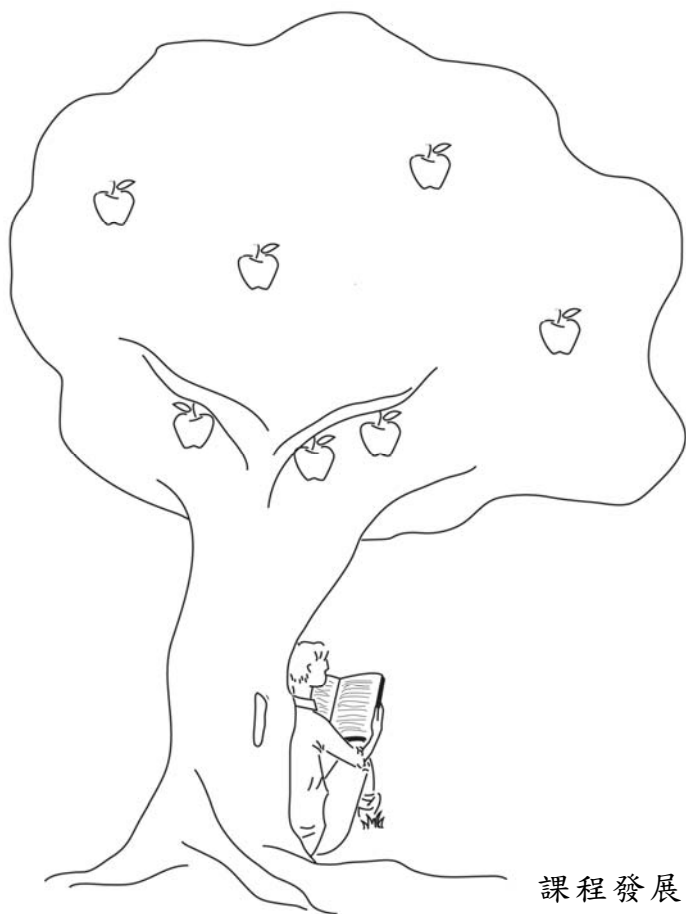


數學百子櫃系列 (五)

數學的應用

圖像處理—矩陣世紀

作者 陳漢夫教授



教育局
課程發展處數學教育組

版權

©2009 本書版權屬香港特別行政區政府教育局所有。本書任何部分之文字及圖片等，如未獲版權持有人之書面同意，不得用任何方式抄襲、節錄或翻印作商業用途，亦不得以任何方式透過互聯網發放。

ISBN 978-988-8019-66-3

目錄

	頁數
前言	v
作者簡介	vii
I. 矩陣的應用	1
II. 修復圖像	4
A. 圖像變得明亮	4
B. 除圖像背景雜訊	5
1. 單一雜訊	5
2. 隨機雜訊	6
3. 除網／除震	9
III. 壓縮圖像	12
A. JPEG 2000 壓縮	12
B. JPEG 壓縮	14
IV. 結語	16
參考文獻／出處：	22

前言

為配合香港數學教育的發展，並向老師提供更多的參考資料，課程發展處數學教育組於 2007 年開始邀請大學學者及資深老師撰寫專文，並蒐集及整理講座資料，輯錄成《數學百子櫃系列》。本書《數學的應用：圖像處理—矩陣世紀》是這個系列的其中一冊，當中輯錄了中文大學理學院副院長陳漢夫教授於 2007 年 1 月在「新高中數學課程知識增益系列—數學應用」研討會上演說的內容，其主題為如何將數學應用於圖像的修復及壓縮，研討會內容精彩豐富，介紹現今課堂上較少討論到的應用。現將研討會的講章輯錄成書，供老師參考。本書內容由作者提供，並不反映教育局的立場。

本系列能夠出版，實在是各方教育工作者共同努力的成果。在此，謹向提供資料、撰寫文章的老師、學者，以及所有為本書勞心勞力的朋友，致以衷心的感謝。

如有任何意見或建議，歡迎致函：

九龍油麻地彌敦道 405 號九龍政府合署 4 樓

教育局課程發展處

總課程發展主任（數學）收

（傳真：3426 9265 電郵：ccdoma@edb.gov.hk）

教育局課程發展處

數學教育組

作者簡介

陳漢夫教授為香港中文大學理學院副院長（研究）及香港中文大學數學系講座教授。1985 年在美國紐約大學 Courant 研究院獲應用數學博士學位後，受聘於麻州大學安默斯特分校，任職助理教授。1986 年回港後，先後在香港大學（1986-92）及香港科技大學（1993）任教，並於 1993 年加入香港中文大學。

