高中數學課程闡釋：單元一（微積分與統計）

教育局
課程發展處
數學教育組

目　錄

頁數

前 言

《數學課程及評估指引（中四至中六）》（2007）（以下簡稱《課程及評估指引》）是為 2009 年 9 月實施的新高中學制而編訂。高中數學課程包括必修部分及延伸部分。延伸部分包括兩個單元，分別是單元一（微積分與統計）及單元二（代數與微積分）。

在《課程及評估指引》中，單元一的學習重點以表列形式歸於不同學習單位內。表中「注釋」欄的內容為學習重點的補充資料。本小冊子內的課程闡釋旨在進一步解釋：

（一）　單元一學習重點的要求；

（二）　單元一的教學建議；

（三）　單元一學習單位之間的關係和結構；及

（四）　必修部分與單元一的課程銜接。

本小冊子內的課程闡釋連同《課程及評估指引》內每一學習單位的「注釋」欄及教學時數，可顯示該學習單位處理的闊度和深度。教師宜在施教單元一時，把必修部分及單元一的內容視為連貫的數學知識，並培養學生運用數學解決問題、推理及傳意的能力。此外，教師須留意，《課程及評估指引》中的學習單位及學習重點的編排次序並不等同於學與教的次序，教師可因應學生需要有系統地編排學習內容。

歡迎各界人士就本小冊子提供意見和建議。來函請寄：

九龍油麻地彌敦道 405 號

九龍政府合署 4 樓

教育局課程發展處

總課程發展主任(數學)收

傳真：3426 9265

電郵：ccdoma@edb.gov.hk

(空白頁)

基礎知識領域

- 基礎知識領域內容包括兩個學習單位。第一個學習單位「二項展式」為掌握二項分佈的基礎。第二個學習單位是「指數函數與對數函數」。很多和自然現象有關的數學模型皆涉及指數函數。正態分佈的概率分佈函數亦涉及指數函數。

- 基礎知識領域的內容是單元一內微積分領域和統計領域的先備知識。教師教授基礎知識領域內的課題時宜避免十分嚴謹的處理。

學習單位	學習重點	時間
基礎知識領域		
1. 二項展式	1.1 認識展式 $(a+b)^n$ ，其中 n 為正整數	3

課程闡釋：

- 為方便表達二項展式，教師可引入求和記法 (Σ)。例如： $\sum_{k=1}^{7} k^3$ 及 $\sum_{i=0}^{n} 4^i$ 。
- 學生應懂得關係式 $\sum_{r=1}^{n}(ax_r \pm by_r) = a\sum_{r=1}^{n} x_r \pm b\sum_{r=1}^{n} y_r$ 。
- 若不引起混淆，教師可在課堂討論時使用 $\sum x_i$ 及 $\sum x$ 這些符號。
- C_r^n 的概念及符號於必修部分已有討論。學生須認識 $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$，其中 n 是正整數。
- 二項展式的嚴格證明非單元一課程所需。
- 在展式中，教師可選取其他符號如 ${}_nC_r$ 或 $\binom{n}{r}$ 。
- 引入二項展式的概念有多種方法。例如，教師可著學生以乘法展開 $n = 0, 1, 2, 3, 4$ 的 $(a+b)^n$ ，並將每項的係數填入下圖的空格內。學生可觀察係數的規律寫出 $(a+b)^5$ 和 $(a+b)^6$ 的展開式。

展式	帕斯卡三角*
$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = a+b$	1 1
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1

另外，教師可利用組合的概念來解釋二項展式，例如，展開 $(a+b)^3$ ， ab^2 項的係數可當成從 3 個 b 中揀選 2 個 b 。

$$(\boxed{a}+b)(a+\boxed{b})(a+\boxed{b}) \longrightarrow a\cdot b\cdot b = ab^2$$

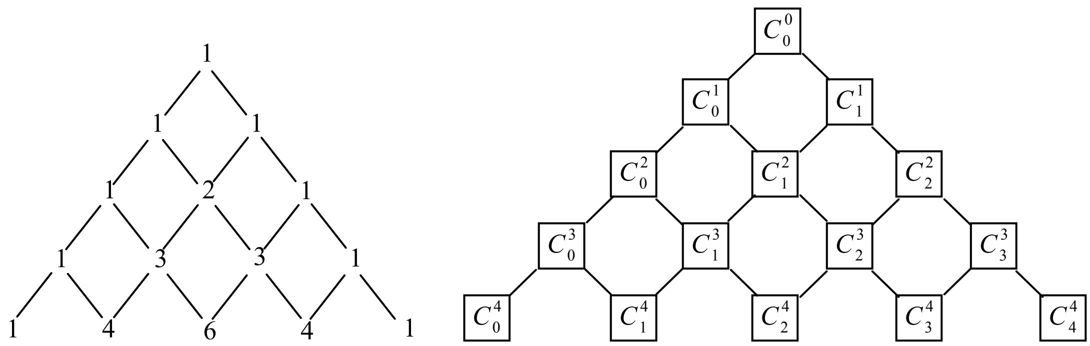
$$(a+\boxed{b})(\boxed{a}+b)(a+\boxed{b}) \longrightarrow b\cdot a\cdot b = ab^2$$

$$(a+\boxed{b})(a+\boxed{b})(\boxed{a}+b) \longrightarrow b\cdot b\cdot a = ab^2$$

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot b\cdot b = ab^2 \\ b\cdot a\cdot b = ab^2 \\ b\cdot b\cdot a = ab^2 \end{array}\right\} C^3_2\, ab^2 = 3\, ab^2$$

我們可以用類似方法找出其他項的係數，從而得出
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

- 教師可著學生以組合的方法求展開式 $(a + b)^n$ 各項的係數，再比較左邊帕斯卡三角的數值。



一般而言，$(a+b)^n = C^n_0 a^n + C^n_1 a^{n-1}b + C^n_2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C^n_{n-1} ab^{n-1} + C^n_n b^n = \sum_{r=0}^{n} C^n_r a^{n-r} b^r$

* 帕斯卡於 1653 年出版的《算術三角論》介紹二項式係數的三角形排列方法及其應用。因此，一般稱這個三角形的排列方法為帕斯卡三角。事實上，早於 13 世紀，中國數學家楊輝在他的著作《詳解九章算法》(1261) 已展示相同的三角形，並指出 「賈憲用此術」，故此，這個三角形的排列方法亦稱為 「楊輝三角」或 「賈憲三角」。

