

數學百子櫃系列 (一)

漫談數學學與教

新高中數學課程必修部分

作者 張家麟、黃毅英、韓藝詩



教育局
課程發展處數學教育組

版權

©2009 本書版權屬香港特別行政區政府教育局所有。本書任何部分之文字及圖片等，如未獲版權持有人之書面同意，不得用任何方式抄襲、節錄或翻印作商業用途，亦不得以任何方式透過互聯網發放。

ISBN 978-988-8019-62-5

目錄

前言	v
作者簡介	vi
1. 緒論	1
2. 一元二次方程	2
3. 函數及其圖像	6
4. 指數及對數函數	8
5. 續多項式	11
6. 續方程	13
7. 變分	14
8. 等差與等比數列	15
9. 不等式與線性規劃	19
10. 續圖形與空間	21
11. 圓形的基本性質	22
12. 軌跡	24
13. 直線與圓的方程	26
14. 續三角	28
15. 排列與組合	34
16. 續概率	36

17. 離差的度量	39
18. 統計之應用與誤用	41
結論：課程、教師與專業化	46
其他相關網站	52
參考書目	55
附錄	63

前言

為配合香港數學教育的發展，並向教師提供更多參考資料，課程發展處數學教育組於 2007 年開始邀請大學學者及資深老師撰寫專文，並蒐集及整理講座資料，輯錄成《數學百子櫃系列》。本書《漫談數學學與教—新高中數學課程必修部分》是這個系列的其中一冊，作者黃毅英教授、張家麟博士和韓藝詩女士對中學數學教學素有研究，本書除談及高中數學課程的學科知識外，對學科教學知識、學習難點等，都有精闢的見解。本書不僅可供教師參考，亦可作為學生讀物。作者撰文期間，高中數學課程仍在修訂，本書內容或與課程最後定稿偶有出入，祈請讀者留意。此外，本書只屬作者個人觀點，並不代表教育局的意見。

本系列能夠出版，實在是各方教育工作者共同努力的成果。在此，謹向提供資料、撰寫文章的老師、學者，以及所有為本書勞心勞力的朋友，致以衷心的感謝。

如有任何意見或建議，歡迎致函：

九龍油麻地彌敦道 405 號九龍政府合署 4 樓

教育局課程發展處

總課程發展主任（數學）收

(傳真：3426 9265 電郵：ccdoma@edb.gov.hk)

教育局課程發展處

數學教育組

作者簡介

黃毅英，文學學士、哲學碩士、教育證書、哲學博士（香港大學），文科教育碩士（香港中文大學），現任香港中文大學課程與教學學系教授。於境內外學報發表學術論文二百餘篇。2001年獲香港研究資助局重點專案資助（Competitive Earmarked Grant）、2005年獲學院優秀教學獎、2006年第三屆全國教育科學研究優秀成果獎三等獎、2008年獲香港中文大學研究卓越獎。編著有《邁向大眾數學的數學教育》、《數學教育實地觀察》、《數學教育實地再觀察》、《香港近半世紀漫漫「數教路」：從新數學談起》、《華人如何學數學》（與范良火、蔡金法、李士錡合編）、《迎接新世紀：重新檢視香港數學教育 — 蕭文強教授榮休文集》、《香港近半世紀漫漫「小學數教路」：現代化、本土化、普及化、規範化與專業化》（與鄧國俊、霍秉坤、黃家樂、顏明仁合寫）、《變式教學課程設計原理：數學課程改革的可能出路》（與林智中、孫旭花合寫）等。香港數學教育學會創會會長，現為上海師範大學小學教育研究所客座研究員、天津《數學教育學報》及韓國《數學教育研究學報》編委。

張家麟，學數於香港中文大學數學系，先後獲學士、碩士及博士學位。研究興趣為非綫性偏微分方程。曾任職中學教師、香港教育學院及香港中文大學數學系導師，2005年獲中文大學理學院優秀教學獎。2006年7月任香港教育學院助理教授至今，對數學解難，以及幾何的教與學至感興趣。

韓藝詩，香港科技大學獲得理學士（數學）和哲學碩士（數學）學位，香港浸會大學取得學位教師教育文憑，現於香港中文大學修讀教育碩士課程。曾於香港教育學院擔任專任導師，亦曾於中學任教數學。

1. 緒論

新高中數學課程推行在即，一些前線老師對新課程有關學科知識的要求感到憂慮，在施教方面，未具信心。作為教師的培訓者，理應協助他們鞏固這方面的知識。但細心審視新課程的內容時，便會發現其必修部分中超出現行數學與附加數學範圍的內容不多。故此，教師似乎並不需要學習什麼新的數學知識來裝備自己。我們估計老師的憂慮，一方面是源於新高中並無文理分流，致使一些先前只任教初中數學的老師需要教高中數學；另一方面，可能是一些老師對高等數學生疏了。也許，這是一個讓我們重溫這些內容的好機會。

縱使將來的教科書會把教學內容清楚列出，詳細講解，但我們仍希望多走一步，就是為老師說明每一個課程的知識結構，分析當中一些難點，提供一些活動建議，與及網上資源等。換言之，本文不只是學科知識的介紹，更是「學科教學知識」(Pedagogical Content Knowledge)的闡述！不過，我們並不打算(亦不可能)在這本小冊子中介紹所有相關的資料，我們只能把其中一些放在註腳內簡述，有興趣的讀者請繼續沿這些資料進一步搜尋。

事實上，本文的介紹距完整的「教學指引」尚遠，不過，我們相信與其朝發展一套教學藍本的方向邁步，倒不如啟動老師及老師群體，透過專業討論，讓他們自行建立「知識基礎」。我們不會說什麼「拋磚引玉」，然而，藉此引發更深入的討論與探究，這正是我們的期望。

2. 一元二次方程

一元二次方程其實已在現行中學課程中存在。故此不難掌握其中的教學¹。這裡有所不同的當然是引進了複數系 \mathbf{C} 。首先我們看到（猶如不少代數／分析上的問題），把考慮的範圍擴充，圖像更為完整。例如在複數系統裡就會有任何（係數為複數的）二次方程均有兩個根（只是有時是重根）。一般來說，當 n 為正整數時， n 次方程均有 n 個根，這是代數基本定理，在未擴展到 \mathbf{C} 前，這件事是不明顯的。

此外，數系之擴展往往受到忽略，對於由 \mathbf{R} 擴至到 \mathbf{C} ，這個問題顯得尤為重要，因為我們要知道哪些 \mathbf{R} 中的法則可以保有、同時哪些不可「過檔」—又為甚麼？例如有一例題是求 $-3+4i$ 的平方根。當然透過比較 $(a+bi)^2 = -3+4i$ 的實與虛部份就可求出。但怎知複數必有平方根？複數是否「一切如常」的當作實數的進行運算？

眾所周知，由 \mathbf{N} 到 \mathbf{Z} 是為了減法之緣故（群），而卻「喪失」了「首元」(first element—0)，由 \mathbf{Z} 到 \mathbf{Q} 是為了除法（域），但沒有了「下一個元」（在 \mathbf{Z} 中 7 之下一個元素是 8，在 \mathbf{Q} 中 $7/8$ 的下一個元素沒有意義），由 \mathbf{Q} 到 \mathbf{R} 不是為了 $x^2 - 2 = 0$ 有解而是使到所有收斂序列均有極限（拓樸完備 topologically complete），而 \mathbf{R} 卻喪失了「可數性」(countability)，由 \mathbf{R} 擴展到 \mathbf{C} 才能使所有非常數的多項式皆有根(代數封閉 algebraically

¹ 黃毅英 (2004)。「二次方程」這一課所講的是甚麼？《進志數學通訊》3月，3-4。

closed)，然而 \mathbf{C} 中沒有了序之關係²。

由於 \mathbf{C} 是 \mathbf{R} 的擴展（嚴格來說，就是 $\mathbf{C} = \mathbf{R}(i)$ ），實數的四則運算得以保持，故此我們可以用處理實數二項式之形式處理複數的 +、- 和 \times ，除則沒有那麼直接了，於是就動用了「共軛」。雖說學生在低年班見過 $\frac{p}{\sqrt{a}}$ ($a \in \mathbf{Z}$) 一類數型的「有理化」（嚴格來說是將分母有理化），但其實做法轆出一轍。首先是利用分子、分母各乘以 \sqrt{a} 以「消滅」分母中的 \sqrt{a} ：

$$\frac{p}{\sqrt{a}} = \frac{p \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{p\sqrt{a}}{a}$$

推而廣之，利用 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 或

$(\sqrt{r} + \sqrt{s})(\sqrt{r} - \sqrt{s}) = r - s$ 「消滅」 $\frac{p}{\sqrt{r} + \sqrt{s}}$ ($r, s \in \mathbf{Z}$) 分母中的

$\sqrt{r} + \sqrt{s}$ ，如

$$\begin{aligned} & \frac{8}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{8(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \\ &= \frac{8(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{3 - 2} \\ &= 8(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

類似地：

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

\pm)	$\frac{a+bi}{c+di}$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> $(a \pm c) + (b \pm d)i$
\times)	$\frac{a+bi}{c+di}$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> $ac + bci$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> $adi + bdi^2$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> $(ac - bd) + (bc + ad)i$

有些人認為 i 是「正數」， $-i$ 是「負數」。其實所謂「 a 是正數」是指「 $a > 0$ 」，既然在 \mathbf{C} 中沒有「 $>$ 」的關係，就沒有正、負數可言。事實上，假若當初我們用了所謂 $-i$ 作為擴展元數，得出的數系是一樣（同構）的，即：若 $x^2 + 1 = 0$ 之

² Wong, N.Y. (1981). What is a real number, *Mathematics Bulletin*, 1, 18–22.

二根為 α 及 β ， $\mathbb{R}(\alpha)$ 與 $\mathbb{R}(\beta)$ 同構³。

阿根圖 / 阿氏圖 (Argand diagram) 並非課程範圍，但可順帶一提。其實在 \mathbb{R} 時已很難如 \mathbb{Q} 的以代數定義 ($\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$, $(a,b) \sim (c,d)$ 當 $ad = bc$)，必須透過數線作圖像的表示，Argand 圖之用意也是如是。

建議課堂活動：軟件 Winplot

活動目標：同學利用軟件製作不同的一元二次方程圖像，明白函數 $ax^2 + bx + c = 0$ 中， a, c 與圖像的關係和各係數與根的關係。

活動內容：同學利用軟件製作不同的一元二次方程圖像。

³ Fung, C.I., Siu, M.K., Wong, K.M., & Wong, N.Y. (1998). A dialogue on the teaching of complex numbers and beyond. *Mathematics Teaching*, 164, 26–31.