陳漢夫教授已發表超過 90 篇文章。由於陳教授的文章被引用的次數甚多，因此自 2004 年起，他的名字被列在 ISI 數學家名單首 300 名內。他曾於 1989 年獲得英國 Leslie Fox 數值分析獎、1997 年獲得中國科學院的馮康獎及 1998 年獲得晨興數學獎。陳教授現為十份國際學術期刊擔任編輯委員，其中包括 Asian Journal of Mathematics（兩主編之一），ACM Computing Reviews, SIAM Journal on Imaging Sciences 及 SIAM Journal on Scientific Computing。

I. 矩陣的應用

什麼是矩陣？勞倫斯・菲什伯恩（Laurence Fishburne）於電影—廿二世紀殺人網絡¹中指出矩陣無處不在，例如電視螢幕上、工作間內、教堂內等等。

我們首先回顧矩陣乘法，兩個矩陣相乘是列向量和行向量的內積，為什麼不是如加法般，將兩個矩陣的對應元素相乘呢？

試以一個實例說明之，大家上茶樓吃點心結賬時有否留意，其實我們都用了一次矩陣乘法，就是數量向量和價格向量的內積。

漢苑軒點心紙					數量
\$8	小點	⑤	⑤		2
\$10	中點	⑧			1
\$12	大點	③			1
\$15	特點	⑦	⑦		2
\$18	頂點				0

$$\text{付款 (元)} = (8 \ 10 \ 12 \ 15 \ 18) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 68$$

¹ 「廿二世紀殺人網絡」的英文片名為 “The Matrix”。

[矩陣的乘法--數量向量和價格向量的內積]

矩陣作為一種數學工具，經常用以描述自然科學或經濟現象的作用和反應的關係。

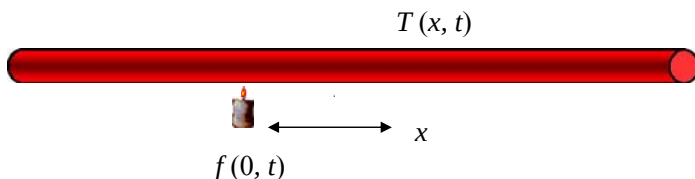
$$(\text{矩陣 } A) \times (\text{作用 } x) = (\text{反應 } b)$$

既然有乘法，相對應亦有矩陣除法。如果我們想知道什麼作用 x 引發反應 b ，可透過計算 A 的逆矩陣求得到。

$$(\text{作用 } x) = (\text{矩陣 } A^{-1}) \times (\text{反應 } b)$$

如此，矩陣就能幫助我們對自然科學或經濟現象進行預測。

其他例子還有很多，例如利用熱方程計算金屬棒的傳熱情況，下圖中 $T(x, t)$ 為在時間 t 及位置 x 的溫度。



透過離散方法²，我們可以把有關熱方程的偏微分方程³化成矩陣方程，再寫成

² 離散方法 (Method of Discretization)

離散方法的基本概念如下：

函數 $u'(x)$ 可表為 $u'(x) = \{u(x[i]) - u(x[i+1])\} / \{x[i] - x[i+1]\}$ 。

³ 偏微分方程 (Partial Differential Equation)

偏微分方程是指含有未知函數及偏導數的方程。它描述自變數，未知函數及其偏導數之間的關係。方程的解便是滿足這個關係的函數。

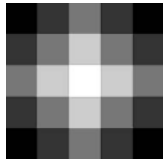
$$A\mathbf{f} = \mathbf{T}。$$

1997年諾貝爾經濟學獎得主就是以此方程作期權定價。除此，圖像除噪亦是此方程的一個逆問題，即 $\mathbf{f} = A^{-1}\mathbf{T}$ 。

要了解圖像與矩陣的關係，我們可以仔細看看這張印有CUHK（香港中文大學縮寫）的圖片。



這圖片是一幅灰階⁴圖像，每個像素⁵的數值由0至255（0代表全黑色，而255代表全白色），所以我們可以將圖像看成一個矩陣，每個元素裝載着一個像素的值。我們把一個 256×256 的圖像看成一個 256×256 的矩陣。例如以下的影像可看成 5×5 的矩陣，而矩陣內的每個元素則載有對應的像素值。



$$\begin{pmatrix} 0 & 64 & 128 & 64 & 0 \\ 64 & 128 & 192 & 128 & 64 \\ 128 & 192 & 255 & 192 & 128 \\ 64 & 128 & 192 & 128 & 64 \\ 0 & 64 & 128 & 64 & 0 \end{pmatrix}$$