學習單位	學習重點	時間
基礎知識領域		
2. 指數函數及對數函數	2.1 認識 e 的定義和指數級數 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ 2.2 認識指數函數和對數函數 2.3 使用指數函數和對數函數解應用題 2.4 將 $y = kx^n$ 及 $y = ka^x$ 化為線性關係式，其中 a，n 和 k 為實數，$a > 0$ 和 $a \neq 1$	7

課程闡釋：

- 一些引入 e 的概念的建議：
  - (a) 複利息

    按月計算利息所得的本利和會比按年計算為大，按日計算利息所得的本利和會更大。若按小時計算利息，本利和會怎樣呢？

    教師可要求學生計算以下情況的本利和，例如，本金 \$10000，年利率為 12%，年期一年，當中複利息分別按 (i)月計算，(ii)日計算及 (iii)小時計算。

  - (b) 引入定義 $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。當 n 值增大時，試運用計算機找出 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的數值：

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1000 000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2.59374	2.70481	2.71692	2.71815	2.71827	2.71828

學生應從觀察可得 $e \approx 2.71828\ldots$。

教師亦可以引入指數函數 $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ 的概念，但學生不須掌握所涉及的技巧。

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = C_0^n(1)^n + C_1^n(1)^{n-1}\left(\frac{x}{n}\right) + C_2^n(1)^{n-2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + C_3^n(1)^{n-3}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + C_4^n(1)^{n-4}\left(\frac{x}{n}\right)^4 + \cdots$$

$$= 1+n\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\left(\frac{x}{n}\right)^4 + \cdots$$

$$= 1+x+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{3!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1+x+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{3!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\frac{x^4}{4!}+\ldots\right]$$

$$= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

代入 $x=1$，可得到無理數

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}\cdots$$

學生可使用計算機發現 e 的值會大約收斂為 2.71828 ...。

- 學生須懂得把指數函數，如 e^{-x}、e^{kx}、e^{-x^2} 及 e^{x+k} 等展開成指數級數，其中 k 為常數。

- 學生已於必修部分學習指數函數 $y=a^x$ ($a>0$，$a\neq 1$)，對數函數 $y=\log_a x$ ($a>0$，$a\neq 1$) 的性質及其圖像的特徵。這些概念可視為學習本學習單位的先備知識。同時，教師可指出指數函數 $y=e^x$ 和自然對數函數 $y=\ln x$ ($x>0$) 是 $y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 的特例。為加深對指數函數 $y=e^x$ 的認知，學生可比較 $y=2^x$，$y=e^x$，$y=3^x$，$y=2^{-x}$，$y=e^{-x}$，$y=3^{-x}$，$y=\log_2 x$，$y=\log_3 x$ 和 $y=\ln x$ 的圖像。教師可與學生們進一步討論關係式 $e^{\ln x}=x$，$\ln e^x = x$ 和 $a^x = e^{x\ln a}$。

- 在自然現象中，很多規律都滿足指數函數的性質，例如，細菌增長、物質冷卻率、物質的熱能散失、物質增長及衰變數等。學生須掌握以下相關的公式：

  複利息：　$A = P_0 e^{\frac{rt}{100}}$

人口增長：$P(t) = P_0 e^{kt}$，$k > 0$

放射衰變：$P(t) = P_0 e^{-kt}$，$k > 0$

- 若變量 x 與 y 服從關係式 $y = kx^n$ 或 $y = ka^x$，其中 n、k 和 a 均為常數，上述關係式可化為線性關係式。利用圖像中的斜率和 y 軸截距可找出常數的值。

微積分領域

- 微積分領域內容分為兩部分，分別是求導法及其應用和積分法及其應用。函數的導數概念涉及函數極限的概念。在求導法及其應用這部分，學生須理解導數的定義，求導法的基本公式及運算法則。學生須懂得利用導數求曲線的切線方程和研究函數極大/極小值的問題。

- 為解決科學、科技和經濟的一些問題，學生須由已知函數的導數 $f'(x)$ 求函數 $f(x)$。這逆運算的做法就是不定積分的概念。同時，教師應引入以和的極限作為定積分概念。教師可引導學生認識微積分基本定理，將兩看似不同的概念(不定積分和定積分)聯繫起來。

- 學生須充分掌握所使用的符號。

- 教師宜採用直觀但概念正確的引入方法。對於較困難的內容如極限，教師可利用計算機或電腦軟件採用數值方法幫助學生理解其內容而不涉及抽象的定義。教師亦可採用繪圖軟件（如 Graphmatica，Winplot 等）解釋概念。

學習單位	學習重點	時間
微積分領域		
求導法及其應用		
3. 函數的導數	3.1 認識函數極限的直觀概念 3.2 求代數函數，指數函數和對數函數的極限 3.3 透過基本原理認識函數的導數的概念 3.4 認識曲線 $y = f(x)$ 在點 $x = x_0$ 的切線的斜率	6

課程闡釋：

- 在引入函數的極限的概念前，教師應簡略重溫函數的概念和記法。

- 學生須知道 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 的值，由函數在該點附近的變化所決定，並不要求函數 $f(x)$ 本身在 $x = x_0$ 有定義。學生應可從圖像分辨「連續函數」和「不連續函數」。教師可指出函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的極限等於函數在 x_0 的值當且僅當函數在該點連續。函數連續性的嚴謹處理不屬課程所需。

- 列表或圖像顯示函數值在 $x = x_0$ 附近的微小變化有助解說當 x 趨向 x_0 時函數 $f(x)$ 的極限意義。涉及 $\varepsilon - \delta$ 的函數極限定義不屬課程所需。

- 教師可向能力較高的學生討論以下問題：

  (a) 已知 $f(x) = \begin{cases} x + 2\ , & x \geq 2 \\ x^2\ , & x < 2 \end{cases}$，試求 $\lim_{x \to 2} f(x)$。

  (b) 若 $f(x) = \begin{cases} 1\ , & x \geq 0 \\ -1\ , & x < 0 \end{cases}$，試求 $\lim_{x \to 0} f(x)$。

- 學生須懂得運用極限的四則運算及複合函數的極限運算法則求代數函數、指數函數和對數函數的極限。當 x 趨向無窮大時，學生須知道 $\frac{1}{x}$

趨向零。學生亦須懂得當 x 趨向無窮大時，求一些簡單函數如 $\frac{2x+3}{x^3}$ 及 $\frac{3}{xe^x}$ 的極限。

- 給定函數 $y=f(x)$，若 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 存在，則此極限可定義為 $f(x)$ 在 x 的導數。教師可向學生展示如何利用基本原理求一些簡單函數如 x^2 和 $\frac{1}{x-1}$ 的導數，但**學生不須懂得使用基本原理求導數**。教師可向學生介紹差商 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 的幾何意義。學生須懂得導數的常用記號如 y'、$f'(x)$ 和 $\frac{dy}{dx}$。學生須知道 $\frac{d}{dx}$ 只是一個算子及 $\frac{dy}{dx}$ 並不表示一個分數。

