SMN

學校數學通訊

School Mathematics Newsletter

Education Department, Hong Kong

The School Mathematics Newsletter (SMN) aims at serving as a channel of communication in the mathematics education of Hong Kong. School principals are therefore kindly requested to ensure that every member of their mathematics staff has an opportunity to read this Newsletter.

We welcome contributions in the form of articles on all aspects of mathematics education as the SMN is meant for an open forum for teachers of mathematics, however, the views expressed in the articles in the SMN are not necessarily those of the Education Department, Hong Kong.

Please address all correspondence to:

The Editor, School Mathematics Newsletter,
Mathematics Section,
Advisory Inspectorate Division,
Education Department,
12/F., Wu Chung House,
213, Queen's Road East,
Wanchai, Hong Kong.

Telephone: 2892 6554

《學校數學通訊》旨在爲香港數學教育界提供一個溝通渠道，故此懇請各校長將本通訊交給貴校所有數學科教師傳閱。

爲使本通訊能成爲教師的投稿公開園地，歡迎讀者提供任何與數學教育有關的文章。唯本通訊內所發表的意見，並不代表教育署的觀點。

來稿請投寄：

香港灣仔
皇后大道東213號
胡忠大廈十二樓
教育署輔導視學處數學組
學校數學通訊編輯收

電話: 2892 6554

IN THIS ISSUE

ISSUE 14 1996

FOREWORD

Welcome to the fourteenth issue of the School Mathematics Newsletter (SMN).

As in the past issues of the SMN, the articles in the present issue are contributed by professionals interested in mathematics education, many of whom have rendered uninterrupted support to the publication of the SMN in the past years. The Mathematics Section of the Advisory Inspectorate Division wishes to thank them sincerely for their contribution, without which the publication of this issue of the SMN will not be possible.

In the existing education system, mathematics teachers are faced with the tremendous challenge of teaching pupils of very different abilities, motivations and aspirations. To meet this challenge, mathematics teachers need to equip themselves with necessary mathematical skills and teaching strategies to cope with the different teaching situations. To this end, the articles in this publication cover a variety of relevant topics, ranging from hot issues of mathematics teaching to daily applications. There are also some interesting puzzles to tap readers' mind. We do hope that all readers will find the content of this issue informative and stimulating.

The Editorial Board of SMN wishes to express again its gratitude to all contributors, and also to the fellow colleagues of the Mathematics Section who have made good efforts in producing the SMN Issue 14.

Mathematics Section
Advisory Inspectorate Division

高科技衝擊學校數學教學的最新發展：我們都是墮後者

中文大學課程與教學學系
黃毅英

自一九九一年《數學傳播》「高科技對學校數學教學的衝擊」一文(上篇：59期103-110頁，下篇：60期112-118頁)刊出後，以家庭電腦為首的「高科技」確實有不少的發展。這種發展的震撼性，不只在科技的「高」，影響更深遠的是它的廉價與普及。

家庭電腦發展非常迅速。若現在翻看四年前有關電腦的文章，已大有過時之感了。在香港，八十年代初期「蘋果II」電腦開始打入家庭市場，到八十年代中期潮流已轉向IBM兼容的機種了。只不過是短短幾年的時間，電腦的讀寫系統已由一台磁碟機、兩台，發展至現時普遍具有800MB容量的硬盤。在這一兩年間，掃描器、記事簿型電腦、筆桿輸入方式、

透過電話線建立網絡(數據機)、在任何地點傳真(Fax anywhere)、唯讀光碟、多媒體...均變成流行的玩意兒。恍惚數個星期沒有逛電腦市場，已與推銷員沒有共通的語言。當本文寫成時，已立即發覺有修改的必要了。「國際網絡」〔(internet)透過世界性(World Wide Web)從世界各地提取資料、圖像、影片，甚至軟件〕已變成最趨時的東西。當此文刊出時，讀者看去又可能覺得其中某些資料落後不已了。

以《數學傳播》一文所介紹的軟件而言，不少已停止生產或不見在市面發售了。代之而起的是影像繪圖介面卡(VGA)及視窗環境的新版。數學軟體的發展亦可謂銳不可擋，除了「推導：數學助手」(Derive：A Mathematical Assistant)外，還有美國1988年推出之Mathematica 及加拿大於1985年推出之「楓葉V」(Maple V)。它們能處理極大部分的數學符號運算與繪圖。1992年8月的PC-Magazine 雜誌曾有詳盡的介紹並比較了Derive, Maple V，Mathematica 及 Reduce 這一類符號數學軟體(Symbolic Math Softwares)的功能。然而在不涉及太高等數學的課堂上，因Derive無須應用硬機且計算迅速，故在吸引用家方面仍有一定的優勢。