由於像素的數值為0至255，所以每個像素須用8位元（一位元

⁴ 灰階 (grayscale)

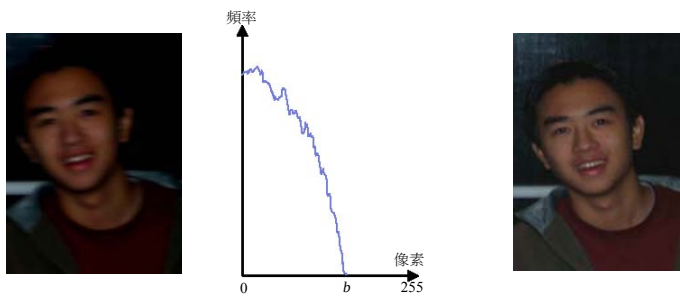
⁵ 像素 (pixel) 是 picture element 之簡稱。

組）來表示。

一幅低解像度 256×256 的灰階圖像共有65 536個像素。而彩色圖像是由紅、綠和藍三種顏色頻段組成。如紅色頻段，每個像素的數值由0至255，0代表完全沒有紅色，而255代表全紅色，因此彩色圖像每個像素共須24位元儲值。每幅圖像蘊藏着豐富的內容，例如，儲存一幅三百萬像素的圖像的空間，約可存放一千頁純文字的書。

II. 修復圖像

現在說說圖像修復，我們怎樣應用數學去修復或提高圖像的品質？使漆黑的圖像變得明亮，使模糊的圖像變得輪廓鮮明。



A. 圖像變得明亮

我們可以把一幅低對比度的圖像（上左圖），透過按比例放大其像素值，使圖像變得更明亮（上右圖）。對於一幅低對比度的圖像，先將其像素值出現的頻率以統計圖（上中圖）表達出來，我們發現其像素值集中於0至 b 之間，而 $b \ll 255$ ，然後將原圖像的每一個像素值數乘以 $\frac{255}{b}$ ，從而按比例放大

到 0 至 255 之間，由此得出右圖。即是：

$$\frac{255}{b}A = B, \text{ 其中}$$

A 代表以矩陣形式表示未變得明亮的圖像，

B 代表以矩陣形式表示變更後的圖像，及

A 及 B 內的數據代表圖像上各點的像素值。

B. 除圖像背景雜訊

有時我們發現圖像會有一些**背景雜訊**，例如利用顯微鏡觀察細胞時，樣本可能會被干擾。

1. 單一雜訊

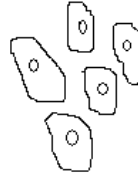
若雜訊來自單一來源，我們可以利用矩陣減法去除背景雜訊。在以下的例子，我們在顯微鏡拍攝一幅細胞照片（1），假設該照片被外來光源干擾，這時我們可以拍攝一幅沒有細胞的對照照片（2），即背景雜訊，然後我們將對應照片（1）的矩陣減去照片（2）的矩陣，所得的差可令我們得到一幅清晰的細胞照片（3）。



細胞照片（1）



背景雜訊（2）



清晰的細胞照片（3）

即 $C = A - B$ ，其中

A 代表以矩陣形式表示細胞照片（1）

B 代表以矩陣形式表示沒有細胞的對照照片（即背景雜訊（2））

C 代表以矩陣形式表示清晰的細胞照片（3）

2. 隨機雜訊

假如雜訊是隨機，除噪就變得複雜了。不過，若隨機雜訊 N 是「鹽（白色）與胡椒（黑色）雜訊」⁶而平均值為0（即將矩陣 N 所有元素的值加起來等於0），這樣我們可以利用矩陣加法去除雜訊，我們可以拍攝 k 幅（ k 的值必須足夠大）細胞照片（ A ），每幅照片都被不同的隨機雜訊 N_i 干擾，但我們可以求這 k 幅照片的「平均值」，讓這 k 個隨機雜訊 N_i 互相抵消，得出一幅清晰的細胞照片 A 。

$$\frac{(A + N_1) + (A + N_2) + \cdots + (A + N_k)}{k} = A + \frac{N_1 + N_2 + \cdots + N_k}{k} \approx A$$

除了以上例子外，我們還可以去除一些裂紋狀雜訊，使破裂的油畫能複製成光滑的圖像；另外，還可以讓50年代的舊電影，收錄成清晰的DVD版本。

現在讓我介紹多一個除噪的方法—中位數濾子⁷。下頁左圖是一幅被干擾的圖像，有10%的像素值變成255（即白色），我們只有這一幅圖像[1]，該怎麼辦？

⁶ 鹽(白色)與胡椒(黑色)雜訊(椒鹽噪聲)(salt-and-pepper noise)
圖像中的一種噪聲，它是由隨機的白點或黑點所造成。

⁷ 中位數濾子(Median Filter)