- 學生須認識 $f'(x_0)$ 和 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ 的記法，其中 x_0 是一已知的值。學生應知道當 Δx 趨向 0 時，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的極限值是曲線上在 $(x_0, f(x_0))$ 切線的斜率。學生們應能求取曲線在該點的切線方程。

學習單位	學習重點	時間
微積分領域		
求導法及其應用		
4. 函數的求導法	4.1 理解求導法的加法法則、積法則、商法則和鏈式法則 4.2 求代數函數,指數函數和對數函數的導數	10

課程闡釋：

- 教師可證明求導法的基本法則，並要求學生使用這些法則計算函數的導數。

- 教師可列出複合函數和反函數的一些典型例子並引入鏈式法則 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$。學生不須理解一般反函數的求導法，但可運用公式 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ 解決問題。學生不須懂得求參數方程的導數。

- 學生須學習求一個多項式函數的導數。當認識了求導法的加法、積和商的法則之後，學生便可對多項式的積和有理函數求導，例如 $(2x+3)(4x^2+5)$ 和 $\frac{1-2x^2}{2+3x}$ 等。

- 學生不須懂得隱函數求導法,但須掌握對數求導法。當函數為 $h(x)k(x)$，$\frac{h(x)}{k(x)}$ 或 $[h(x)]^{k(x)}$ 的形式時，其中 $h(x)$ 和 $k(x)$ 代表 x 的函數，用對數求導法求導數往往比較簡單，例如：求函數如 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$、$\frac{x-1}{x\sqrt{x^3+1}}$ 和 $y=x^x$ 的導數。

- 學生應能運用鏈式法則求取形式如 $y=e^{f(x)}$ 及 $y=\ln f(x)$ 的導數。

- 學生應懂得求複合函數如 e^{x^2+1} 和 $\ln\sqrt{3x^2-5x+7}$ 的導數。

學習單位	學習重點	時間
微積分領域		
求導法及其應用		
5. 二階導數	5.1 認識函數的二階導數的概念 5.2 求顯函數的二階導數	2

課程闡釋：

- 二階導數是由一階導數求導獲得。若 $y=f(x)$，二階導數可寫為 $f''(x)$，y''或 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

- 一般來說，教師可指出 $\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{1}{\frac{d^2x}{dy^2}}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2} \neq \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$。

學習單位	學習重點	時間
微積分領域		
求導法及其應用		
6. 求導法的應用	6.1 使用求導法解涉及切線、變率、極大值和極小值的應用題	9

課程闡釋：

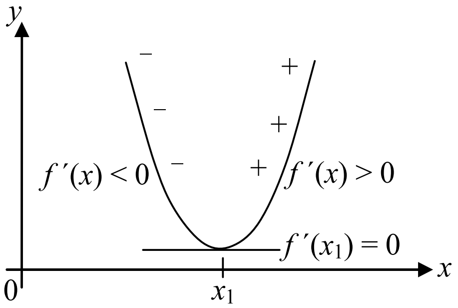
- 極大值與極小值：
  - (a) 一階導數判別法

    學生可透過分析函數的一階導數的符號轉變，得出該函數遞增及遞減的範圍。

    (i) 若 $f'(x_1) = 0$ 且當 x 遞增經 x_1 時 $f'(x)$ 由負變為正，則 $f(x)$ 在 $x = x_1$ 處取得局部極小值。

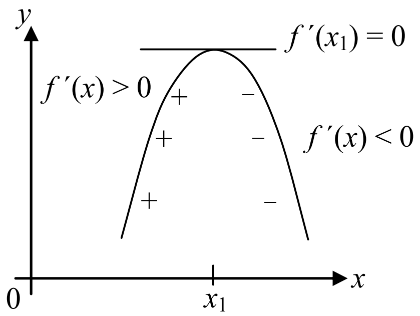
    (ii) 若 $f'(x_1) = 0$ 且當 x 遞增經 x_1 時 $f'(x)$ 由正變為負，則 $f(x)$ 在 $x = x_1$ 處取得局部極大值。

$f(x)$ 在 $x = x_1$ 處得局部極小值



[當 x 遞增經 x_1時，$f'(x)$的值增加 (即$f''(x_1) > 0$)]

$f(x)$ 在 $x = x_1$ 處得局部極大值



[當 x 遞增經 x_1時，$f'(x)$的值減少(即$f''(x_1) < 0$)]

  - (b) 二階導數判別法

    學生須理解本判別法的幾何意義：

    (i) 若 $f'(x_1) = 0$ 且 $f''(x_1) < 0$，則 $f(x)$ 在 $x = x_1$ 處取得局部極大值。

    (ii) 若 $f'(x_1) = 0$ 且 $f''(x_1) > 0$，則 $f(x)$ 在 $x = x_1$ 處取得局部極小值。

- 局部極值不一定是全局極值。當學生需要在應用題中求取全局極值時，應考慮該函數於有關區間端點的值。

- 學生須掌握利用一階導數判別法或二階導數判別法找出函數的極值。當 $f''(x_1) = 0$，二階導數判別法並不適用於求出局部極值。在這情況下，學生須改用一階導數判別法。

- 學生須懂得利用二階導數確定函數的凹凸性，但學生並不須懂得描繪函數的圖像。學生不須認識曲線拐點的概念。學生不須學習在 $x = x_1$ 處 $f'(x_1)$不存在而局部極值存在的問題。

學習單位	學習重點	時間
微積分領域		
積分法及其應用		
7. 不定積分及其應用	7.1 認識不定積分法的概念 7.2 理解不定積分的基本性質及不定積分法的基本公式 7.3 使用不定積分法的基本公式求代數函數和指數函數的不定積分 7.4 使用代換積分法求不定積分 7.5 使用不定積分法解應用題	10

課程闡釋：

- 教師應介紹「被積函數」、「積分常數」等名詞。學生須知道求不定積分與求導數互為逆運算的關係。

- 學生須掌握以下積分公式：
  - $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (其中 k 為常數)
  - $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
  - $\int k\,dx = kx + C$ (其中 k 和 C 為常數)
  - $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$，其中 C 為常數，n 為實數及 $n \neq -1$ (應討論 $n = 0$ 的情況)
  - $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + \mathrm{C}$，$x \neq 0$
  - $\int e^x\,dx = e^x + C$