相關網站：

1. 計算機程式

(a) http://hk.geocities.com/kl_cheuk/50F/quadratic2.htm

(b) <http://subject.skhlkyss.edu.hk/math/casio/Quadratic%20Equations%205.htm>

(c) http://www.mfbmclct.edu.hk/~maths/calculator/quadratic_eqtn.htm

2. 與一元二次方程有關的數學史

<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/vol4no11c.htm>

3. 教案範例

<http://202.175.82.54/tplan/2003/sche/G085.pdf>

4. 一元二次方程軟件 M－Lab（試用版）

<http://www.mindworksys.com/partners/mlab.htm>

3. 函數及其圖像

這亦不是新的課題，但可以看到其中強調了函數與圖像間的連繫。其實函數的概念與數的變動關係密切，在小學階段，我們見到的數學是定態的，但後來一個數就可以有多個表徵（如 $0.4 = 40\% = 4/10 = 2/5$ ，故有「互化」的計算），透過比（ratio）、率（rate）、變（variation），有所轉變。學生所接觸到的「 x 」亦從一個代號、一個未知數（定態）慢慢變成動態（最後引出變數的概念），故此函數是走入變量數學（微積分）之門檻⁴。而函數也有不同的表示方法，如代數式、表格（table），而從圖像則可看到整體的畫像，有強烈的視覺效果。例如由 $y = x^2$ 轉到 $y = x^2 + 1$ ，整個圖就會「上升」一個單位等。本課題以二次方程這個簡單的函數為例，考究其頂點、對稱軸等，若能配合電腦效果，學生就會對一般的函數及其圖像（不局限於二次方程）有整體的認識而不是只機械性地背誦「頂點為 $x = \frac{b}{-2a}$ 」……之類。

當然要確切找出各特徵值（characteristic value），便要倚重代數方法了。

⁴ 黃毅英（2003）。從認識論的課程分析看現行中小學課程的幾個問題。載鄧幹明、曾倫尊（編）《學會學習：數學課程改革評析》，3—24。香港：香港數學教育學會。

相關網站：

1. 種籽計畫試教材料

<http://www.edb.gov.hk/index.aspx?nodeid=5036&langno=2>

2. 三角函數

<http://resources.edb.gov.hk/trigintegral/Math/cal.html>

4. 指數及對數函數

當然不少老師會把注意力集中於幾條公式上，但這樣是很枯燥的，其實我們可考究：

1. 指數之定義涉及定義上之擴展，這是數學上常見的思維方式： a^n 就是自乘 n 次，故此 a^0 起初 ($a \neq 0$) 沒有定義。理論上既然沒有定義，我們可以加以任何定義。但我們希望仍能保持各指數定律，故此 a^0 別無選擇，只可能是 1 ($a^0 = a^{n-n} = a^n / a^n = 1, n \in \mathbb{Z}^+$) (這裡就是吊詭之處，既然 a^0 暫未有定義，何以能動用指數定律呢?) 我們繼續探討在各指數定律仍能滿足的前提下，當 $n \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ 時 a^n 的定義。為讓 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 得以成立，當 $n = 0, m \in \mathbb{Z}^+$,

$$a \neq 0 \text{ 有 } a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m$$

$$\Rightarrow \frac{a^m \cdot a^0}{a^m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$$

$$\Rightarrow a^0 = 1$$

故此有 $a^0 = 1$

當 $n = -m, m \in \mathbb{Z}^+, a \neq 0$

$$\text{有 } a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^{-m} = a^{m-m} = a^0 = 1$$

$$\Rightarrow a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

因為 $m > 0$ 即 $-m < 0$ ，所有 $a^{-(-m)} = \frac{1}{a^{-m}} \Rightarrow a^m = \frac{1}{a^{-m}}$ ，故

$$\text{此 } a^m = \frac{1}{a^{-m}}。$$

當指數推廣至有理數時，為使 $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{2p}{2q}}$ 等仍能成立，

其中 $p, q \in \mathbb{Z}$ ，就限定了 $a > 0$ 。對於 $a < 0$ ，情況變得複雜，以下討論規限於 \mathbb{R} 。若 n 為奇數，由於 $x^n = a$ 只有一個實根，故理論上我們仍可以論 $a^{\frac{1}{n}}$ （因為是唯一一定義）。例如 $\sqrt[3]{-8} = -2$ 。上面的定義是與指數定律有衝突的，例如 $-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = [(-8)^2]^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$ 。

故此，一般來說，我們把討論規範在 $a > 0$ 。此外，我們還需要注意 \sqrt{a} 的意義。它在 $a > 0$ ，用以表示取 a 的正根，即取 $x > 0$ ，使 $x^2 = a$ 成立。這做法會使當 $a, b > 0$ 時， $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ 成立。然而，當 $a < 0$ 時，則記號 \sqrt{a} 便會失卻了取正根的選擇而變得意義含糊。作為例子，我們可考慮 $\sqrt{-1}$ 的意義，記號 i 和 $-i$ ⁵ 表示從實數軸的 1 出發，沿複平面反時針分別轉 90° 及 270° 所得的虛數，這樣 i 和 $-i$ 均是虛數，無所謂正負，但 $(i)^2 = (-i)^2 = -1$ 。雖然，我們會沿用「慣常的做法」，取 $\sqrt{-1} = i$ 及在 $a < 0$ 時，取 $\sqrt{a} = (\sqrt{-a})i$ （例如 $\sqrt{-10} = (\sqrt{10})i$ ），但這做法的缺點是不能保證 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ 的成立。例如取 $a = b = -1$ ，則 $1 = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ 。

2. 指數定律與對數定律會一對對的出現，指數與對數其實是「孿生」的，因為指數函數與對數函數根本有著互逆之關係，即 $\exp(\log(x)) = x$ 。

⁵ 教師在介紹 i 的時候，常常會利用解方程 $x^2 + 1 = 0$ 作引入。但要注意，數學歷史上，人類認識 i 是從解三次方程開始的。有關這段歷史可參閱 Nahin, Paul J. (1998). *An imaginary tale: the story of $\sqrt{-1}$* . New Jersey: Princeton University Press.

3. 指數與對數除了代數（算術）之定義外，它們本身其實是一個常見的函數，在不少現實情境中都能找到指數和對數的趨勢⁶。

⁶ Wong, N.Y. (1984). The teaching of logarithms in junior forms. *Datum*, 24, 29–30.

黃毅英（2005）。再談「學這些東西幹嗎？」—從 20 多年前一文談起。《數學教育期刊》(Datum) 42 期，6–12。

黃毅英（2006）。如何溫習數學科？以指數一課為例。《香港數理教育學會會刊》23 期 1 號，17–18。

5. 續多項式

學生在初中已學過多項式了，這又是一次將數字的技巧（四則）推到符號來。故此除了多項式所涉及特徵（如冪、常數、係數等）之引入外（其實引入這些定義也可技巧一些，不一定一股腦兒抽離處境 *out of context* 的要學生記住），就是要借助數學的方法進行四則，同樣地， $+$ 、 $-$ 和 \times 比較易辦，由於 $\mathbb{R}[x]$ 不是一個域（*field*），故兩多項式相除不一定是多項式，故有長除並有可能有餘式，這與小學課程所牽涉的整除性概念相關，即對於任何 $p \in \mathbb{Z}$ ， $p = q \cdot g + r$ ，其中 $0 \leq r < g$ 和 $q, g, r \in \mathbb{Z}$ 。把 p, q, g, r 延伸至多項式，有 $p(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$ ，其中 $0 \leq \deg r(x) < \deg g(x)$ 。這便是歐氏算法（*Euclidean algorithm*）。由此引入餘式定理及因式定理。對於一些分式（即兩個多項式的相除），透過因式定理可以得到簡化。

這類法則之引申（由數字到多項式）往往在大部分情況下都能借助舊有法則。不過，有時就要有所調節了，例如多項式之公因式就與數字的有所不同（只是對於常數倍數唯一，所謂 *unique up to scalar multiple*）⁷。換言之， $(1-2x)$ 是 $(1-2x)(x+1)$ 及 $(x-\frac{1}{2})^2$ 的最大公因式。但 $(2x-1)$ 、 $(x-\frac{1}{2})$ 等也是，其實 $k(x-\frac{1}{2})$ ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) 均是。不過這是指實系數多項式集 $\mathbb{R}[x]$ 。若指明規限於整數系數多項式又不同，在這種情況，在計算 $4(x+1)(x-2)$ 及 $6(x+1)^2$ 的最大公因式時，仍須運算4和

⁷ 見黃毅英（2005）。最大公因數、最小公倍數要講的是些甚麼？《數學教育》20期，70-74。又見Leung, K. T., Mok, I. C. & Suen, S. N. (1994). *Polynomials and equations*. Hong Kong: Hong Kong University Press.

6 的最大公因數得出 $2(x+1)$ 。

相關網站：

內容和公式概要

<http://www.chi-edu.com.tw/1teach/1teaa/1teaaf/1teaaf-1b/1teaaf-1b-menu2.htm>

6. 續方程

雖然這單位內容在原來的中學課程已存在（且現時撥入非基礎部分），學生常感混亂的是何時用代數解、何時用圖解，這應超越按題意選定解法的應試技巧，而是兩種取向之根本差異。縱然代數解較為精確，且對於二次方程不難得代數解，但我們要為日後作準備，不少方程是沒法有代數解的，只能以數值迫近。圖解便是為數值解而鋪路的。現時開發了的分半法其實便是結合了圖像意識的數值解，雖然分半法不在課程範圍內，但於此我們仍介紹一個相關活動給讀者參考。

建議課堂活動：我有一對透視眼？（分半法）

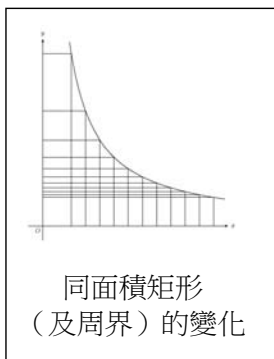
活動目標：學生能透過發問懂得把目標範圍不斷減半，從而掌握分半法的概念。

活動內容：兩位同學為一組，其中一位同學於紙寫上一字母不讓對方知道。另一位同學只能向他發問是非題（例如：字母是不是 $a - m$ ），希望能發問最少問題找出答案。

7. 變分

這亦是耳熟能詳的一課，正變、反變等機械性運算亦不困難，但這種數學的變動不單涉及數學上變量的觀念，學生亦應從中感受到量與量之間可以有的美妙關係（例如「與日俱增」、「此消彼長」、「日盡江河」、「每個成功男士背後必定有一個女人—女人愈多愈成功？」……）而關係性理解（relational

understanding）⁸正是數學理解中重要一環，透過圖像的變化例如同面積矩形的變化，這種理解更能深刻。電腦當然也能加以協助。



建議課堂活動：身體質量指數（BMI）

活動目標：透過活動引入聯變的概念，讓學生知道日常生活中應用聯變的例子。

活動內容：學生可於課堂中量度自己的身高和體重，利用公式 $BMI = \frac{\text{體重}}{\text{身高}^2}$ 計算自己的 BMI，從而討論自己身體脂肪存量與身高和體重的關係。

⁸ 黃毅英（2007）。數學化過程與數學理解。《數學教育》25期，2—18。

8. 等差與等比數列

有人說數學是「關於規律的科學」(mathematics is a science of pattern)，而有限序列 (finite sequence 即「……」背後的意思) 正是體現一種規律、一種趨勢的甚佳例子⁹，故此只背誦了六道公式了事實屬可惜，這概念可上連到極限和數學歸納式的思維 (inductive thinking)。事實上，學生在初中時已有接觸，它又可連繫到指數與對數間的關係，中間亦可連結到數學名題，如三角形數、正方形數、高斯的故事¹⁰、中國的隙積術等故事¹¹。

建議課堂活動： 河內塔

活動目標： 學生透過遊戲歸納出 1.圓板移動的方向。
2.圓板數目與移動圓板次數間的關係。若設 n 為圓板數目， T_n 為移動圓板的最少次數，則 $T_n = 2^n - 1$ 和 $T_n = 2T_{n-1} + 1$ 。

活動內容： 首先在檯桌豎立三根棒子，其中一根棒子已經把圓板依大小順序疊放著。其餘兩根棒子上沒有圓板。按照規則，把圓板全部移到另一根棒子上。圓板移動的規則

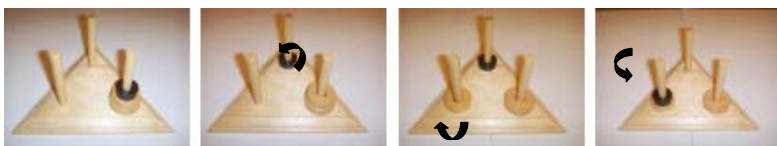
⁹ Wong, N.Y. (1994). Some key concepts in school mathematics—Ideas for better learning, *Horizon*, 35, 86–89.