我們可以利用3乘3的中位數濾子來去噪，對應每個像素 c ，我們把周邊8個像素的值，連同本身值，求這9個數之中位數來取代原像素值 c 。經過兩次中位數濾子後，我們得出清晰的右圖。

例如，原有矩陣為：

175	179	181	190	195
175	178	180	185	193
174	175	200	178	190
173	172	175	191	190
170	162	178	180	190

設 $c = 200$ 。而“172, 175, 175, 178, 178, 180, 185, 191”的中位數是 178。因此現在 c 的值是 178 而新的矩陣變成如下：

175	179	181	190	195
175	178	180	185	193
174	175	178	178	190
173	172	175	191	190
170	162	178	180	190

剛才我提及過，可以利用圖像處理來修復舊電影，但試想想請一個電腦藝術師來修復一套兩小時的舊電影的情況。假設他每小時能修補四個畫面，共需要多少時間才能完成？因為電影通常每秒包含三十個畫面，兩小時的電影共有216 000個

畫面，即需要六年才能完成；若果其時薪為一百元，我們便需要支付他共五百萬元。

幸好我們可以利用電腦自動化完成有關工作，但電腦怎樣分辨出污物和裂紋，讓我們得出一幅清晰的圖像呢？其中一種方法是採用偏微分方程的規則系統，使能自動化修補照片上的一些裂紋，而當中則會涉及解決一條矩陣方程。

矩陣的應用十分廣泛，除了相片圖像修復外，醫學上的局部 X 射線檢法，亦是透過解決一條積分方程及運用矩陣除法，便能讓人類看到自己身體的內部狀況（這個是 1979 年諾貝爾醫學獎的得獎論題）。設 x 為我們要觀察的器官的圖像像素值矩陣， A 是放射出來 X 射線的矩陣，透過檢驗器收取有關數據矩陣

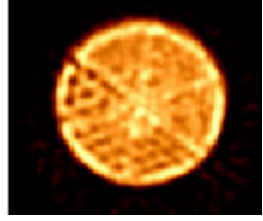
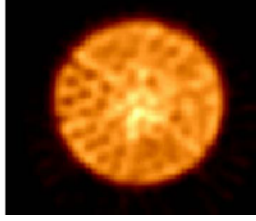
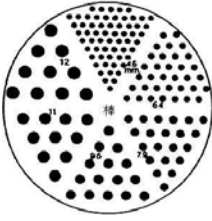
$$b = Ax,$$

這時利用矩陣除法計算出

$$x = A^{-1}b.$$

但我們怎樣知道得出來結果的準確度呢？我們可以把直徑大小不一的棒子⁸（左下圖）放進 X 光機內，然後將得到的數據矩陣 b ，利用 A^{-1} 計算出 x （中間圖）。因為棒子的分佈是已知的，所以我們能夠將計算和真實的 x 作比較，並計算出其準確度。我們更可以採用偏微分方程的規則系統，使結果 $A^{-1}b$ 更為準確（右下圖）。

⁸ 直徑大小不一的棒子 (Jaszczak Phantom)



3. 除網／除震

我們再看看一些圖像處理的例子，相信大家拍照時，有機會因手部搖動，使照片變得模糊。若果我們只是向單一方向搖動，如向右擺動，這樣拍下來的身影像 p 其實是由多幅原來的真實影像 q 合成起來的，因為當我們手部向右擺動，仿如真實影像向左平移，所以影像 p 的第 i 個元素 $p(i) = q(i) + q(i+1) + q(i+2) + \dots + q(i+k)$ 。倘若搖動並非單一方向，我們可以用一個模糊函數 $B(t)$ ⁹ 來表達：

$$p(i) = \sum_t B(t)q(i-t)$$

以專門術語來表達，這是一條矩陣方程

$$Bq = p,$$

而 B 是模糊矩陣，計算

$$q = B^{-1}p,$$

得出原來的真實影像 q 。對於四百萬像素的相機，模糊矩陣 B ：

⁹ 模糊函數 (Fuzzy Function)

模糊函數可按照明確函數(crisp function)與模糊概念的方面分為不同類型。

$$B = \begin{pmatrix} L & & & & \\ & L & & & 0 \\ & & L & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & L \end{pmatrix}_{4\,000\,000 \times 4\,000\,000}$$