- 為了使被積函數化為基本積分公式的某一形式，學生需作代換 $x = \phi(t)$，從而 $\int f(x)dx = \int f[\phi(t)]\phi'(t)dt$。教師可利用例子如

$\int(2x + 1)^5dx$ 及 $\int 2x\sqrt{x^2 + 1}\, dx$ 等引入代換積分法。

- 學生不須懂得分部積分法求不定積分。

學習單位	學習重點	時間
微積分領域		
積分法及其應用		
8. 定積分及其應用	8.1 認識定積分法的概念 8.2 認識微積分基本定理及理解定積分的性質 8.3 求代數函數和指數函數的定積分 8.4 使用代換積分法求定積分 8.5 使用定積分法求平面圖形的面積 8.6 使用定積分法解應用題	15

課程闡釋：

- 定積分可從求曲線圖形的面積引入，以區分定積分與不定積分的概念。

- 定積分的一些性質有助解決問題。教師應幫助學生探討這些性質的幾何意義。
  - $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
  - $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
  - $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
  - $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$，其中 k 為常數
  - $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

- 學生使用上述各公式時，應注意函數必須在 $[a, b]$ 上連續。

- 當學生使用代換積分法計算定積分時，該定積分的上、下限應作相應調整。

學習單位	學習重點	時間
微積分領域		
積分法及其應用		
9. 使用梯形法則計算定積分的近似值	9.1 理解梯形法則及使用它計算定積分的近似值	4

課程闡釋：

- 在實際問題中，學生不容易，甚至不可能，求出一些定積分如 $\int_1^2 e^{x^2} dx$ 的數值。梯形法則是其中之一種計算定積分的近似值的方法。在應用本法則時，每個區間的闊度應相同。分隔的區間數目越多，所得的答案越準確。

- 學生不須懂得梯形法則的誤差估值，但應懂得利用函數二階導數及凹凸性分析指出所求的近似值是低估或是高估了該圖形的面積。若曲線是凹的，梯形法則便會高估了該面積的值。若曲線是凸的，梯形法則便會低估了該面積的值。

  <u>例子</u>　已知曲線 $y = -x^2 + 4$。由於 $\frac{d^2y}{dx^2} = -2 < 0$，該曲線是凸的。因此，梯形法則低估了該曲線和 x 軸之間的面積。

(空白頁)

統計領域

- 統計領域內容分為四部分，分別為進階概率，二項、幾何、泊松分佈及其應用，正態分佈及其應用和點及區間估計。

- 概率在本領域既基本又重要。隨機變量的概念對於學生來說是新的知識。學習二項分佈、幾何分佈、泊松分佈及正態分佈有助加深學生對概率分佈的認識。課程亦包括統計推斷的討論。

- 總體參數及樣本統計的學習可界定總體及樣本之間的關係。這部分包括點估計和區間估計。

- 點估計是利用樣本數據計算樣本統計量，作為未知的總體參數的猜測。置信區間 (CI) 是總體參數的區間估計。置信區間可指出估計的可靠性。區間包含總體參數的可能性有多大取決於置信水平。置信水平增加，會導致相應的置信區間加寬。

學習單位	學習重點	時間
統計領域		
進階概率		
10. 條件概率和獨立性	10.1 理解條件概率及獨立事件的概念 10.2 使用法則 $P(A \cap B) = P(A)P(B\|A)$ 和 $P(D\|C) = P(D)$ 解應用題，其中 C 和 D 為獨立事件	3

課程闡釋：

- 必修部分的學習單位 15「續概率」已引入概率加法定律、乘法定律、互斥事件、互補事件、獨立事件及條件概率等概念。學生將進一步在此學習單位研究條件概率。

- 在引入公式 $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 前，教師可採用溫氏圖解釋條件概率的意義，並可指出 A 可被視為一個縮減了的樣本空間。由此可推論 $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$。

- 學生可能會混淆 $P(B|A)$ 與 $P(A \cap B)$的概念。

- 學生須留意相互獨立事件的以下兩點：
  - 如果事件 A 與 B 為相互獨立事件，則事件 A(或 B)是否發生對事件 B(或 A)發生的概率沒有影響。
  - 若事件 A、B 相互獨立，則 $\bar{A}$ 與 B、$\bar{B}$ 與 A、$\bar{A}$ 與 $\bar{B}$ 也是相互獨立事件。

- 教師應指出兩個事件相互獨立與互斥的區別：兩事件相互獨立是指一個事件的發生與否對另一事件發生的概率沒有影響；兩事件互斥是指兩個事件不可能同時發生。

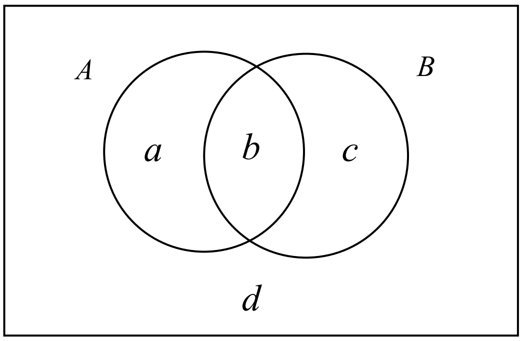
- 在處理那些只有有限數目的結果的應用題時，繪製樹形圖可有效地列出所有可能的結果。

- 教師應選取適當的例子帶出如何使用學習重點 10.2 的法則。以下是一些例子:

<u>例子一</u>　投擲一粒均勻骰子。試證事件「數字為單數」及事件「數字為質數」不是獨立事件。

<u>例子二</u>　投擲一粒有偏差的骰子，其中 $P(1)=P(2)=P(3)=a$，$P(4)=P(5)=P(6)=b$。若事件「數字為單數」及事件「數字為質數」為相互獨立，求 a 和 b 的值(答案: $a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$ 和 $b=\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}$)

<u>例子三</u>　設 A 和 B 為兩事件。在以下的溫氏圖，a、b、c 和 d 代表圖中對應部分的元素數目。



(a) 試找出事件 A 和 事件 B 相互獨立的條件。(答案: $ac = bd$)
(b) 現有四個數 10，15，30 和 45。若任意將它們代入 a、b、c 及 d，試求事件 A 和事件 B 相互獨立的概率。(答案: $\frac{1}{3}$)

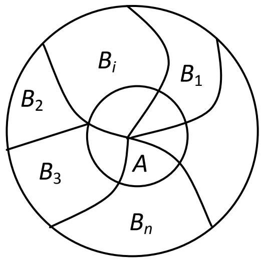
學習單位	學習重點	時間
統計領域		
進階概率		
11. 貝葉斯定理	11.1 使用貝葉斯定理解簡單應用題	4