¹⁰ Bell, E.T. (1937). *Men of mathematics*. New York: Simon & Schuster.

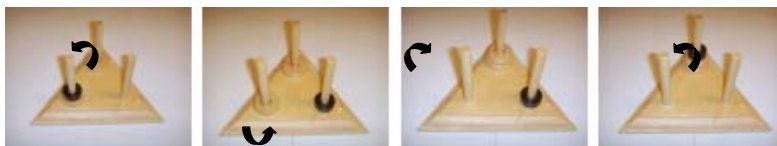
¹¹ 黃毅英 (2004)。把數學史引進數學教學真是那麼困難嗎？《數學教育期刊》(Datum) 41 期，7–15。後載 HPM 通訊第八卷第十期 (10/2005)，1–9

- (1) 每次只能移動一枚圓板。
- (2) 較小的圓板上方不可放置較大的圓板。
- (3) 圓板一定要套在棒子上，不可拿在手上
或放在其他地方而再拿另一枚圓板。

按照以上的方法，並盡量減少拿起圓板的次數，將全部的圓板從一根棒子移到另一根棒子而圓板的排列與原來相同。下圖是三枚圓板的移動方法，可作參考。



①逆時針方向 ②順時針方向 ③逆時針方向



③逆時針方向 ①逆時針方向 ②順時針方向 ①逆時針方向

【①、②、③是指由細至大第一、二、三個圓板】

如選定了第一步是逆時針方向的話，①永遠逆時針方向，②永遠順時針方向，③永遠逆時針方向。這種遊戲「最易玩」，除非陷入不斷重複狀態，否則解決途徑只有一個（沒有岔口）¹²。關於這個遊戲也有一段傳說¹³：在印度北部的印度教聖地貝那拉斯的一座大寺院裡，有 3 支金剛鑽的針柱豎

¹² 倪進、朱明書 (1986)。《智力遊戲中的數學方法》。南京：江蘇教育出版社。

¹³ 關於河內塔的故事可見 Gamow, G. (1988). *1, 2, 3, ... infinity: Facts and speculation of science*. New York: Dover Publications.

Bell, W. W. R. & Coxeter, H.S.M. (1987). *Mathematical recreations and essays*. New York: Dover Publications.

立在一塊黃銅的合金板上。在宇宙初創時，神用金子鑄成 64 枚圓板，依大小順序套在一支針柱上。寺院內的僧侶們需要不分晝夜地把圓板從一支針移到另一支針。據說當這件事完成的時候，也就是世界末日來臨之時。倘若僧侶們以每秒移動圓板一次，還需要 5800 億年才能完成全部移舉。因此不必擔心世界末日來臨，我們還是很安全呢！

另一個關於等比數列的有趣傳說¹⁴是印度的舍罕王（Shirham）打算重賞發明象棋的宰相。宰相要求在象棋的棋盤第一格內賞一粒麥子，第二格內賞二粒麥子，下一格賞的麥子比前一格多一倍，直至第 64 格。換句話說，宰相可得 18 446 744 073 709 551 615 顆麥子，即全世界在 2000 年內所生產的全部小麥。

這都是要表現等比數列上升速度的震撼性。其實可讓學生（借助電腦）比較等差數列 10000, 11000, 12000...（即 $10000 + 1000n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ）等比數列 1, 1.1, (1.1)², ...（即 $(1.1)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ），雖然前者開始很大，「步幅」也不小，最終會被後者趕上。這亦可為將來學習極限鋪路。

¹⁴ 亦見 Gamow, G. (1988). *1, 2, 3, ... infinity: Facts and speculation of science*. New York: Dover Publications.

建議課堂活動：摺報紙

活動目標：學生透過摺報紙的活動，找出對摺報紙的次數與報紙厚度與面積成等比的關係。

活動內容：詢問同學究竟把 512 張報紙同一時間對摺一次還是把 1 張報紙不斷重複對摺 9 次較困難？

同學把一張報紙不斷對摺，寫出摺報紙的次數與報紙厚度與面積的關係，並發現報紙厚度隨對摺次數以等比數列增加，而其面積則以同樣比例減少。

相關網站：

1. 黃金比例

<http://lhk.hkcampus.net/~lhk-mat/gold2.htm>

2. 斐波那契數列

http://cd1.edb.hkcity.net/cd/math/tc/ref_res/ld_c/Fibonc.pdf

3. 數學趣題

http://www.edb.gov.hk/FileManager/TC/Content_4687/numbers%20and%20algebra.pdf

4. 網上練習題

<http://www.ktklgss.edu.hk/interactive/math/exercise/apgp/apgpmcc.htm>

5. 香港校本資優數學課程試驗實例

http://prod1.e1.com.hk/education5/Maths_TTP/pv.htm

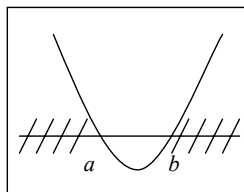
9. 不等式與線性規劃

雖然不少學生感到不等式的處理有點麻煩，這正正體現到一個體系的法則轉移到另一體系時需要（按其性質）調整的這種數學思維。首先方程之「確切性」於不等式遭到打破，不等式方程往往沒有唯一解。此外，歷來處理方程的移項工序有時可以照做，有時卻不可以，例如

$$\begin{array}{l}
 \xrightarrow{\text{移項}} \\
 x+3 > 4 \Leftrightarrow x > 4-3 \\
 8x > 16 \Leftrightarrow x > \frac{16}{8} = 2 \\
 -x > 7 \not\Leftrightarrow x > -7 \\
 \frac{x+1}{x} > 8 \not\Leftrightarrow x+1 > 8x
 \end{array}$$

由一元不等式推廣到複合不等式涉及邏輯推理及配合圖示，雖然二次不等式可透過圖像把數線分成三段，但亦可看到複合不等式的一種運用：

$$\begin{array}{l}
 (x-a)(x-b) > 0 \\
 \Rightarrow (x-a > 0 \text{ 及 } x-b > 0) \\
 \text{或 } (x-a < 0 \text{ 及 } x-b < 0)
 \end{array}$$



而二元不等式把問題擴展到坐標平面的領域，帶出「解集」的觀念（即所謂容許解 **feasible solution**），而線性規劃把問題牽到高潮。同時引入最優化的這種數學思維方式。

相關網站：

1. 工作紙

<http://hk.geocities.com/certmath/mcPdf/mcLprogamme.pdf>

2. Cauchy - Schwarz 不等式之本質與意義

http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/d241/24104.pdf

3. 網上練習題

<http://www.angelfire.com/pro/lee-kl/ineqn/test.htm>

4. 拋物線與不等式

<http://library.ccsn.tp.edu.tw/lin/pg.html>

10. 續圖形與空間

前已談到，假若只是想求解，而對於低冪多項式方程（如一次、二次），求代數解往往比較方便。故此我們不應把眼光局限於求解，而是希望對函數的完整理解。圖像就能給出函數上升、下降，最終趨勢（eventual tendency）等認識。對於非多項式函數，如三角、對數、指數等，就有更多的討論。透過簡單的變換（如 $f(x) + k$ 、 $f(x + k)$ 、 $kf(x)$ 和 $f(kx)$ 等）（電腦可發揮不少作用），更能突顯函數與圖像的整體認識，故此本課重點應在認識上之整體性，亦可銜接將來可能有機會學到的曲線描繪（curve sketching）。

建議課堂活動：軟件 M-Lab

活動目標：同學利用軟件製作不同的一元二次方程圖像，從圖像角度研究 $f(x)$ 、 $f(x) + k$ 、 $f(x + k)$ 、 $kf(x)$ 和 $f(kx)$ 的變換。

活動內容：同學利用軟件製作不同的一元二次方程圖像。

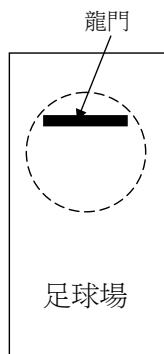
11. 圓形的基本性質

這其實是原有的課題，不過往往學生對眾多的性質比較恐慌，我們應對這些性質適當的分類和向學生解釋每個性質在做數學題時的作用，學生才會覺得這些是活生生的性質。詳可參閱「其實「平面幾何」這一課所講的是甚麼？」一文¹⁵，於此不贅。不過除了分類外，亦可點出不同定理之關係，例如三角形的 SSS、三點決定一三角形、圓心垂線平分弦、四點卻不一定決定一圓（除非圓內接四邊形）¹⁶等之關係。

建議課堂活動：最有利位置

活動目標：學生能明白同弓形內的圓周角的概念。

活動內容：學生在足球場的圓形場地內找出射門的最有利位置。



¹⁵ 黃毅英 (1990)。解題與數學教育。《數學傳播》54 期，71—81。後載黃毅英 (編) (1997)。《邁向大眾數學的數學教育》(頁 59—82)。台北：九章出版社。

黃毅英 (2003)。其實「平面幾何」這一課所講的是甚麼？《數學教育》17 期，43—50。

¹⁶ 見註 7。

相關網站：

圓形的基本性質

- (a) <http://www.tpsss.edu.hk/~maths/circle.htm>
- (b) <http://www.tlt.ab.ca/projects/Div4/Grade11/Propcircles/task.html>
- (c) <http://www.kcmc.edu.hk/~yc/teaching/control-math.html>
- (d) <http://www.clarku.edu/~djoyce/trig/chords.html>
- (e) http://www.npc.edu.hk/staff/~mkchan/content_maths/math_my_teaching_materials.htm

12. 軌跡

軌跡的概念在新課程中，於初中階段經已出現，軌跡可以有「動態」和「靜態」的理解。「動態」就是參數的觀念，就是一個變量（因變量）隨著另一變量（自變量）走，甚至想像自變量是時間，因變量是自由落體的位移

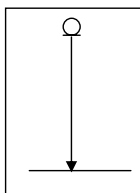
$$d = -gt^2 \quad (\text{見圖(a)})$$

又或可考慮動點 (x, y) 因 θ 而變化

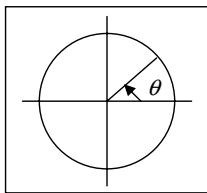
$$\begin{cases} y = \sin \theta \\ x = \cos \theta \end{cases} \quad (\text{見圖(b)})$$

「靜態」就是解集的想法，就是問在平面中哪些點適合既定之條件，例如拋物線產生軌跡的方式有多種，最簡單是參照著固定的物體而變所得的軌跡，如對兩定點等距的動點軌跡就是這兩

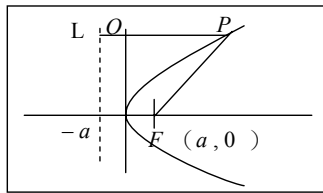
$$\begin{aligned} \overline{PL} &= \overline{FP} \\ \sqrt{(x-a)^2 + y^2} &= (x+a) \quad (\text{見圖(c)}) \\ y^2 &= 4ax \end{aligned}$$



圖(a)

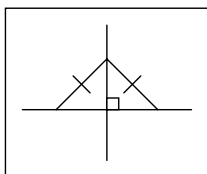


圖(b)

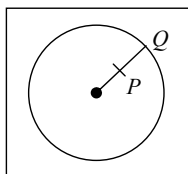


圖(c)

定點連的垂直平分線（見圖(d)）。參照的物體也可以是不固定的。如對定點及直線等距，直線中之接觸點 Q 就是變動，又例如圖（見圖(e)）中半徑之中點就更複雜及有趣了，不過此例不在課程範圍¹⁷。



圖(d)



圖(e)

¹⁷ Wong, N.Y. (1987). The tackling of locus problems. *Mathematics Bulletin*, 14, 21–25.