而以上例子的L是一個下三角矩陣：

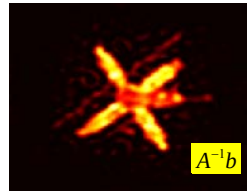
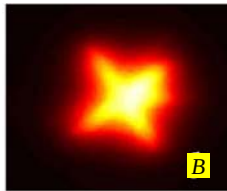
$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & & & & \cdot \\ 1 & & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

如果影像模糊是因為錯誤對焦所造成，我們也可以利用類同的方法去求出原來的真實影像 $\mathbf{q}$ ，當然這次的模糊矩陣則會不同。1991年美國洛杉磯的暴亂中，警方就利用上述方法，將從直昇機上拍下疑犯的模糊影像變得清晰，將歹徒繩之於法。

其他的應用例子還有遙距雷達監測、地面的天文觀測等等，下圖便是一幅從衛星上拍下來的照片[2]，但你有否想過這幅照片也是經過圖像處理？



不論我們利用衛星拍攝地面上的情況，還是在地面上作天文觀測，都會被大氣層的環流影響。我們不能直接穿透大氣層拍攝太空上的衛星，不過，若果我們得知大氣層環流的狀況 A （下左圖），這樣我們便能夠把拍攝下來的影像 b （下中圖），修復成下右圖[3]，此技術有助我們在地面監測太空上的人造衛星。



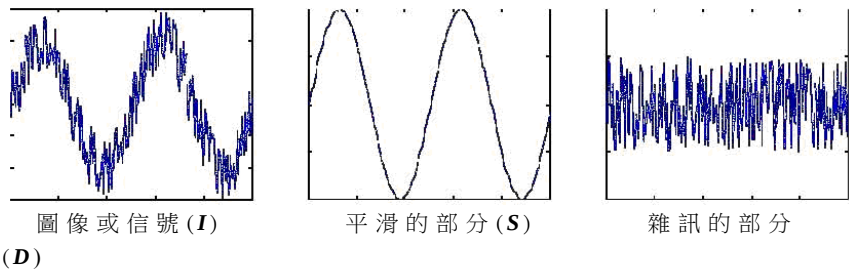
但我們可以怎樣計算出大氣層環流的狀況呢？

我們可以發射一束鐳射光往大氣層外，作為指導星號 x ，因為 x 是已知的，連同拍攝下來的影像 b ，我們便可以推算出大氣層環流的狀況 A 。

III. 壓縮圖像

A. JPEG 2000 壓縮

矩陣另一個應用範疇是圖像壓縮，其概念十分簡單，跟記下英文生字的要領一樣：省卻一些相同的部分（詞幹），並記下不相同的部分（字尾）。壓縮的概念就是將信號或圖像 I （下左圖）分成兩部分，一是平滑的部分 S （下中圖），另一是雜訊的部分 D （下右圖），如果信號或圖像 I 是平滑的，這樣雜訊部分 D 便十分小。



現在我為大家介紹 JPEG 2000 這個圖像格式，它是利用小波¹⁰來壓縮圖像，舉一個簡單的例子來說明之，設 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$ ，我們把 I 每兩個元素相加起來，得出

$$S_1 = \{3, 7, 11, 15, 15, 11, 7, 3\},$$

兩兩相減得出

$$D_1 = \{-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1\}.$$

¹⁰ 小波 (Wavelet)

對應 S_1 重複以上步驟，得出

$$S_2 = \{10, 26, 26, 10\} \text{ 和 } D_2 = \{-4, -4, 4, 4\},$$

但若要儲存信號 I ，我們並未能減省相關記憶空間，仍然要記下 D_1 、 S_2 和 D_2 共16個數字。因此，我們再對應 S_2 重複以上步驟，得出

$$S_3 = \{36, 36\} \text{ 和 } D_3 = \{-16, 16\},$$

最後，

$$S_4 = \{72\}, D_4 = \{0\},$$

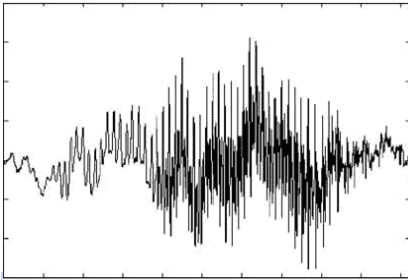
這樣

$$I = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3 \oplus S_4 \oplus D_4,$$