處理數學文書的軟體甚多，在1991年9月和11月號的《College Mathematics Journal》中便介紹和比較了Chi-Writer, EXP, Word

Perfect 及Word For Windows 等處理數學文書的軟體。近年不少使用者已轉用視窗軟體來處理數學符號(如Microsoft Word 中之Math Type及Amipro 的方程式工具)，其優點是「所見即所得」WYSIWYG，並且無須記憶鍵碼(固用滑鼠即可)。其次數學遊戲如(“Edutainment”)、CAD(Computer Assisted Design：電腦協助繪圖)等軟體亦甚多。

近年更有「互動軟體」(Interactive Software)之出現。例如Sensei便推出了配合視窗的代數、幾何、微積分等軟體。其特式是數據可由使用者改動。例如利用滑鼠沿着一曲線拉動，浮標位置的切線便會隨之變動，所顯示的斜率(數據)亦隨之變動。又如函數$\frac{ax+2}{bx+c}$的極限，使用者可隨意改動a, b, c 值，而顯示之曲線、極限均會隨之變動。

這類互動軟體最馳名的莫過於美國Key Curriculum Press 在1993年推出之「幾何學家之素描畫板」(Geometer's Sketchpad)。使用者可利用滑鼠作點、線、中點、三角形、圓等。除此以外，當使用滑鼠變動圖形時所有相應圖像與數據亦會隨之轉動。例如學生可先作一個三角形，再連接三角形各邊中點以作出另一三角形，他再用滑鼠移動原有三角形各頂點，學生就是如此隨意的在熒幕上探索，得出了此系列由中點組成的三角形收斂於原有三角形的重心。該公司更於近年陸續推出利用「幾

何學家之素描畫板」之「探索幾何」(Exploring Geometry)及(Perspective Drawing)等軟體來作點、線及圖形。它們的特式是有完整的教材加以配合。

法國亦製作了「互動幾何記事簿」(Cabri : The interactive geometry notebook)。雖然畫面及功能等均不及「幾何學家之素描畫板」，但其優點在於需要較少的記憶體，因而無須配備硬碟或視窗，且有顯示軌跡的特式，故更適用於課堂教學。

周偉文在「科技社會的數學和數學教育」(收錄於《香港數學教育的回顧與前瞻》蕭文強編，1995，香港大學出版社)一文中全面介紹了這方面的最新發展和如何落實由科技進步引致課程改革的建議(139-155頁)。

面對如此勢不可擋的高科技「洪流」，學校教育是否「理所當然」的穩站大眾印象中應守的崗位，還是順應潮流地不斷更新?這顯然是「劍齒虎」式的永恒辯論(Peddiwell, J.A. (1939)《The Saber-Tooth Curriclum》)。教學軟體是否眞的會取代教師呢?到未來，學生眞的是每人看著面前的一台電腦而非望著老師與黑板來學習嗎 ?Howson, G. 和 Wilson,B. 在《School Mathematics in the 1990s》中指出這種60年代渴望的景象(即利用數學軟體取代教師)是不大可能的。除非學習者有很大的主動性與學習意欲，否則師生互動仍是不可缺少的。Hoyles, C. 在

(Computer-based Microworlds : A radical vision or A Trojan Mouse, paper presented at the Seventh International Congress of Mathematics Education, Quebec, 1992)中更用木馬屠城記的木馬變成了木鼠來形容用軟體代替老師的不可行。他並指出，眞正能讓學生配合電腦學習的軟體仍未出現。

筆者以爲，電腦軟體對學校教育的衝擊大抵在於三方面。

一、電腦取代老師。縱然現時學校器材，包括軟體與硬體，在可見將來皆無法配合以達至電腦完全走進課室，但未來的發展也無可限量。現時利用電腦軟體協助學習已成了新趨勢，且該等軟體的應用已由課堂進入家庭。不少家長已開始購置電腦並安裝不同類型的軟體協助其子女學習。這些軟體包括遊戲性質的、探索性質的(如人體探索，天文探索等)、字典與百科全書、學習的(如發音串字等)及演練的，將來進一步透過數據機(modem)建立網絡，再加上多媒體，電腦「教師」活現家中絕非不可能的事!由於資訊的發達，這種「橫向學習」(學校非唯一提供學習機會者)實早已出現，學校無需感到不安，然而其扮演的角色亦須重新釐定。詳情可見於「學校霸權的來源、瓦解與重新定位」一文(善根，《信報》教育眼1995年6月24日)。