Wong, N.Y. (1989). Locus problems. *Mathematics Bulletin*, 18, 1–4.

13. 直線與圓的方程

這亦是原有的課題，但若只列舉甚麼「兩點式」、「點斜式」等就太「八股」和枯燥乏味了。我們可用以下基本思路串透這課：兩點決定一直線，一般而言，兩個特徵就可定義一條直線。這些特徵基本上是點或斜率，又或加上截距。而截距提供的資料基本上是一點。故此整個直線方程的部分就是知道這些特徵求直線方程，又或反過來知直線方程找回這些特徵（例如測驗一點是否在直線上或求直線的斜率）¹⁸。

圓的方程、兩直線的相交及直線與圓之相交其實可連繫到早段聯立方程、二次方程及軌跡之學習。

直線與圓之相交雖屬非基礎部分，但若選教，不少學生會對之轉化成一元二次方程，並考慮判別式感到迷惑，這其實在聯立方程（一為線性、一為二次）經已出現。首先有時學生會因疏忽而無法消去其中一元，如

$$\begin{cases} y = x^2 + x \\ x = y + 7 \end{cases}$$
$$\Rightarrow y = x^2 + y^2 + 7$$

此外，他們不明白何以一個圖形（平面上之物件）會變成一元之方程。

如果在聯立一次方程時已經有限制條件數量的意識，整個關係就會更為清楚，而這個關係亦是應嘗試讓學生體會

¹⁸ 黃毅英（1997）。讓數學變得耐人尋味。《數學教育期刊》36期，6—10。
黃毅英（1997）。從一節數學課談起。《數學教育期刊》36期，11—13。

的。就是一般而言（當然有特例）， n 條方程恰恰足夠解 n 個「未知數」。故此聯立兩條二元方程組（無論一次或二次），用了消去法或代入法之後就可消去一元，變成一條的一元方程，如此類推。

相關網站：

1. 有趣例題

- (a) <http://www.mathland.idv.tw/jsp4/lenthmid.htm>
- (b) <http://www.mathland.idv.tw/jsp4/drawpara.htm>
- (c) <http://www.mathland.idv.tw/jsp4/drawell.htm>
- (d) http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/d283/28303.pdf
- (e) http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/d302/30204.pdf

2. 軌跡方程

- (a) <http://www.ccpass.edu.hk/subj/math/am/Blk-2-10C.ppt#266,1,Slide 1>
- (b) <http://sciedu.cc.nctu.edu.tw/practice/moon/presentation1/presentation.html>
- (c) http://course.fed.cuhk.edu.hk/2004_1_EDD5169D_9/quit.htm

3. 教學範例

- (a) http://www.cmi.hku.hk/Teaching/Guangzhou/math_03/index08.htm
- (b) http://www.cmi.hku.hk/teaching/Guangzhou/math_04/index08.htm
- (c) <http://www.ktklgss.edu.hk/interactive/classes/6s/important/circle.doc>

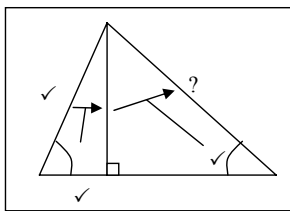
4. 圓錐曲線

http://www.math.ied.edu.hk/ITProj2003/Module_2/Conic_Sections.htm

14. 續三角

這亦是原有之課題，我們首先要了解三角比不能單靠算式定義的特性，在計算過程中（包括求解）往往要對照圖像（包括單位圖和直角三角形）¹⁹。

此外，正弦公式和餘弦公式是解三角的重要工具，它們的使用源自一個重要的基本概念—以直角三角形來解三角！在教學時，應嘗試讓學生將之與解題連繫起來。就是若有全等三角形之任一條件（即 **SSS**、**SAS**、**ASA**、**RHS**），則三角形已完全決定，故應可找出三角形之所有邊長和角，若是 **RHS** 就簡單了，至於其他情況把三角形分割成直角三角形就可找出邊和角了，正弦和餘弦公式基本上只是將這些步驟一次過做了。



這亦牽涉到上面所談的關係性理解；兩三角形之全等條件和一個三角形的決定（甚至是最少決定性）條件。三角形求解、正／餘弦公式，其實互相連繫着²⁰。

至於立體問題的解決，雖然是學生較害怕的課題，但其實有不少可加強的空間，首先我們可以讓學生有（按題意）製作立體模型的經驗，使他們了解立體圖形中各部分間之關

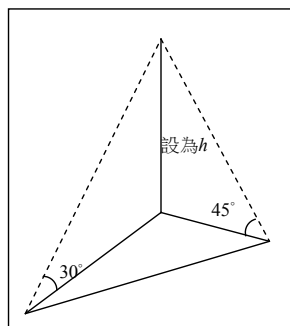
¹⁹ 黃毅英（2003）。其實「三角學」一課所講的是甚麼？《香港數理教育學會會刊》21期2號，21–28。

²⁰ 見註7。

係²¹。在新的初中數學課程中，這部分的活動其實已加強了許多。以下是按過往會考題的一些分析給大眾參考²²。此外，我們也可分析學生在立體三角應用題的解題過程中所需要到的技巧，並加以逐一培養。

I. 先備知識（三角學）

- (a) 等腰三角形性質與畢氏定理
- (b) 於直角三角形利用正弦、餘弦、正切找未知邊和角
- (c) 用正弦／餘弦公式找未知邊和角



II. 先備知識（平面幾何）

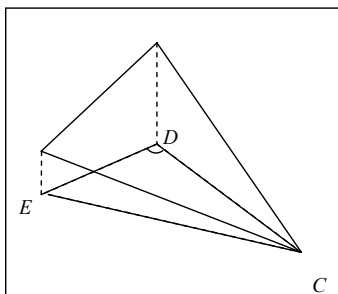
- (a) 認定圖形是否與長度有關
- (b) 若有關，試從已知長度出發，找出未知
- (c) 若有關，又或需要設定一邊長為 h ，再嘗試找回該值
- (d) 若無關，試從已知角找未知角
- (e) 若無關，又或先設定一邊長為 h ，最後消去，如 2005 年中學會考數學科卷 II，47 及 48 題，見圖。

²¹ 黃毅英（1990）。立體數學遊戲與空間想像力之訓練。《數學傳播》56 期，78–96。後載黃毅英（編）（1997）。《邁向大眾數學的數學教育》（頁 294–328）。台北：九章出版社。

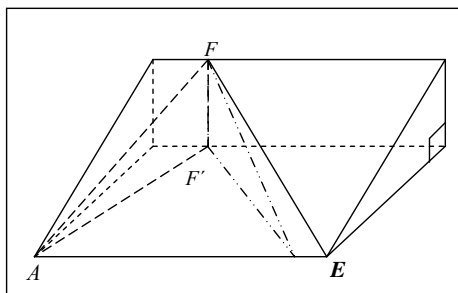
²² 陳美恩、徐雪燕（2006）。《數學變式教學的研究》。教育碩士專題研習論文。香港：香港中文大學課程與教學系。

III. 所涉及之基本技巧

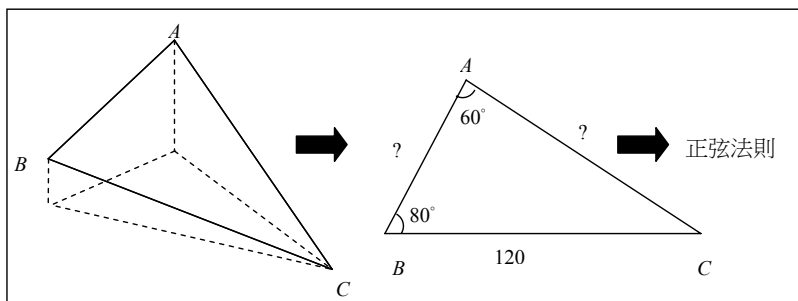
1. 對於要找的角能集中注意力於相關的三角形上，如 2005 年中學會考數學科卷 I，14 題(c)。求圖中 $\angle CDE$ 。



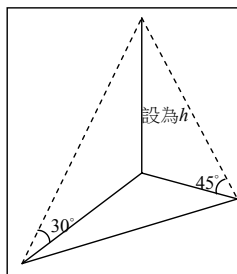
2. 對於要找的邊，能集中注意力於相關的三角形上，如 2004 年中學會考數學科卷 I，20 題(a)(i)。求圖中 FF' 。考慮 $\triangle FF'E$ ，而非 $\triangle FF'A$ 。



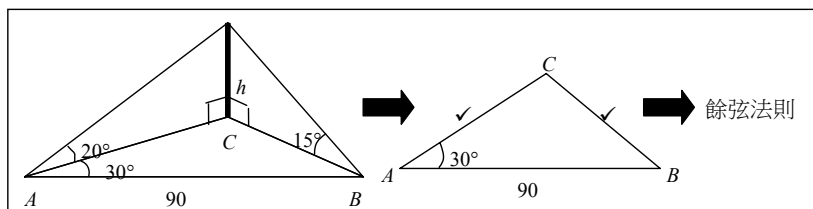
3. 找出相關的三角形後，把它畫出來。(這種技巧不絕對需要，眼利的可省去此步驟) 如 2005-I-14(b) 雖說不一定需要，但其實這是將立體問題化成平面問題。



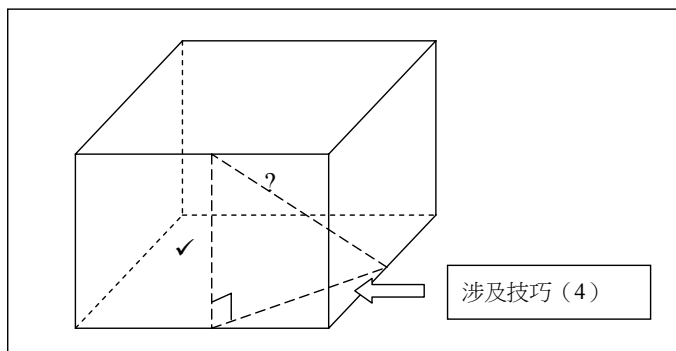
4. 利用其他三角形的資料搬到相關三角形來。例如 2005 年中學會考數學科卷 II，47 題（這亦牽涉 II (e) 的技巧）