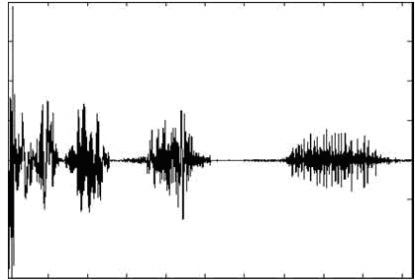
但因為 $D_4 = \{0\}$ ，我們便可以省略之，減去了一個記憶空間，但無損信號的完整性。

另一個例子，下列信號經小波變換後，約有400個元素可被省略（ $D_i \approx 0$ ），壓縮就是去除這些十分小的 D_i 。

原來信號



經小波變換的信號



對於更平滑的信號，我們會得出更多 0 值，即可以減省更多記憶空間；而圖像是一個平滑函數的好例子，頭髮和膚色都是十分平滑的部分。正如上文所提及的，小波變換也可以寫成為矩陣方程。

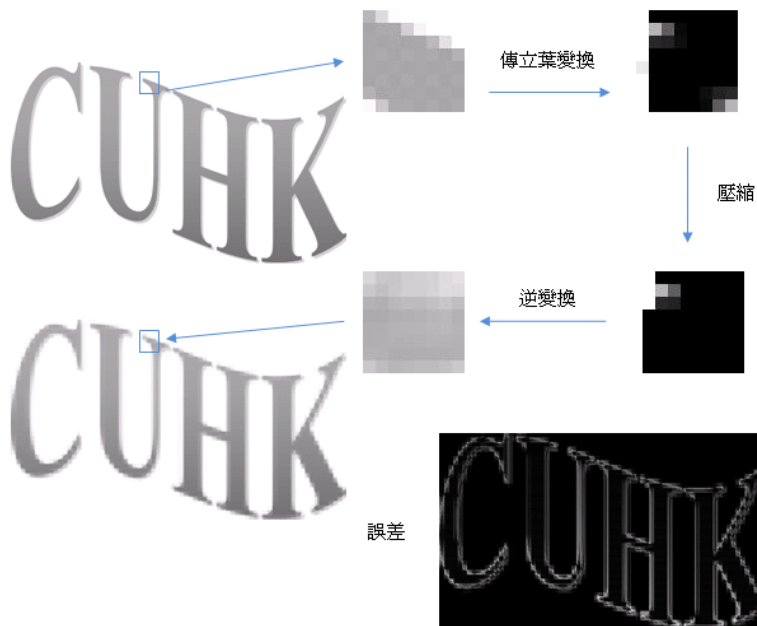
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \\ -4 \\ 4 \\ 4 \\ -16 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_4 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{matrix}$$

B. JPEG 壓縮

而另一個圖像儲存格式就是較早期的JPEG，它是利用傅立葉變換¹¹來壓縮圖像。以下是一個利用傅立葉變換作中度圖像壓縮的例子，現以圖中的細小部分作示例以明之，小圖共有64個像素，經過傅立葉變換後，我們只儲存其中9個系數，然後再透過逆變換，產生出已壓縮圖像。

¹¹ 傅利葉轉換 (Transformée de Fourier 英譯名: Fourier Transform)

Transformée de Fourier 有多種中文譯名，常見的有「傅利葉變換」、「傅利葉轉換」、「傅立葉變換」、「富里葉變換」等等。傅利葉變換在信號處理、機率論、統計學、聲學、光學、結構動力學等都有廣泛的應用。此變換能將滿足一定條件的某個函數表示成三角函數（正弦和/或餘弦函數）或者它們的積分的線性組合。



我們知道不論採用任何變換來壓縮圖像，都一定會出現誤差，使已壓縮圖像失真。現在讓我們比較這兩個圖像格式[4]在以1:94壓縮一幅508KB的圖像時的表現。我們可見JPEG 2000（右下圖）的壓縮比率和JPEG（左下圖）一樣，但是我們可以清楚看出右圖的花朵的顏色是粉黃，而左圖則出現少許紅色。



IV. 結語

相信大家現在對於矩陣與圖像處理之間的關係會有更深入的認識。正如上文所提及的，現今科技發達，我們可以假手電腦自動化完成有關工作，這樣我們為什麼要學數學呢？為何不假手於一部超級電腦呢？試想想，當我們解決這條二次方程：

$$6x^2 - 78x + 252 = 0 \text{ 時，}$$

我們知道可以這樣求解：

$$x = \frac{78 \pm \sqrt{78^2 - 4(6)(252)}}{2 \times 6} = 6 \text{ 或 } 7$$

但究竟是誰找出答案呢？電腦、紙筆、抑或是我們的腦袋呢？當然是我們的腦袋，試問沒有我們利用數學先把問題解決，再將對應的規則系統轉化成電腦程式，電腦又怎樣懂得為我們解決這條二次方程呢？