課程闡釋：

- 教師可從條件概率的定義引入貝葉斯定理。一般而言，$P(B|A)$ 並不等於 $P(A|B)$。由於 $P(A\cap B)=P(B|A)\ P(A)$ 及 $P(A\cap B)=P(A|B)\ P(B)$。因此，$P(A|B)\ P(B) = P(B|A)\ P(A)$，即 $P(B|A) = \dfrac{P(A|B)\ P(B)}{P(A)}$。這是貝葉斯定理的最簡單形式。$P(B)$可稱為先驗概率，$P(B|A)$ 則稱為後設概率。貝葉斯定理指出，若 B_1、B_2、…、B_n 均為互斥及窮舉事件時，則

  $$P(B_j|A)=\frac{P(A\cap B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\cap B_i)} = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)}$$

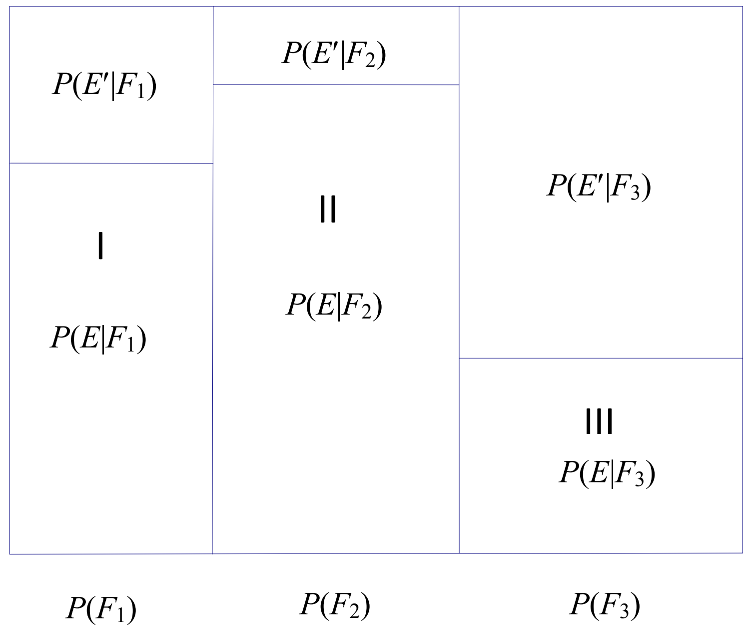
  , i = 1, 2, …, n。教師可利用下圖幫助解說。

- 學生掌握條件概率的概念後，教師可進一步導出貝葉斯定理。在教師導出貝葉斯定理前，可引導學生運用條件概率的定義和樹形圖及/或溫氏圖的幫助計算條件概率。

- 學生不須證明貝葉斯定理。要解決有關應用貝葉斯定理的問題，樹形圖是常用的方法。

- 除了樹形圖外，學生可利用面積模型(基本上是溫氏圖)把貝葉斯定理看成長方形面積比。例如，當 n=3 時，面積模型如下:



其中 $P(F_j|E)=\dfrac{P(E\mid F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{3}P(E\mid F_i)P(F_i)}$

學習單位	學習重點	時間
統計領域		
二項、幾何及泊松分佈及應用		
12. 離散隨機變量	12.1 認識離散隨機變量的概念	1

課程闡釋：

- 教師在介紹隨機變量前，宜先引入隨機試驗的概念。一個試驗滿足下列條件就可稱為一個隨機試驗:
  (i) 試驗可以在相同的情形下重複進行
  (ii) 試驗的所有可能結果是明確可知的，並且不止一個
  (iii) 試驗前不能肯定這次試驗會出現哪一個結果

- 教師可用簡單的例子介紹隨機變量，如投擲硬幣 (離散隨機變量) 及電燈泡的壽命 (連續隨機變量)。

學習單位	學習重點	時間
統計領域		
二項、幾何及泊松分佈及應用		
13. 概率分佈，期望值和方差	13.1 認識離散概率分佈的概念，並以表列、圖像和數學公式表示離散概率分佈 13.2 認識期望值 $E(X)$ 和方差 $\mathrm{Var}(X)$ 的概念，並使用它們解簡單應用題 13.3 使用公式 $E(aX+b)=aE(X)+b$ 和 $\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\,\mathrm{Var}(X)$ 解簡單應用題	5

課程闡釋：

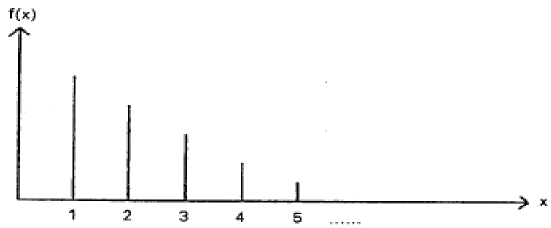
- 離散隨機變量 X 的數值及其相應概率 $P(X=x_i)$ 表列如下：

X	x_1	x_2	……	x_i	……	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	……	p_i	……	p_n

此表可稱為隨機變量 X 的概率分佈，其中 $0\le p_i\le 1$，$i=1$，2，…，n 及 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$。

- 學生須認識大楷字母如 X 是隨機變量的記號，而小楷字母如 x 則代表隨機變量的數值。

- 離散概率分佈可用棒形圖表示。



- 隨機變量的概率分佈能幫助理解大部分該隨機變量的性質，但求取隨機變量的分佈並不容易。

- 學生在必修部分已認識平均值及標準差的意義及其應用。在引入離散隨機變量的期望值與方差前，教師可幫助學生重溫這些概念。學生亦須懂得求取 $E(X^2)$ 及 $E[X(X-1)]$ 的值。

- 隨機變量的方差反映了該變量取值的穩定情況與離散程度，可記作 $\mathrm{Var}(X)$。$\mathrm{Var}(X)=E[(X-\mu)^2]=\sum(x-\mu)^2P(X=x)=\sigma^2$，其中 μ 是 X 的期望值。

- 學生須理解及應用以下期望值及方差的性質，其中 a 和 b 為常數：
  (i) $E(a) = a$
  (ii) $E(aX) = a\,E(X)$
  (iii) $E(aX + b) = a\,E(X) + b$
  (iv) $\mathrm{Var}(a) = 0$
  (v) $\mathrm{Var}(aX) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$
  (vi) $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$
  學生應能證明 $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$ 。