- 又例如 2002 年中學會考數學科卷 I，12 題(a)



5. 加補助線。例如 2004 年中學會考數學科卷 II，48 題。



建議課堂活動：最慳位方法

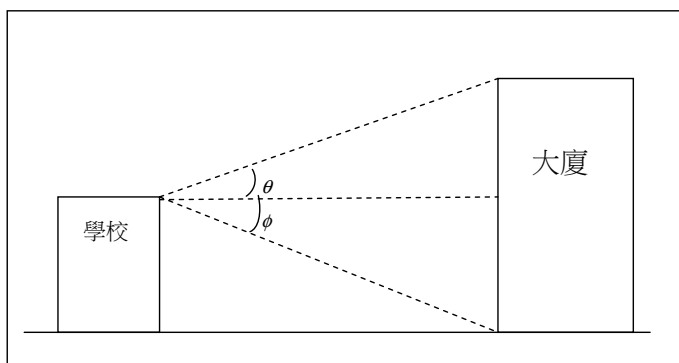
活動目標：學生能利用三角學知識，找到並解釋超級市場在有限空間堆疊最多圓罐貨品的方法。

活動內容：學生利用不同大小的紙箱，找出能盛裝最多大小相同的圓罐的方法。活動後學生能發現採用「品」形排法與「井」形排法各優、缺點。「品」形排法：三個相鄰的圓罐，其圓心可成一等邊三角形。「井」形排法：四個相鄰的圓罐，其圓心可成一正方形。

建議課堂活動：重差術²³（量度大廈高度）

活動目標：學生能利用三角學知識，透過所提供工具計算出大廈的高度。

活動內容：已知校舍的高度，在量度 θ 和 ϕ 後同學需計算出大廈的高度。



²³ 這其實源自《海島算經》。見李儼、杜石然（1986）。《中國數學簡史》。濟南：山東教育出版社。不過現時利用三角比，問題變得容易得多。

相關網站：

1. 幾何簡史與互動教材庫

<http://www.math.ied.edu.hk/ITProj2003/Geometry/Index.htm>

2. 三角學

(a) <http://www.clarku.edu/~djoyce/trig/sines.html>

(b) <http://www.clarku.edu/~djoyce/trig/cosines.html>

(c) <http://www.clarku.edu/~djoyce/trig/tangents.html>

(d) http://www.npc.edu.hk/staff/~mkchan/content_maths/math_my_teaching_materials.htm

3. 三維空間的三角學

(a) <http://resources.edb.gov.hk/trigo/#>

(b) http://www.edb.gov.hk/FileManager/TC/Content_4687/geometry.pdf

15. 排列與組合

當然排列組合（尤以 P_r^n 、 C_r^n 的符號）在將來的學習（如二項式定理）會用得著，但在這核心部分與其他課題之關係甚少，這其實可看成是一個自給自足的課題。首先，過往十數年來，香港與外地都提出了中學學習較為側重連續量而忽略數學中之離散技巧²⁴，外國甚至提出「淡化微積分」之想法。無論如何，「數」(count)之方法是很值得學習的，而這些「數」的方法其實在概率等是用得著的，而不是區限於 P_r^n 、 C_r^n 這兩個符號（及其定義與法則）。故此應配合不同之實例（如用較小的 n 去表明通則）、圖表 (table)、樹形圖 (tree diagram) 等，先培養學生這種數的方法與技巧，才轉到 P_r^n 及 C_r^n 之定義和法則。

建議課堂活動：幻方²⁵

活動目標：從同學討論必勝方法中，同學能寫出相方對壘時所有組合的可能性，從而研究排列與組合的關係。

活動內容：兩個同學輪流在九格紙上分別寫上 1 至 9 九個數目，數字不能重複，最快能使橫行、縱列或斜對角線之和是 15 的三個數的組合便勝。

²⁴ Kenny, M. J. & Hirsch C. R. (1991). *Discrete mathematics across the curriculum, K-12 (The 1991 NCTM Yearbook)*. Reston, Virginia: National Council of Teacher of Mathematics.

²⁵ 其歷史故事可在不少文獻中找到，亦可參考註 10。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

建議課堂活動：數一數

活動目標：從活動中，讓同學明白火柴的數目分別與行數和長方形的關係，從而建立排列、組合的概念。

活動內容：同學數一數下列的圖形共用了多少根火柴和有多少個長方形，並討論火柴的數目分別與行數和長方形的關係。



相關網站：

1. “e” 的引入

http://www.edb.gov.hk/FileManager/TC/Content_4687/fk.pdf

2. 排列與組合

http://www.edb.gov.hk/FileManager/TC/Content_4687/com_per.pdf

16. 續概率

到了高中學習概率，應已脫離了概率實驗而正式轉入概率空間之運算（所謂理論概率：雖然我們不必提及「概率空間」之名稱。關於實驗概率與理論概率之分別與關係，雖非本課題之範圍，但小心不要墮進「實驗次數越多，實驗概率會趨於理論概率」的常見誤解²⁶。例如圖中的兩顆骰子，一個呈正方體，另一個呈長方體，直覺上認為後者較前者偏差，但其實很難證明這點，亦很難算出偏差的程度。一些老師讓 40 多名學生各自擲毫得出 $P(H) = 0.6$ 之類便說若有時間多擲一點即令其趨近 0.5 就是犯了這個毛病（況且這個擲 40 多個毫而不重覆擲一個毫）。



首先，一些概率根本沒有所謂理論概率（當然這句有語病，更確切的是沒有公認的理論概率）。如 1969 年版（The School Mathematics Project Book 5, Cambridge University Press）第五冊第十二章第 5 節中（頁 225）便指出「實驗概率是大量試驗後的總結。它並不準確，因為再多點實驗會輕微影響結果，雖然正常情況下這種調整是細的。故此在過往 20 年，生男之機會十

²⁶ 蕭文強、黃毅英（2009）。實驗概率和理論概率的關係—中學數學教學如何受益於大學數學。《數學教育》27期。

分接近 51.4%（於前文介紹了英國於 1966 年共有 504000 男孩及 476000 女孩出生），但於上世紀末，其概率為 51.1% ……。此外以擲毫為例，我們不應亦不可能斷定其得到正面的概率是二分之一，若經過一連串實驗，其概率是 0.48，就是 0.48 了，不能說多擲點就會變成 0.5。假定 $P(H) = 0.5$ 只是一種約定俗成，也之所以叫做理論（a priori）概率。更準確的是給 $P(H)$ 「指派」為 0.5（或其他數值）完全沒問題。只要它遵守概率空間的公設就可以了。即概率乃為由抽樣空間 \mathbf{S} 到 \mathbf{R} 之函數，對於 \mathbf{S} 中每一事件 A ：

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. 若 $A_i \cap A_j = \phi$ ， $i \neq j$ ，則

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

其實統計學上共有兩條大數定律：弱大數定律和強大數定律。和我們有較密切關係的是弱大數定律。詳情在附錄中介紹。

在高中階段，概率的討論其實已進入數學建模。所以一切應在概率法則（所謂公設）的層面上操作，故此，由實際處境中引出（其實不是「證明」）幾條公設後，便應依照這些法則運作。

利用集合符號不只是為了方便的緣故，更是與學習相輔相成的。在以往利用符號邏輯運算（所謂 statement calculus）介紹數學中重要的「和」、「或」、「非」等邏輯關係比較抽離乏味，而以方程或不等式之解集，又或概率關係是比較自然的方法。

建議課堂活動：相同生日

活動目標：學生在計算概率過程中明白互補事件的應用。

活動內容：老師就班內同學作一生日日期的統計，統計有多少位同學有相同生日。假設一班同學有 n 人，然後計算那麼同一班同學最少有兩個人同一天生日的概率。

n	$P(E)$
2	0.0027
5	0.0271
10	0.1169
15	0.2529
20	0.4114
21	0.4437
22	0.4757
23	0.5037
24	0.5383
25	0.5687
30	0.7063
40	0.8912
50	0.9704
60	0.9941
70	0.9992

P (最少有兩個人同一天生日)

$= 1 - P$ (沒有人同一天生日)

$$= 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \dots \times \frac{365-n+1}{365}$$

相關網站：

1. 教育局教學資源套 (照顧學習差異)

http://cd1.edb.hkedcity.net/cd/mathsc/tc/ref_res/ld_c/LD_c%20content.htm

2. 教學討論 (教育局—數學教育組)

(a) http://www.edb.gov.hk/FileManager/TC/Content_4687/fp.pdf

(b) [http://www.edb.gov.hk/FileManager/TC/Content_4957/card%](http://www.edb.gov.hk/FileManager/TC/Content_4957/card%20game.pdf)

[20game.pdf](http://www.edb.gov.hk/FileManager/TC/Content_4957/card%20game.pdf)

17. 離差的度量

一些老師可能比較集中留意各統計量之計算，這不一定是統計學上之原意，反而各統計量之適用性及詮釋更為重要。例如，在實際來說，計算連續分佈之四分位數間距（inter-quartile range），利用累積頻數曲線，在圖像上畫出來就可以了，不必太準確，只不過香港太著重標準答案吧了。

比如三種常用的集中趨勢，其實各有用處。例如眾數（mode）不一定少用。比如報告幾個候選人（或明星）之支持度，眾數就最直接。至於中位數，除了避開了極端數據外，不少常用的事件如公屋住戶的租金訂定是根據公屋住戶的入息比例中位數、政府統計處每五年公佈香港人入息中位數等都會利用到中位數的。

與此相連的，分佈域（range）、四分位數間距（inter-quartile range）及標準差亦各有運用的場合。理論上，連續分佈的分佈域沒有多大意義，因為它的分佈域就是 $(-\infty, \infty)$ ！但對於不少實際問題，分佈域就常常會用得，例如在一項對年青人進行的調查中，說明如受訪者年齡的分佈域是13至18歲，就很常見且甚有意義了。同理，在教一班學生前，知道這班青年的成績為60—80分就提供了重要的資料。

四分位數間距是中位之「延伸」，故此其作用亦是排除了極端的數據。當然標準差是最常用了，因為它可以用代數式（或用計數機、電腦）機械地計算出來，且每個數據都動用了，亦有圖像上的意義，即各數據與平均值距離平方之總和（再除以數據總數 N ）的平方根。至於為何用 \sqrt{N} 而非 N 當然

是為了統計上的意義，使之成為無偏估量（unbiased estimate）。

在計算方面，如課程中說，可分開分組數據（grouped data）及不分組數據（ungrouped data）的不同處理方法。非基礎部分有涉及將數據組移動後，這些統計量之變化。這當然有其實際用途，例如我們派了數個資料搜隻員得出了不同樣本的平均和標準差，如何可將之計算出合起來（pooled）的平均和標準差。與此同時，亦可以幾何變換去看待這個問題，例如加入常數乃為平移，乘以非單位常數則為放大／縮小（enlargement / contraction）。這亦可看成為單位的轉變（例如以 cm 為單位，平均值為 325cm，若換以 m 為單位，平均值為 3.25m，至為明顯！）