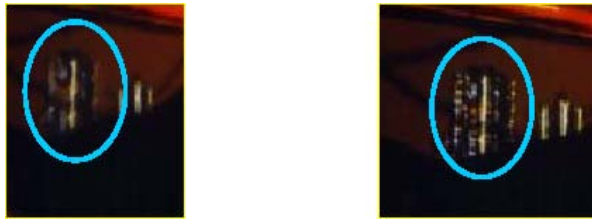
上文曾經提及圖像蘊藏着豐富的内容，我們要用相當多的記憶體才能把它儲存起來，因此我們在計算一幅圖像 A 的逆矩陣時，若果只利用高中時所學的數學和家中那部 1GHz 的個人電腦，我們需要 100 年的時間才能把 A^{-1} 計算出來，即使我們使用全球現時最快的超級電腦，仍需要數個月才能完成。雖然科技日新月異，但根據摩斯定理¹²，以電腦硬件每十八個

¹² 摩斯定理 (摩斯定律) (Moore's Law)

此定律是由英特爾(Intel)其中一創始人戈登·摩爾(Gordon Moore)提出的。摩斯定律說明：集成電路上可容納的電晶體數目，約每 18 個月便會增加一倍，性能也將提升一倍，而價格下降一半；後來，這一定律揭示了信息技術進步的速度，並經常以十八個月作為檢討及修訂高科技產業發展速度的時限。

月增長一倍的速度來計算，我們可以在 2050 年用 1 秒的時間把 A^{-1} 計算出來，但這確是一件很遙遠的事情啊！幸好，若我們學好數學，便懂得利用數學開發一些更快的規則系統來計算 A^{-1} 。

由此可見，數學的發展對人類的貢獻良多，大家可能會問經過這麼多年的發展，還有什麼數學問題有待我們去解決呢？其實，現今的社會訊息萬變，而大自然的奧秘更是千變萬化，有很多不同的問題等待着我們利用數學來解決，例如：上文我們曾經利用過中位數濾子來去噪，但大家有否留意到經過兩次中位數濾子去噪後，雖然圖像上大部分的雜訊都已經被去掉了，但是圖像變得有點模糊，如遠處的高樓大廈已經變得有點朦朧（下頁左圖）。這時，我們需要其他數學工具來修復這幅模糊影像，使其變得較為清晰（下頁右圖）。



故此我們在研發新的除噪方法時，需要平衡除噪與模糊之間的利弊。最近，我們研發出二階段法¹³，結合了適應性中位數濾子¹⁴和變分法¹⁵的新除噪方法，使修復出來的影像不會變得模糊不清，想對我們的方法作進一步的了解，歡迎參閱 (with C.W. Ho and M. Nikolova) Salt-and-Pepper Noise Removal by

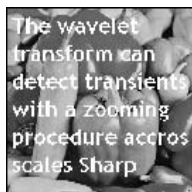
¹³ 二階段法 (Two-Phase Method)

¹⁴ 適應性中位數濾子 (Adaptive Median Filter)

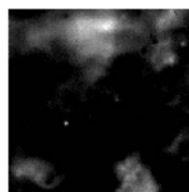
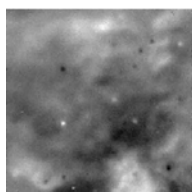
¹⁵ 變分法 (Variational Method)

Median-type Noise Detectors and Detail-preserving Regularization, *IEEE Transactions Image Processing*, 14 (2005), pp. 1479-1485。

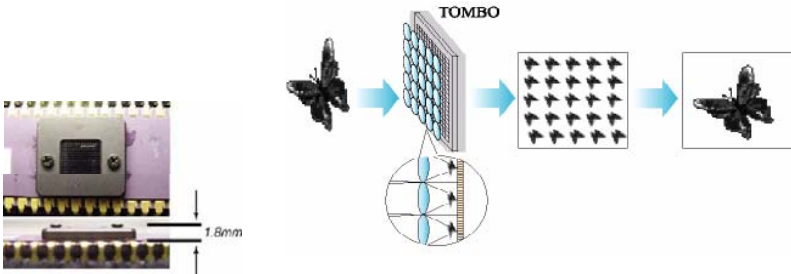
其他應用的例子還有很多，研究範疇包括：透過圖像處理[5]去除圖像上的文字或花紋。



