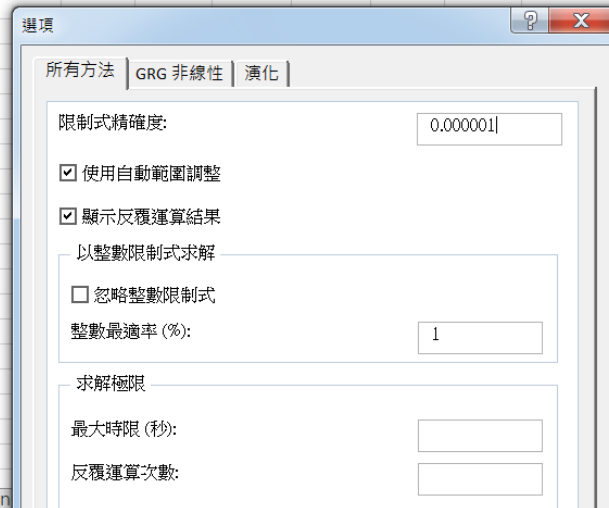
「設定限制式」是以不等式的形式輸入 5 個約束條件，按「增加」並輸入或揀選“\$L\$7”，“>=”，“2400”以設定總能量攝取應最少為 2400 卡路里。於 L8 至 L11 格內輸入類似的限制。由於 B4 至 K4 格內的數量須為整數，因此須輸入另一對應條件，按「增加」並輸入“\$B\$4:\$K\$4”，“int”，“integer”設定限制條件

於「選擇求解方法」，選擇「單純 LP」。[對於 Excel 2000/2003/2007：點擊「選項」，然後再分別選取「假設線性模型」和「假定非負數」。]

步驟七: 按「求解」，答案於試算表顯示。各種食物的最終數量可於決策變量行(即 B4 至 K4)讀取，能量的總攝取和營養的總攝取量可於格 L7、L8、L9、L10 和 L11 逐一讀取。

按計算結果，能量和蛋白質的攝取量接近下限，碳水化合物的攝取量則大於最低要求，而脂肪的攝取量則遠低於上限。

	Soft Drink: Cola	Malted Soya Drink	Calcium Milk	Instant Cereal Drink	Sandwich Bread	Biscuit / Cracker	Bowl Noodle	Instant Noodle	Beef Hamburger	Shrimp Shao Mai	Total	Min / Max Amount
Decision Variable	0	0	4	1	0	7	0	0	0	0		
Cost (\$)	6	5	7	4	4	5	7	3	12	8	67	
Energy (kcal)	139	128	94.4	135	248	275	301	463	512	372	2437.6	2400
Protein (g)	0	4.5	6.8	4	8.4	4.2	9	10.3	26	22.6	60.6	60
Carbohydrate (g)	35	19	14.9	23	44.6	64.8	35.2	58.9	40	20.5	536.2	350
Fat (g)	0	3.8	0	15	3.6	0.3	13.8	20.7	27	14.3	17.1	65
Sodium (mg)	13	188	118	150	422	188	1,140	1,936	824	855	1938	2000



總結來說，我們可從試算表行 4 內的變量，找出最適切的食物數量，即 4 盒高鈣牛奶、1 包麥精維他奶、7 包餅乾，其餘 7 種食物的數量均為 0。

最低總金額 = $\$ 4(7) + \$ 1(4) + \$ 7(5) = \underline{\$ 67}$ 。