建議課堂活動：評判團

活動目標：學生能找到體操比賽中剔除評判團中給出最高和最低分的原因和剔除分數的數目準則，從而引入四分位數和標準差的概念。

活動內容：讓學生討論在體操比賽中剔除評判團中給出最高和最低分的原因和剔除分數的數目準則。

18. 統計之應用與誤用

當然，*The Use and Abuse of Statistics* 及 *How to Lie with Statistics* 為必不可錯過之讀物，這個課題最好配合專題研習去學習²⁷。統計習作亦可分階段進行，以避免混亂。香港統計習作比賽早期要求參賽者只分析／表述已發表（現成）的數據，雖然不涉及數據搜集，但亦大有可為²⁸。而這些統計習作最好由小做起；例如初中的習作只運用現成數據，而高中則擴展到自行搜集數據等。

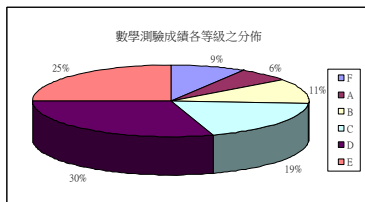
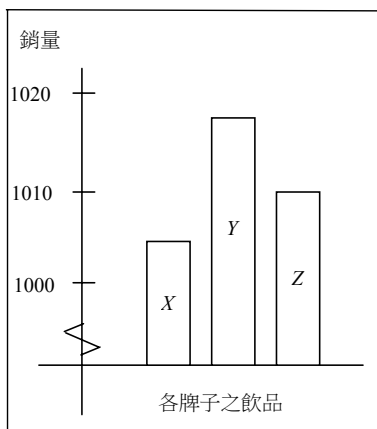
至於統計之誤用，對現成的報章雜誌及各種報告進行分析最實際，且能令學生覺得有實質之需要（誤導就在你身邊！）。

不過可注意的是，有一種「誤用」其實是一種「誤導」，例如圖中用視覺（縱軸不以 0 為起點，即所謂「off origin design」）誇大了 Y 的銷量，但這個圖基本上是準確的，只是利用了視覺效果，精明的讀者仍可由此得出準確的數據——這亦正正是這課的一個重要目的，讓學生變成精明統計圖表／報告的解讀者！

²⁷ P.H. Cheung, K. Lam, M.K. Siu, & N.Y. Wong (1986). An appraisal of the teaching of statistics in secondary school of Hong Kong. Paper presented at the 2nd International Conference on the Teaching of Statistics, Victoria, Canada.

²⁸ 黃毅英（1992）。習作在統計教學上的效能。《學校數學通訊》11 期，11—21。

黃毅英（1993）。統計圖表誤用。《學校數學通訊》12 期，1—4。



其他如常見的橢圓形「圓形圖」(pie chart)的情況也類似。圖中 C、D、E 的人數其實相約，但視覺上好像 D 比 C、E 多得多，而其實沒有用橢圓形的必要。

某報章根據 1995 年各間巴士公司的營運數據如下：

	中巴	九巴	城巴
車隊平均車齡*	13 年	8.1 年	5.6 年
班次失誤比率*	5.65%	4.90%	3.80%
巴士意外數目(以每百萬公里計算)	3.36 宗	3.61 宗	3.8 宗
交通投訴組 95-96 年度接獲的投訴數目	934 宗	1291 宗	434 宗

*中巴居首位項目

除了是統計圖表的表達方法可誤用外，表達數據的方法亦可製造誤會，上表中便是最佳例子。在表中，中巴車隊的平均車齡與班次失誤比率被刻意地加上記號，容易令讀者覺得眾多巴士公司的服務中以中巴最差，使讀者聯想到中巴的車齡高，故班次失誤比率自然高，但想深一層兩者似乎沒有必然關係。其次，是九巴接獲的投訴數目最多，原因不一定

是九巴的服務質素差，可能是九巴的車隊之數目在三間公司中最龐大，故被投訴的機會也隨之而增加。那麼如實報數都是一種統計誤用嗎？當然不是這個意思，我們是希望學生在學習閱讀和分析數據時不要純粹考慮數據的表徵而作草率的結論。又例如不少活動均有意見調查，例如攤位遊戲請玩過的評分，但這種取樣沒有問沒有去玩的。有一個可能是一些參加者見遊戲不好玩，根本不去玩，就更不要說收到他的評分了。此外，一些問卷亦有引導性，以下便是一些例子

同意。

不同意。請說明原因：_____

填答者會因不耐煩寫原因而傾向回答「同意」

極同意 頗同意 同意 不同意

同意的佔三格，不同意的佔一格

請問今次講座中需改善的地方

佈置 講者衣著 燈光效果

但可能最大問題在於內容！

除了問題有否引導性、被訪者會否說真話及樣本是否足夠大外，我們還可考慮

1. 用什麼方式進行調查如用家用電話涵蓋有多全面？
2. 如用街頭訪問，在那一區？訪問員會否刻意避用某一類人（如貌似凶神惡煞者）？
3. 是否會有一類人總是拒絕受訪（如掛線）？

再舉個生活例子。下表是某兩牌子的米的營養成份。白米含鈉（Sodium）量是 100 g 有 0.7 mg，紅米含鈉量是 100 g 有 1.6 mg。紅米的含鈉量是白米的兩倍多，雖然紅米看似較不健康，但事實上是無關緊要的。

營養成分	紅米	白米
熱量(kcal)	342	349
蛋白質(g)	10	5.9
脂肪總量(g)	2	0.12
飽和脂肪(g)	1.2	0
膽固醇(mg)	1	< 1
碳水化合物(g)	71	81
糖(g)	0.5	< 0.5
膳食纖維(g)	1.2	0.7
鈉(mg)	1.6	0.7
鈣(mg)	9.5	3.8

數據以每 100g 表示

在樣本（sample）劃分的方法、抽取樣本的數目和樣本的特性每一項目均有可能產生誤導，甚至是自己對數據背景的了解不足所產生，故多討論有關問題絕對是了解統計之運用與誤用的不二法門。

建議課堂活動：設計電腦鍵盤上的字母

活動目標：透過活動引入相關的統計學概念，讓學生知道日常生活中應用統計學的例子。

活動內容：讓學生重新設計電腦鍵盤上字母的位置，希望同學在設計時能引入考慮字母在一篇文章中出現的頻率、相對頻率的統計學概念。

建議課堂活動：剪報

活動目標：讓學生知道在日常生活中利用統計圖表的不同例子。

活動內容：讓學生從各報章中尋找不同的統計圖表，並討論利用該圖表的優、缺點。

建議課堂活動：問卷調查設計

活動目標：在設計問卷過程中，讓學生明白了解調查目標的重要性。

活動內容：分組設計問卷調查，由其他組評論。

相關網站：

統計學軟件

<http://www.hked-stat.net/common/>

統計學的用處

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_03_3_07/index.html

結論：課程、教師與專業化

從事教師教育以來，在不同場合中不斷收到「甚麼是現時最新教學法」的提問。自然，隨着社會之轉型，學校任務的轉變，學生群體的不同（如面向全民）以及我們對學生學習過程認識之加深，教學策略可能有所調整。但是我們可以反過來想，幾千年來，人類的學習模式和過程，究竟有否根本上的不同呢？難怪 J. Barzun 早在 1955《新聞周刊》12月號中曾這樣說「教學不是一個遺失了的藝術，（只不過）對它的重視是一個失去了的傳統。」當年（又過了 15 載！）引用 Barzun 之言²⁹時，作者們便指出這話雖道於三十多年前，但其依舊鏗鏘有聲（甚或更響亮！）（頁 223）。

1999 年教改以一句「世界變了」揭開序幕，之後各種新猷（及其相關之字母縮寫）可謂令人目迷五色。單就新高中數學課程中，除了數學內容本身的編排外，就同時提出校本評估、促進學習的評估（assessment for learning）及不同的教學等一連串觀念。不是說這些提法不對，也許我們應該在眾多口號之上重新掌握問題的實質，在眾多變革中抓緊不變的道理，難怪蕭文強教授在一本書³⁰的序文中提出

²⁹ Siu, F.K., Siu, M.K., & Wong, N.Y. (1993). Changing times in mathematics education: The need of a scholar-teacher. In C.C. Lam, H.W. Wong, & Y.W. Fung (Eds.), *Proceedings of the International Symposium on Curriculum Changes for Chinese Communities in Southeast Asia: Challenges of the 21st Century*, 223–226.

³⁰ 鄧國俊、黃毅英、霍秉坤、顏明仁、黃家樂（2006）。《香港近半世紀漫漫「小學數教路」：現代化、本土化、普及化、規範化與專業化》。香港：香港數學教育學會。

「timeliness」³¹及「timelessness」的一對觀念，大有反璞歸真的意味。

當然，我們可以說教師不是教學的全部，甚至近人刻意將教與學倒過來說「學與教」，強調學生才是學習的主體（所謂 ownership）。然而，在現時（及可見未來）的體制中，我們仍是需要教師去實施課程、要教師去推行教改。我們說給學生多點「ownership」³²，我們同樣也要讓教師在課程實施上（實還應包括課程的製訂過程）多點 ownership。故此，在課程文件中闡述教學法是不尋常亦未必是好事。給人中央規範教學的聯想。鄭毓信一文³³便對中國內地大綱「卡」教材、教材「卡」教師、教師「卡」學生的現象有所批評，有樣板化之嫌³⁴。

當時在提出「學養教師」的想法時³⁵，作者們便指出「學養教師」看似一種烏托邦，「但我們要嘗試其他辦法嗎？我們仍是需要一個學養教師的族群去啟導新的嘗試」（頁 225）。Stigler 和 Hiebert³⁶關於專業化的再定義一再印證了這個想法，他們提出「教師必須是解答的核心（teacher must be the heart of the solution）」（頁 174）。在探討變式課程時³⁷，作者們更明確地說

³¹ 蕭教授在序文中表明刻意不強行中譯，因難以準確地譯出。可勉強的譯作「通時」及「不受時間影響」。

³² 同樣地，ownership 不好譯。一般譯作「擁有感」，但其實這不只是一種感覺，而是有實質的影響力。

³³ 鄭毓信（2002）。文化視角下的中國教育。《課程·教材·教法》2005 年第 10 期，49—51。

³⁴ 又見黃毅英（2007）。從「華人學習者現象」到「香港學習者現象」。兩岸四地教學理論研討會。香港。25—26/5。

³⁵ 見註 28。

³⁶ Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press.