- 教師可要求學生進行以下兩個實驗，使學生熟習期望值或方差的性質：
  實驗 1 投擲兩粒均勻骰子。所得的數字的和為隨機變量 X 的數值，重複實驗 n 次。
  實驗 2 投擲一粒均勻骰子。將所得的數字乘以 2，結果為隨機量 Y 的數值，重複實驗 n 次。
  假設實驗 1 所得的數值分別為 x_1，x_2，……，x_n 及實驗 2 所得的數值分別為 y_1，y_2，……，y_n。學生可由兩組數據分別計算期望值和方差，並列出離散隨機變量 X 和 Y 的概率分佈表。
  教師可要求學生猜測 X 的期望值和 Y 的期望值之間的關係，X 的方差和 Y 的方差關係。

- 為了讓學生熟習如何找出離散隨機變量的期望值，教師可要求學生將數字 0、$\frac{1}{9}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$ 和 $\frac{2}{3}$ 填滿下表（數字不能重複），形成一個概率分佈。

X			
$P(X = x)$			

  教師可要求學生找出能組成的概率分佈的數目及找出是否其中有些組合的期望值會相等。

學習單位	學習重點	時間
統計領域		
二項、幾何及泊松分佈及應用		
14. 二項分佈	14.1 認識二項分佈的概念及其性質 14.2 計算涉及二項分佈的概率	5

課程闡釋：

- 學生須知道二項實驗有以下的特性：
  (i) 只有 n 次相同的試驗或觀察。
  (ii) 每次試驗只有兩種結果：S(成功)及 F(失敗)。
  (iii) 每次試驗的成功概率(p)及失敗概率($1 - p$)保持不變。
  (iv) 每次試驗互相獨立。

- 二項隨機變量 X 表示 n 個試驗的成功次數。學生應知道 $E(X) = np$ 及 $\mathrm{Var}(X) = np(1 - p)$，但不須證明這兩公式。使用二項分佈表找出相關的概率不屬課程所需。

- 以下 EXCEL 的公式可計算二項分佈中的概率:
  BINOMDIST(r, n, p, T)
  <u>例</u> $T = 0$: $X \sim \mathrm{B}(10, 0.5)$
  BINOMDIST (2, 10, 0.5, 0) $\Rightarrow$ $\mathrm{P}(X = 2)$
  $T = 1$: (累積)
  BINOMDIST (2, 10, 0.5, 1) $\Rightarrow$ $\mathrm{P}(X \le 2)$

學習單位	學習重點	時間
統計領域		
二項、幾何及泊松分佈及應用		
15. 幾何分佈	15.1 認識幾何分佈的概念及其性質 15.2 計算涉及幾何分佈的概率	4

課程闡釋：

- 學生須懂得分辨幾何分佈與二項分佈。在二項分佈中，隨機變量是在 n 次試驗中成功的數目(n 是事先固定的)。若試驗次數沒有事先固定而試驗繼續進行直至有一次成功，試驗的次數是一個隨機變量。此時，唯一一次的成功出現於最後的一次試驗，這個概率分佈稱為幾何分佈。

- 若隨機變量 X 服從幾何分佈(其中每次成功的概率為 p)，學生須認識 $E(X)=\dfrac{1}{p}$ 和 $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$，但不須證明這兩公式。

- 以下 EXCEL 的公式可計算幾何分佈中的概率：

  NEGBINOMDIST(x, 1, p)

  例　NEGBINOMDIST (3, 1, 0.6)

  表示在成功概率為 0.6 的獨立試驗中，經歷 3 次失敗才出現首次成功的概率。

學習單位	學習重點	時間
統計領域		
二項、幾何及泊松分佈及應用		
16. 泊松分佈	16.1 認識泊松分佈的概念及其性質 16.2 計算涉及泊松分佈的概率	4

課程闡釋：

- 當 $n \to \infty$ 而 $p \to 0$ 並 $np = \lambda =$ 常數，泊松分佈可利用二項分佈來近似。教師可向能力較高的學生介紹這概念，但這概念並非課程所需。

- 學生須知道泊松實驗具有以下特性：
  (i) 每件事件在某區間的出現皆獨立於其他非重疊區間所出現的事件。
  (ii) 在任何區間內，事件的「出現」概率與該區間的大小成正比，與該區間以外事件的「出現」概率無關。
  (iii) 超過一個事件出現於一個非常小的區間的概率是微不足道的。

- 若 X 服從泊松分佈(其中 λ 代表事件在某段時段所出現的平均值)，則學生應知道 $E(X)=\lambda$ 和 $\mathrm{Var}(X)=\lambda$，但不須證明這兩公式。使用泊松分佈表找出相關的概率不屬課程所需。

- 以下 EXCEL 的公式可計算泊松分佈中的概率：
  POISSON (x, n, T).
  <u>例</u>　$T = 0$: $X \sim Po(4)$
  POISSON (2, 4, 0) $\Rightarrow P(X = 2)$
  $T = 1$: (累積)
  POISSON (2, 4, 1) $\Rightarrow P(X \le 2)$

學習單位	學習重點	時間
統計領域		
二項、幾何及泊松分佈及應用		
17. 二項、幾何和泊松分佈的應用	17.1 使用二項、幾何和泊松分佈解應用題	5

課程闡釋：

- 這學習單位主要是強調各離散概率分佈的應用。學生判斷隨機變量服從哪種概率分佈有一定難度，所以學生須熟悉二項分佈、幾何分佈及泊松分佈的特徵。

- 在二項分佈中，方差小於平均值。在泊松分佈中，方差等於平均值。這些概念提供判斷兩種分佈的線索。若搜集數個隨機樣本，比較它們的平均值及方差有助於揀選適當的概率分佈。

學習單位	學習重點	時間
統計領域		
正態分佈及其應用		
18. 基本定義及其性質	18.1 通過正態分佈，認識連續隨機變量及連續概率分佈的概念 18.2 認識正態分佈的概念及其性質	3

課程闡釋：

- 學生須懂得分辨離散隨機變量的概率分佈與連續隨機變量的概率分佈。
- 學生無須證明 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx=\mu$ 及 $\mathrm{Var}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx=\sigma^2$，但學生須知道公式 $E(aX+b)=aE(X)+b$ 和 $\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$ 適用於連續隨機變量。

學習單位	學習重點	時間
統計領域		
正態分佈及其應用		
19. 正態變量的標準化及標準正態分佈表的使用	19.1 將正態變量標準化並使用標準正態分佈表求涉及正態分佈的概率	2

課程闡釋：

- "X 服從正態分佈，其平均值為 μ，標準差為 σ^2" 可記為 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$。
- 標準正態分佈為具有 $\mu = 0$ 和 $\sigma = 1$ 正態分佈的特殊例子，可記為 $X \sim N(0,1)$。
- 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 及 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$，則學生須知道