在天文學上，使用紅外線攝像機所拍下的搖曳不清天文圖像（下左圖），也可以透過解決矩陣方程[6]，修復成有用的天文數據。



在日常生活中，相信大家都會察覺到時下的數碼相機越來越纖薄，但大家有否想到為什麼不需要使用長焦距的鏡片，也可以拍攝出高解像度的圖像呢？其概念[7]是利用多個細小的鏡片，像複眼般，而並非只用單一鏡片來拍攝影像，然後將拍攝下來的圖像，透過圖像處理，重整成一幅高解像度的圖像。

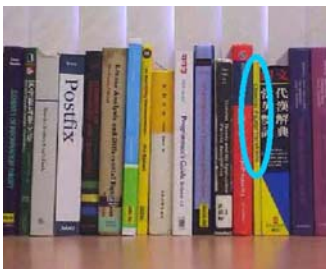


超薄的圖像訊息收錄卡

以下為另一實例[8]，左面是其中一幅利用細小鏡頭拍攝下來的低解像度圖片，而右面則是一幅經圖像處理重整後的高解像度圖像。



最後，為大家介紹的研究是如何提高錄像的品質，我們抽取錄像中的一幅圖像為例（下左圖），可見經過圖像處理後，書脊上模糊不清的文字變得清晰。



修復前



修復後

我們知道錄像是由多幅連續拍攝的圖像所組成，以每秒30張圖像的速度錄下，讓我們看起來是一個個連貫的畫面。

但我們若要看清楚畫面上某本書書脊上的文字時，會發現圖像可能有點模糊不清，現在我們想看清楚畫面上那本黃色書書脊上的數字是多少，該怎麼辦？這時我們可先選定出一格參考圖像，再連同往後數格圖像，透過一些數學工具，如雙線性插值或最近研發的Tight Frame Method [9]等，使圖像變得清晰。



讓我們看看經修復後的圖像，現在大家能夠清楚地看見書脊上的數字。



雙線性插值



Tight Frame Method

相信現在大家對數學與圖像處理之間的微妙關係有了一定程度的認識，若果大家想對相關的研究作進一步的了解，歡迎大家瀏覽本人的網頁：<http://www.math.cuhk.edu.hk/~rchan/>。大家也可以在搜尋引擎中，輸入 '**Raymond Chan**'，查詢本人的網址。

參考文獻／出處：

- [1] Image from HKEDCITY (Nov 2006).
- [2] Map downloaded from Google Maps.
- [3] R. Chan, M.K. Ng and R.J. Plemmons, *Generalization of Strang's Preconditioner with Applications to Toeplitz Least Squares Problems*, Numerical Linear Algebra Applications 3 (1996), pp.45-64.
- [4] Amey Dilip Purandare, <http://www.geocities.com/ee00224/btp2.html>.
- [5] R. Chan, L.X. Shen and Z.W. Shen, *A Framelet-Based Approach for Image Inpainting*, CUHK Math. Dept. Research Report #2005-04.
- [6] R. Chan, L.X. Shen and Z.W. Shen, *Restoring Chopped and Nodded Images by Tight Frames*, Proceedings to the SPIE Symposium on Advanced Signal Processing: Algorithms, Architectures, and Implementations, Volume 5205, pp. 310-319, San Diego CA, August 2003, Ed: F. Luk.
- [7] Y. Kitamura, R. Shogenji, K. Yamada, et al., *Reconstruction of a high-resolution image on a compound-eye image-capturing system*, Applied Optics 43 (2004), pp.1719-1727.
- [8] Image of Barbara.
- [9] R. Chan, Z. Shen and T. Xia, *Resolution Enhancement for Video Clips: Tight Frame Approach*, Proceedings of IEEE International Conference on Advanced Video and Signal-Based Surveillance, pp. 406-410, Como, Italy, Sept. 2005.

數學百子櫃系列

作者

- | | |
|--------------------------------------|-------------|
| (一) 漫談數學學與教—新高中數學課程必修部分 | 張家麟、黃毅英、韓藝詩 |
| (二) 漫談數學學與教—新高中數學課程延伸部分單元一
(即將出版) | 韓藝詩、黃毅英、張家麟 |
| (三) 漫談數學學與教—新高中數學課程延伸部分單元二
(即將出版) | 黃毅英、張家麟、韓藝詩 |
| (四) 談天說地話數學 | 梁子傑 |
| (五) 數學的應用：圖像處理—矩陣世紀 | 陳漢夫 |
| (六) 數學的應用：投資組合及市場效率 | 楊良河 |
| (七) 數學的應用：基因及蛋白的分析
(即將出版) | 徐國榮 |