³⁷ 黃毅英、林智中、孫旭花（2006）。《變式教學課程設計原理：數學課程改革的可能出路》。香港：香港中文大學教育學院香港教育研究所。

明變式課程並非一個範本，「這畢竟是一個課程設計，它和許多課程設計一樣，還需要教師以其專業知識，按照學生和各種實際情況調節，因時制宜，靈活調動」(頁 27)。而事實上，我們實不可能透過兩三份中央課程文件去處理萬別千差的課堂教學。變式教學的實踐恰恰說明，教師必須掌握為何變、如何變、又何時不變、以變凸顯之不變……等等，臨場去調節才能達致有效的教學。

縱然教師之外還有課程、學校系統、學生等，他顯然在教學過程（乃至課改中）仍有重要的地位，而其中的決定性因素是其學養（功力）。這種「功力」包括多方面。關於「學養教師」的一篇文章³⁸便提出「『學養教師』應對數學、教育及學生性向去均能掌握」(頁 54)。當然，也包括對校本評估、課程評準化、進步主義等等教育理念的底蘊有所認識和批判。在協助學生數學化的過程中，對數學和教育的認識同樣重要。而教師正正就是要為學生搭建一條由（學生）現實世界到數學世界的這麼一條「數學化」之路³⁹。

教師的數學學科知識，當然並不是「功力」的全部，教師對課程中數學內容的通達不等於就有好的教學，本文的分析其實正正希望嘗試超越這點。本文希望對每個課題中的來龍去脈、整體知識結構與及背後的數學原理作出分析，希望藉此，不只能「熟」，亦做到「通」。這樣教學才能突出「關係性知識」。數學問題解決（作為數學教育的主要部分）也能得心應手、觸類旁通⁴⁰。

³⁸ 陳鳳潔、黃毅英、蕭文強（1994）。教（學）無止境：數學學養教師的成長。載林智中、韓考述、何萬貫、文綺芬、施敏文（編）《香港課程改革：新時代的需要研討會論文集》（頁 53—56）。香港：香港中文大學課程與教學學系。

³⁹ 見註 7。

⁴⁰ 韓繼偉、林智中、黃毅英、馬雲鵬（2008）。西方國家教師知識研究與啟

一些老師驟眼以為這種具數學味道的教學十分「高檔」，難教難學。然而在一個方面，以「SSS」表示三角形的三邊決定了全個三角形為例，如果不認識這點，學「SSS」除了做一大堆數學題，求未知的邊與角外，還有什麼意義呢？這些數學題很可能在大部分學生考過試後拋諸腦後，離開學校時留下一個名為「數學」的噩夢之深刻印象⁴¹。另一方面，有了「SSS」後有「全等三角形的對應角」，不講上述事情還在說些什麼呢？⁴²

本文所舉出的教學示例只是略舉一偶，筆者等絕非以之為「最佳」的活動，更不願見到它們變成大眾必用之樣板。事實上，每課的相關活動仍多不勝枚舉，有賴大眾繼續探索。

在探討過往半世紀香港小學數學課程的發展時，我們發現，當年（1983年版本）課程綱要中列舉的教學建議，（起碼在其程度上如是）並非課程製訂者躲在辦公室拓造的，而是經年累月，經教師教育及研習班等試驗之總結。課程發展細水長流的原意至為明顯⁴³。

這當然是一個互動過程，而本文還有不足之處的是所提供的活動仍未經廣泛的實踐⁴⁴，故此「第三份香港數學教育另類報告」⁴⁵中提出了「學養教師自強運動」，而現時亦流行說「學習社群」。課程少點規範之同時，教師隊伍亦應自強不

示。《教育研究》336期88—92。

⁴¹ 註28，頁223。

⁴² 見註7。

⁴³ 見註29。

⁴⁴ 有關實踐理念見黃毅英（1998）。《數學教育實地觀察》。香港：香港數學教育學會。頁47。

⁴⁵ 黃毅英（2004）。第三份香港數學教育另類報告—天翻地覆教改話滄桑。載鄧幹明、黃家樂、李文生、莫雅慈（編）。《香港數學教育研討會—2004 論文集》頁8—29。香港：香港大學教育學院及香港數教育學會。

息，集體地提升「功力」。筆者的一點卑微願望就是藉本文提供一個教師專業化的引發點。最後「得魚忘筌」，本文最終可以束之高閣，乃是我們所樂見的。

與此同時，學生常常問「學這些東西有什麼用」，其實這提問的背後不只要知道數學在日常生活或其他學科的用途，除了蘊含了不明白這一課究竟是講些什麼外（一般來說，若教得很「順」，聽得明白，學生就不會有這麼一問），也會包括某一數學技巧在數學內部的用途，就是這技巧能協助我們解決一些先前無法解決的問題，例如直角三角形已知兩條短邊的長度，斜邊的長度理應定了，透過畢氏定理就可找出來了（解決先前無法找出的答案—畢氏定理有「用」！）。利用三角比，角也可找出來（故學三角比有「用」）。推而廣之，透過正弦／餘弦公式可解任意三角形，這些在需要老師打通整個課題以至課題間之來龍去脈，這也是本文的一個主旨。

除了數學理念的「通」，還要對問題解決的「通」（所以數學老師其實應該經常找些數學題自己作練習—要讓學生成為有能力の問題解決者，老師自己必先成為熱愛和有能力的問題解決者！）。例如學生不只知道要記得公式和技巧，更須讓他們知道每條公式的作用和如何透過蛛絲馬跡知道要動用某條公式。例如 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ 是因式分解。 $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ 是展開（所謂「拆括號」），畢氏定理在直角三角形的情況下，知兩邊邊長可找出餘下的邊長。三角形內角和；知二角求餘下第三角。餘弦公式是畢氏定理的推廣。加上正弦公式即可解任何（已決定）之三角形。 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 是由畢氏定理推導（故此「造型」「很相似」而它可以由 $\sin \theta$ 轉成 $\cos \theta$ ($\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$)，或反是 ($\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$)）。（但若不涉及平方這種轉換便有點不智）……除了讓學生了解每一

道公式的作用外，還要讓他們對一些形態（form）有所敏感，例如 $a^2 - 2ab + b^2 - y^2$ ，一看而知是 $A^2 - B^2$ 的形態。 $(m^2 + m + 1)^2 + 6(m^2 + m + 1)(m + 1) + 9(m + 1)^2$ 是 $A^2 + 2AB + B^2$ 的形態。若要簡化 $\frac{1}{\sin \theta} - \frac{1 + \sin \theta}{\cos^2 \theta}$ ，會把 $\cos \theta$ 轉成 $\sin \theta$ 而非 $\sin \theta$ 轉成 $\cos \theta$ ，而且 $\frac{1 + \sin \theta}{\cos^2 \theta}$ 一望而知，分子分母（在把 $\cos \theta$ 轉成 $\sin \theta$ 後）將可約簡。這些遠超於抽出關鍵詞（如見到「共」就用「加法」）等非數學化的問題解決技巧，更不應以「題型對號入座」了事。這種敏感度是學生能把注意力集中在問題解決的關鍵上（所謂「focal point」）。這種能力對將來就算不從事數學工作的人也是有幫助的。要達到這點老師本身也需要先有這種「功底」。就是說教師要由「知識傳遞者」到「學習提供者」的「範式轉移」，老師的地位更形重要！

其他相關網站

1. 新高中數學課程綱要

http://www.edb.gov.hk/FileManager/TC/Content_5185/math5_c.pdf

2. 新高中數學科課程詮釋

http://www.edb.gov.hk/FileManager/TC/Content_4687/compulsory_uandi.pdf

3. 教育局數學教學資源套

<http://www.edb.gov.hk/index.aspx?nodeid=5586&langno=2>

4. Algebra Net

<http://resources.edb.gov.hk/algebra/>

5. 香港教育城

<http://www.hkedcity.net/>

6. 香港教育圖書公司

<http://maths.hkep.com/scripts/math5/index.php?itemid=class>

7. 數學漫畫

<http://www.mfbmclct.edu.hk/~math5/comic/comic.htm>

8. 文達出版（香港）有限公司

<http://www.csa.edu.hk/~math5/am/index.htm>

9. 興倫電子學習

<http://developer.hanluninfo.com/2005/hkcee/math/index.htm>

10. 朗文中學數學網頁

<http://certmaths.ilingman.com/chi/fivemin2.asp>

11. 教師電視

<http://www.hkedcity.net/teacher/teachertv/>

12. 數裡天地

<http://www.mikekong.net/Maths/maths-frame.php>

13. 數學趣題

(a) http://www.emb.gov.hk/FileManager/TC/Content_4687/games%20and%20puzzles.pdf

(b) http://www.hkedcity.net/iworld/vote/index.phtml?iworld_id=68

14. PowerPoint Presentation Packages (CUHK)

<http://www2.fed.cuhk.edu.hk/ITED/PowerPoint/Mathematics/>

15. 數學教學參考資料

<http://maths-teaching.com/cindex.html>

16. Dave's Math Tables

<http://math2.org/>

17. Manipula Math with JAVA

<http://www.ies.co.jp/math/java/index.html>

18. 數學資料庫

http://www.alihk.net/~md/mainpage/c_main.htm

19. 網上練習

http://www.qcobass.edu.hk/user/ccw/public_html/interact_down3.htm

20. 梁子傑網上文集

<http://staff.ccss.edu.hk/jckleung/>

21. 幾何

<http://elearning.lishin.tcc.edu.tw/km2005/FTP/JIN93/main.htm>

22. 數學家的故事

<http://www.mdnkids.com/mathematician/bascal.htm>

23. 計算機程式

(a) http://hk.geocities.com/kl_cheuk/506Vmain.htm

(b) <http://waiyuen.mikekong.net/program.htm>

24. 教學範例

<http://www.cmi.hku.hk/Teaching/Guangzhou/01.html>

25. 有趣的計算機

<http://www.alpertron.com.ar/CALTORS.HTM>

參考書目

- [1] Peressini, A., Usiskin, Z., Marchisotto, E.A. & Standley, D. (2003). *Mathematics for high school teachers: An advanced perspective*. Upper Saddle River, N.J.: Pearson Education.

此書可讓讀者廣泛地了解在教授數學過程中所牽涉的重要概念，當中包括實數、函數、全等、相似、面積和體積、三角學等。這是一本我期待已久的「數學教師用書」！

- [2] Stein, S. K. (1996). *Strength in Numbers*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

葉偉文(譯)(1999)。《幹嘛學數學？》。台北：天下文化。
對數學基本概念有啟迪性的介紹。

- [3] Posamentier, A. S. & Hauptman, H. A. (2006). *101+ great ideas for introducing key concepts in mathematics* (2nd edition). Thousand Oaks, California: Corwin Press.

- [4] Posamentier, A. S. (2003). *Math wonders to inspire teachers and students*. Alexandria, Virginia: Association for Supervision and Curriculum Development

[3] 和 [4] 提供大量有關教授數學的技巧。雖然部分方法未必適用於香港，但亦可為老師提供很多有用的教材。

- [5] Lambourne, R. & Tinker, M. (2000). *Basic mathematics for the physical sciences*. New York: John Wiley & Sons, Ltd.

對於高中學生來說，這是一本很不錯的數學教科書。

- [6] 木棉 (2006)。《睡夢中，學三角》。台北：天下文化。

這本書是專為不想「死背」三角公式的學生而寫的，它以生動有趣的方式，透過書中人物的對（夢）話，幫助學生熟習三角函數的運算法則，培養他們運用靈活的策略來解三角問題。

- [7] Huff, D. (1973). *How to lie with statistics*. Harmondsworth: Penguin Books.

鄭惟厚（譯）（2005）。《別讓統計數字騙了你》。台北：天下文化。

- [8] Jones, G. E. (2000). *How to lie with charts*. San Jose: Authers Choice Press.