  (i) $Z \sim N(0,1)$

  (ii) $E(Z) = 0$ 及 $\mathrm{Var}(Z) = 1$

  (iii) $P(a < X < b) = P(\dfrac{a-\mu}{\sigma} < \dfrac{X-\mu}{\sigma} < \dfrac{b-\mu}{\sigma}) = P(z_1 < Z < z_2)$

- 學生須懂得運用標準正態分佈表求 $P(Z > a)$、$P(Z \le b)$ 和 $P(a \le Z \le b)$ 之值。
- 以下是一些在 EXCEL 軟件有關正態分佈的公式:
  - NORMDIST (x, μ, σ, T): 對於 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，當 $T = 1$，我們可得到 $P(X \le x)$
  - NORMINV(p, μ, σ): 對於 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，我們可得到 $P(X \le x) = p$ 中 x 的值
  - NORMSDIST(z): 對 $Z \sim N(0,1)$，我們可得到 $P(Z \le z)$
  - NORMSINV(p): 我們得到 $P(Z< z) = p$ 中的 z
  - STANDARDIZE (x, μ, σ): 我們得到 $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

學習單位	學習重點	時間
統計領域		
正態分佈及其應用		
20. 正態分佈的應用	20.1 在已知 x_1，x_2，μ 和 σ 的值的情況下，求 $P(X>x_1)$、$P(X<x_2)$、$P(x_1<X<x_2)$及相關概率的值，其中 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 20.2 在已知 $P(X>x)$、$P(X<x)$、$P(a<X<x)$、$P(x<X<b)$ 或相關概率的值的情況下，求 x 的值，其中 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 20.3 使用正態分佈解應用題	7

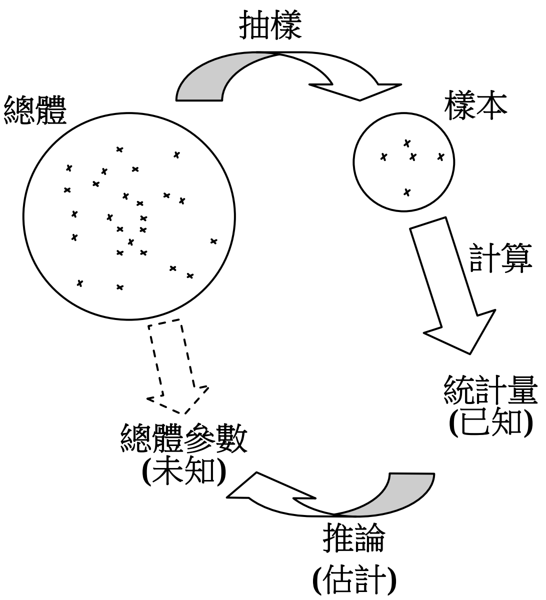
課程闡釋：

- 學生並不須認識獨立正態隨機變量線性組合成的分佈也是正態分佈。例如，$X_1 \sim N(8, 3^2)$ ，$X_2 \sim N(12, 4^2)$，其中 X_1 及 X_2 相互獨立。學生不須知道隨機變量 $Y = X_1 + X_2$ 為正態分佈及 $Y \sim N(20, 5^2)$。

學習單位	學習重點	時間
統計領域		
點及區間估計		
21. 抽樣分佈和點估計	21.1 認識樣本統計量和總體參數的意義 21.2 當隨機樣本容量為 n 時，認識樣本平均值的抽樣分佈 21.3 認識點估計的意義，當中包括樣本平均值，樣本方差和樣本比例 21.4 認識中心極限定理	7

課程闡釋：

- 學生於必修部分已認識「總體」和「樣本」的概念。教師現可介紹以下術語：總體、樣本、抽樣、統計推論、總體參數、樣本統計量、樣本平均值、樣本方差及樣本平均值分佈等。



- 學生須認識以下公式：

  (i) 樣本平均值 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i$ ，其中 $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$

(ii) 樣本方差 $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2$，其中 $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$

(iii) 當樣本容量足夠大時，樣本平均值 $\bar{x}$ 和樣本方差 s^2 分別趨向總體平均值 μ 和總體方差 σ^2。

(iv) 對於有限總體，總體方差 $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \mu)^2$，其中 N 是總體數目。

- 教師可與學生進行一些抽樣活動，並討論以下各點：
  (i) 樣本平均值的平均值及樣本平均值的方差的意義。
  (ii) 若總體是正態分佈而平均值為 μ 和方差為 σ^2，則樣本平均值分佈亦為一正態分佈，其平均值亦為 μ 及方差為 $\frac{\sigma^2}{n}$。
  (iii) 當 n 足夠大時，無論總體是否正態分佈，樣本平均值分佈仍迫近正態分佈。

- 教師於課堂中宜指出：
  (i) 樣本統計量不一定與總體參數相同，但它可以提供與參數有關的信息。
  (ii) 大部分樣本統計量與總體參數的數值相近。只有少數是非常大於或小於總體數值。
  (iii) 某一估計量的好壞直接依賴樣本大小。一般而言，大樣本所提供的樣本統計量與總體參數較接近。

- 點估計是參數估計的其中一種方法。在這階段，教師應介紹利用樣本統計量去估計總體未知參數的概念，教師可舉例作示範：例如利用樣本平均值 $\bar{x}$ 去估計總體平均值 μ 等。教師須指出，同樣的參數可有不同的樣本統計量作估計量。例如樣本平均值、樣本中位數和樣本眾數等，均可用作總體平均值 μ 的估計量。

- 在抽樣的過程中，不同的樣本會導出的不同的估計值。我們很難決定哪個估計量比較好。我們希望用一個無偏的估計量估計未知參數。長遠來說，採自大量樣本估計量的平均值會等同總體數值：E(樣本統計量) = 總體參數。教師可指出 $\bar{X}$ 是 μ 的一個無偏估計量，但 $\sigma_{\bar{x}}{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$ 則不是總體方差 σ^2 的無偏估計量。因此，學生宜採用公式 $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$ 作為總體方差 σ^2 的無偏估計量。

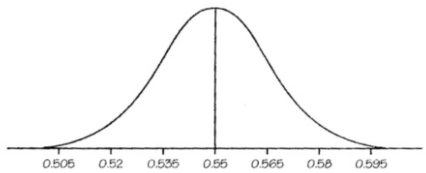
- 中心極限定理是其中一個在統計學最重要和有用的概念。它指出從已知總體分佈(平均值 μ 和方差 σ^2)中抽出一個容量為 n 的隨機樣本，當 n 足夠大時，樣本平均值的抽樣分佈近似正態分佈，其平均值為 μ，方差為 $\dfrac{\sigma^2}{n}$。然而，對許多學生而言，這個概念比較抽象及不容易理解。教師可利用網頁上的互動模擬程式作解說。