葉偉文（譯）（2005）。《別讓統計圖表唬弄你》。台北：天下文化。

面對各式各樣的統計數字時，要洞悉個中玄機，揭穿各種「統計騙術」？讀一讀 [7] 和 [8]，他們道出了統計騙術的重點，讓你不再上當受騙。

- [9] Moore, D. S. (2000). *The basic practice of statistics* (3rd edition). New York: W.H. Freeman and Co.

- [10] Crawshaw, J. & Chambers, J. (2001). *A concise course in advanced level statistics with worked examples* (4th edition). Cheltenham: Nelson Thornes Limited.

[9] 和 [10]是兩本統計學入門常用和寫得精采的教科書。

- [11] Niven, I. M. (1965). *Mathematics of choice: Or, how to count without counting* (New Mathematical Library). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

對於學習排列與組合，這是其中一本不可錯過的好書。它的內容扼要精簡，一針見血，課題排序邏輯性高且有說服力。

- [12] Bolts, B. & Hobbs, D. (1989). *101 mathematical projects*. Cambridge: Cambridge University Press.

蔡信行（譯）（1996）。《數學樂園—觸類旁通》。台北：牛頓出版社。簡體字版：浙江科技出版社，1998。

- [13] Bolts, B. (1982). *Mathematical activities*. Cambridge: Cambridge University Press.

林傑斌（譯）（1995）。《數學樂園—茅塞頓開》。台北：牛頓出版社。簡體字版：浙江科技出版社，1998。

- [14] Bolts, B. (1985). *More mathematical activities*. Cambridge: Cambridge University Press.

黃啟明（譯）（1995）。《數學樂園—老謀深算》。台北：牛頓出版社。簡體字版：浙江科技出版社，1998。

- [15] Bolts, B. (1987). *Even more mathematical activities*. Cambridge: Cambridge University Press.

林傑斌（譯）（1996）。《數學樂園—趣味盎然》。台北：牛頓出版社。簡體字版：浙江科技出版社，1998。

- [16] Bolts, B. (1989). *Mathematical funfair*. Cambridge: Cambridge University Press.

王榮輝（譯）（1996）。《數學樂園一舉一反三》。台北：牛頓出版社。簡體字版：浙江科技出版社，1998。

[12]—[16]是英國數學家專為改革傳統的數學教學而精心編寫的。全書注重問題的分析、數學本質和方法的掌握，想像力與創意思維的培養；沒有繁瑣的計算，冗長的推導。各類數學問題以謎題、遊戲、趣味題、小課題等形式穿插於書中。藉着難題的巧問妙答，深入的分析 and 精闢的討論，激發學生的興趣，並鼓勵學生運用數學，探索奇妙的數學世界。

- [17] Cundy, H. M., & Rollett, A. P. (1961). *Mathematical models*. Oxford: Oxford University Press.

這是關於數學立體模型及相關活動的經典著作

- [18] 王元等（編）（1984）。《華羅庚科普著作選集》。上海：上海教育出版社。

華羅庚是近代中國數學的泰山北斗，他用心為普羅大眾寫的科普作品，思想深刻、數理精到，自然是我們所不容錯過的！

- [19] 蔡凌志（編）（2002）。《數學大師講數學》系列（共十八冊）。香港：智能教育。

這十八本名著，都是出自數學大師的手筆，說理精闢之餘，又能深入淺出，近代數學的重要課題，在大師們的悉心安排下，娓娓道來，令人在數學天地中，樂而忘返！其中包括華羅庚的《數學歸納法》及《從孫子的“神奇

妙算”談起》、吳文俊的《力學在幾何中的一些應用》、史濟懷的《平均》、閔嗣鶴的《格點和面積》、姜伯駒的《一筆畫和郵遞路線問題》、范會國的《幾種類型的極值問題》、蔡宗熹的《等周問題》、江澤涵的《多面形的歐拉定理和閉曲面的拓撲分類》、常庚哲和伍潤生的《複數與幾何》及柯召和孫琦的《單位分數》。作者位位赫赫有名，小書本本引人入勝！

- [20] 朴炅美（王海娟譯）（2005）。《無所不在的數學現象》。臺中：晨星出版社。

本書用大家熟知的實例，解析數學原理，探索在生活中到處可見的數學現象，闡述數學和藝術間的關聯，並介紹東西方歷史中的數學及數學家。

- [21] 林壽福（2006）。《數學樂園—從胚騰（pattern）學好數學》。台北：如何出版社。

本書收錄作者的四個得獎教案，內容以台灣中學的數學教學為主。趣味的設計，既能提供大量的學習策略和方法，又能兼顧台灣中小學課程的涵接，讓學生逐步拾級而上，學習數學。

- [22] 曹亮吉（1997）。《阿草的葫蘆：文化活動中的數學》。台北：發行所財團法人遠哲科學教育基金會。

作者用一個接一個的小故事，把中學數學跟人類文化生活緊密地聯結在一起。哥倫布航海探險時，用對、用錯了哪些數學？常態分布圖也可當控告人的證據！蜘蛛網和無理數 e 有什麼關係？戈巴契夫額頭的胎記和海岸線有何關連？這些有趣問題的答案，均可往書中尋。

- [23] 羅浩源（1997）。《生活的數學》。香港：香港教育圖書公司。

連繫生活與數學的書籍不少，本書特別採用了「以數學解讀數學」的角度，亦提了供不少中學可能實際運用的活動。

- [24] 蕭文強（1993）。《1, 2, 3, …以外：數學奇趣錄》。香港：三聯書店(香港)有限公司。

本書由蕭文強教授的一系列普及數學講座整理而成，說理由淺入深，敘事活潑生動，是一本中學生不多得的數學課外讀物。

- [25] 杜石然（2003）。《數學·歷史·社會》。瀋陽：遼寧教育出版社。

本書收錄了作者從上個世紀 50 年代初期以來所寫作的關於中國古代數學史各種論著。內容包括：中國古代數學通史、中國古代計算工具、數學思想、漢唐數學史各論、宋元數學史各論。

- [26] 李學數（1978—99）。《數學和數學家的故事》（1—8）。香港：廣角鏡出版社。

書如其名，要尋找有趣的數學和數學家的故事，這一系列的聞名已久的書是你的必然選擇。

- [27] 李儼、杜石然（1976）。《中國古代數學簡史》。香港：商務印書館。

李儼是近代中國數學史研究的巨匠，他與學生杜石然所寫的這本數學簡史，是了解我國數學發展與成就的一本不可多得的入門著作。

- [28] 梁宗巨 (1992)。《數學歷史典故》。沈陽：遼寧教育出版社。
- 本書把很多著名的數學典故與歷史，分成 20 個專題詳述，各專題基本上是獨立成篇的，彼此間也有聯繫，讓讀者就有興趣的數學專題出發，了解相關的歷史。
- [29] 香港教育署數學組 (2000)。《學校課程發展示例：空間探索（第一及第二學習階段）》。香港：教育署。
- [30] 香港教育署數學組 (2001)。《中一至中五數學科教學資源套（一）：運用資訊科技》。香港：教育署。
- [31] 香港教育署數學組 (2001)。《中一至中五數學科教學資源套（二）：照顧學習差異》。香港：教育署。
- [32] 香港教育署數學組 (2001)。《中一至中五數學科教學資源套（三）：培養高層次思維能力》。香港：教育署。
- [33] 香港教育署數學組 (2002)。《平面圖形多面體》。香港：教育署。
- [34] 香港教育署數學組 (2002)。《三角形的面積》。香港：教育署。
- [29]-[34]乃為教統局教學資源，每所學校均應收到，值得參考。
- [35] 香港統計處 (2002)。《統計與生活—教學指引》。香港：香港印務局。
- [36] 香港統計處 (2002)。《統計與生活—活動指引》。香港：香港印務局。
- [37] 波利亞 (2002)。《怎樣解題》。上海：上海科技教育出版社。
- [38] Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: Wiley.

[39] Pólya, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning*. New Jersey: Princeton University Press.

[37]—[39]是著名的數學及數學教育家 Pólya 的經典名著。書中對數學解難、探究和發現的闡釋，已成今天數學教育的主流觀點之一。每次翻閱這些著作，總能就教與學為你帶來新的衝擊與啓示，這正是名著最動人的地方！

[40] 蕭文強、林建（1982）。《概率萬花筒》。香港：廣角鏡出版社。

這本小書是較少見的關於統計的科普讀物，由不少常見的現象引入統計。老師與學生均不可錯過。

[41] Reichmann, W. J. (1975). *Use and abuse of statistics*. London: Chapman & Hall.

[42] Leung, K. T. & Cheung, P. H. (1988). *Foundamental concepts of mathematics*. Hong Kong: Hong Kong University Press.

[43] Leung, K. T. & Suen, S. N. (1992). *Vector, matrix and geometry*. Hong Kong: Hong Kong University Press.

[44] Leung, K. T., Mok, I. C. & Suen, S. N. (1994). *Polynomials and equations*. Hong Kong: Hong Kong University Press.

[42]—[44]是香港大學數學系梁鑑添博士在退休前與前線老師合寫給高中的三本書。希望學生從中感受到多點「數學味道」，亦可以說是作者從高等數學的「高觀點」闡釋學校數學。

附錄

要明白弱大數定律之前，首先要明白何謂「概率上收斂」(converge in probability)。

若 X_n 為隨機變量之序列。 X 又是一隨機變量。

我們稱 $X_n \xrightarrow{P} X$ (概率上收斂) 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\overline{X}_n - X| \geq \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

弱大數定律是這樣說的：

若 X 是一隨機變量， X_1, X_2, \dots, X_n 為 X 之隨機抽樣，那末 $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ ，其中 μ 為 X 之平均值。

故此，這定律並沒有說 $\overline{X}_n \longrightarrow \mu$ ，只是說 $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ 。換言之，不是說當 n 愈大，樣本平均值 \overline{X}_n 會愈來愈近 μ 。再換句話說，就是這定律並不是說，當樣本愈來愈大 (sample size)，樣本平均值會趨向 μ 。

我們可以這樣理解。首先以擲毫為例 (假設得正反兩面的概率均等)。擲毫這事件形成的隨機變量稱為 X 。我們作出抽樣 X_1, X_2, \dots, X_n 。假如得了

0 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 ……

當 n 愈來愈大時，得出了不同的 \overline{X}_n ：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…	…
X_n	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	…	…
\overline{X}_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{16}$	…	…

在這特別的情況， X_n 確是愈來愈近 $\frac{1}{2}$ 。但現並不表示這是必然的（這就是與常見的理解之最大分別）。

我們確有可能出現「特異」的情況，（硬幣正反兩面的概率同樣均等如）如

1100000000000000……

或

1111110111111111……

只是這種出現的可能性比較低（這就是所謂「概率上收斂」）。

我們可以這麼理解（以下已是「大數定律」之註釋，而非大數定律本身：因為大數定律並沒有如以下例子中「找不同的人做實驗」的含意）。假若我們叫很多學生（例如說 100 個學生）擲同一個硬幣（亦是假設了得正反兩面概率均等）許多許多次（例如說 1000 次）。每個學生就得出了一個數值。當擲的次數愈多（1000 次增多，而不是 100 增多）。這 100 個數值會有相當多是接近 $\frac{1}{2}$ 的（但仍有可能有部分偏離 $\frac{1}{2}$ 的）。