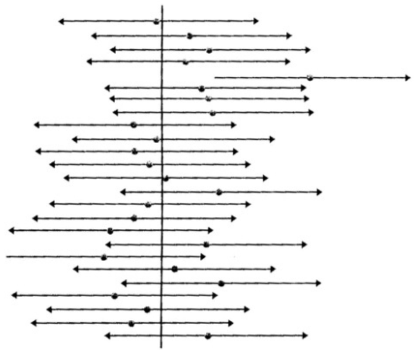
- 透過電腦的模擬程式，學生可注意到：
  (i) 不論甚麼形態的概率分佈，當樣本容量足夠大時，樣本平均值的抽樣分佈近似正態分佈
  (ii) 當樣本容量增大時，大多數概率分佈很快近似正態分佈
  (iii) 在抽樣分佈中，樣本的數量假設為無限
  (iv) 當樣本容量增加時，概率分佈的伸展幅度減少

學習單位	學習重點	時間
統計領域		
點及區間估計		
22. 總體平均值的置信區間	22.1 認識置信區間的概念 22.2 求總體平均值的置信區間	6

課程闡釋：

- 總體平均值的置信區間是根據隨機樣本對未知總體參數 θ 的一個區間估計。置信區間的概念抽象。教師可利用網頁上的互動模擬程式或統計軟件，如 Winstat 解釋其意義。





- 教師應指出置信區間由隨機樣本得來。較常用的置信區間為 95% 及 99% 的置信區間。

- 以下是一些建立總體參數 μ 的置信區間的重要問題：
  - 是否從正態分佈選取隨機樣本?
  - 總體方差是否已知?
  - 樣本容量是否足夠大?

- 若總體為正態、已知方差為 σ^2，樣本容量為 n，則總體平均值 μ 的 95% 置信區間為 $(\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}，\bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$。若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，則

  $\overline{X} \sim N\left(\mu，\frac{\sigma^2}{n}\right)$ 及 $0.95 = P(-1.96 \le Z \le 1.96) = P(-1.96 \le \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le 1.96)$。

  教師應指出，不論樣本容量的大小，這些結果均為真確。

- 總體為非正態、已知方差為 σ^2，採用容量大的樣本 n $(n \ge 30)$，則總體平均值 μ 的 95% 置信區間為 $(\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}，\bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$。由於樣本

容量足夠大，可以使用中心極限定理。$\overline{X}$ 近似正態及 $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$。

- 總體為正態或非正態，不知方差 σ^2 的值，採用容量大的樣本 n $(n \geq 30)$，則總體平均值 μ 的 95% 置信區間為 $\left(\bar{x} - 1.96\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$，其中 s^2 代表樣本方差。$P\left(-1.96 \leq \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq 1.96\right) \approx 0.95$，其中 $\frac{s}{\sqrt{n}}$ 稱為樣本的標準誤差並可記為 $SE(\bar{x})$。

- 學生須懂得在以下的情況求取總體平均值 μ 的置信區間：

條件	μ 的 95% 置信區間	μ 的 99% 置信區間
正態總體 • 已知總體方差 σ^2 • 樣本容量(不論大小)為 n • 樣本平均值為 $\bar{x}$	$(\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$(\bar{x} - 2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
非正態總體 • 已知總體方差 σ^2 • 容量大的樣本 $n(n \geq 30)$ • 樣本平均值為 $\bar{x}$	$(\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$(\bar{x} - 2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
非正態總體 • 不知總體方差 σ^2 • 容量大的樣本 $n(n \geq 30)$ • 樣本平均值為 $\bar{x}$ • 樣本方差為 s^2	$(\bar{x} - 1.96\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96\frac{s}{\sqrt{n}})$	$(\bar{x} - 2.575\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2.575\frac{s}{\sqrt{n}})$

- 學生須知道置信區間的長度於以下的情況會減少：
  - 增大樣本容量
  - 降低置信水平 (例如：選擇 95%的置信水平而非 99%)

- 在建立置信區間時，我們希望得到一個既狹窄(更準確的估計)及高置信水平的置信區間。惟在大部分情況下，這兩個條件不能兼得。

- 若隨機抽樣樣本獨立地從總體抽取，從中建造一個總體參數為 95% 的置信區間，學生可預期 5% 的區間不包含該總體參數。若學生計算一置信區間，他們並不會知道該區間是否包含該總體參數。

學習單位	學習重點	時間
統計領域		
點及區間估計		
23. 總體比例的置信區間	23.1 求總體比例的置信區間估計	3

課程闡釋：

教師於課堂時宜強調以下各點：

- 從總體中抽取容量為 n 的隨機樣本。若 p_s 表示樣本當中擁有某些特質的比例，則這些比例形成一個分佈，稱為總體比例的樣本分佈 P_s。當樣本容量 n 夠大時，P_s 的分佈近似正態。$P_s \sim N\left(p, \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$，其中 $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ 稱為樣本比例的標準誤差。樣本容量 n 越大，估計越精確。由於不知 p 的值，我們採用 p_s 取代 p。

- 學生須懂得計算總體比例 p 的置信區間估計：

	條件
	n 足夠大，樣本比例 p_s
p 的 95% 置信區間	$\left(p_s - 1.96\sqrt{\frac{p_s(1-p_s)}{n}}, p_s + 1.96\sqrt{\frac{p_s(1-p_s)}{n}}\right)$
p 的 99% 置信區間	$\left(p_s - 2.575\sqrt{\frac{p_s(1-p_s)}{n}}, p_s + 2.575\sqrt{\frac{p_s(1-p_s)}{n}}\right)$

學習單位	學習重點	時間
統計領域		
進階學習單位		
24. 探索與研究	通過不同的學習活動，發現及建構知識，進一步提高探索、溝通、思考和形成數學概念的能力	10

課程闡釋：

本學習單位旨在提供更多學習空間，讓學生在學習其他學習單位的內容時，能參與更多有助發現及建構知識、提高探索、溝通、思考和形成數學概念的能力之活動。換句話說，這並非一個獨立和割裂的學習單位，活動可在課堂中引起動機、發展、鞏固或評估等不同環節進行。

鳴 謝

我們特別向下列委員會及工作小組的委員致謝，多謝他們對本小冊子所提供的寶貴意見和建議。

課程發展議會數學教育委員會

課程發展議會 — 香港考試及評核局數學教育委員會（高中）

課程發展議會 — 香港考試及評核局高中數學課程（單元一）工作小組