二、電腦輔助學習教材套。以前的電腦學

習(CAL：Computer Assisted Learning)軟體都脫離不了「自行學習」這想法。所以這些軟體是自成一套的。然而在課堂上,其他學習方式,包括教師講解、堂課、工作紙等可謂不可或缺。近年有人開始設計電腦配合教學之教材套。英國諾定咸(Nottingham)大學「蜆殼數學教育中心」(Shell Centre For Mathematical Education) 的「力量系列」(Power Series,1992：包括規律與函數、函數與圖像、數學探索、解難策略等)便是一輯頗佳的教材套。軟體在教學上只擔當眾多角色之一。例如於「規律與函數」一教材套中，教師如常的教學、分發工作紙等，到有必要時才用所提供的軟體顯示一些圖形。這種真正的電腦輔助教學軟體似乎比電腦取代教學更為可行，並有較大的發展潛質。事實上,上述的Sketchpad, 前文所介紹的Derive 等均有教材配合作教學及讓學生探索之用。

三、衝擊來自科技的發展。迎接九十年代，美國提出「教授對人人有用的數學」。有些學者特別提出學習數學的其中一個主要原因是數學在各行各業中皆有應用(見筆者1992年《數學傳播》64期「九十年代的學校數學教育」一文)。由此觀之，高科技對學校數學帶來的衝擊未必是科技的如何走進課堂，而是如何訓練學生適應高科技的社會。Shumway (1989) 早就提出「隨著科技的發展，計算數學的份量必須減輕而數學概念的教授則須加強，因此現存課程的大部份應被刪除」。詳情可見於筆者

「普及教育期與後普及教育期的香港數學教育」(《香港數學教育的回顧與前瞻》，蕭文強編，1995，香港大學出版社，69-87頁)一文。本港現行數學課程的技術性操作、統計和各類圖表的製作等委實太多，值得檢討。

一九九五年，英國國家教育技術議會(National Council for Educational Technology) 發表了「數學與資訊科技」(Mathematics And Information Technology)一文，內裏詳述六種資訊科技應用於學習的方法，現謹撮錄如下：

<u>開發資訊科技威力的機會</u>

以下列舉的為六種利用資訊科技提供學生學習數學機會的方法。

1.從回饋中學習：電腦每能提供快速可靠的回饋。此能鼓勵學生自行構想其假設、驗證並修訂其意念。

2.觀察規律：電腦與計算機的速度能讓學生在探索數學問題時得出很多例子。通過觀察這些例子，學生可以推廣並構作通則，再以電腦辨證之。

3.看出連繫：電腦能將公式、數表及圖表即時連在一起。通過改變其中一種表示方式並觀察另一方式的相應轉變，學生多能了解它們之間的關係。

4.處理動態圖象：學生能用電腦以動態方式繪畫圖象。這鼓勵他們將其腦海中的意

象，繪成幾何圖形並作觀察。

5.探索數據：讓學生利用電腦處理，並以多種形式表示數據。這是有助詮釋與分析數據的。

6.「教授」電腦：當學生設計了一套算法(一套指令)讓電腦達到其特定效果時，他們必須無謬地表達其命令並排以正確次序。

生活與數學

尹鋈鴻
港九潮州公學

近年來，學生在日常生活中經常接觸到的數學問題，往往由於課本作者的避諱而弄不清。同學在一知半解下反而容易誤入歧途。例如數學課本在概率一課，往往祇採用擲硬幣、擲骰子和揀波等令同學提不起興趣的例子，卻避而不談較生活化的賭博問題 (例如賽馬、六合彩和撲克牌等)，以避鼓吹賭博之嫌。其實剛好相反，同學透過概率的計算，不難發現各種賭博獲巨獎的機會微乎其微，這反而使他們不會沉迷賭博。所謂了解賭博才不會賭博，因此在教授概率時以賭博問題爲例是對同學有益的，這亦是一種公民教育。

早年的數學課本往往不會錯過推廣公民教育的機會。所以部分課本便以賭博問題爲例去編寫概率一課 (見圖一)，很多賽馬術語如「孖寶」、「連贏位」等都活現在課本上。筆者早年在一間男校的中三某班曾以這些賭博問題爲例去教授概率，同學們雀躍不已，非常留心學習，

不少同學也立即對學習概率發生興趣，有部分同學更因爲在進一步研究概率問題時發覺自己的數學知識不足而拼命學好數學，後來據聞該班有多位同學考進了香港中文大學的數學系。

時移世易，近年的數學課本都缺乏討論這些與生活息息相關的賭博問題的例子，因此筆者在本文第五至十七頁編寫了與三種常見賭博遊戲有關的問題 (附解答) 供各位參考。至於是否適宜教授學生此等問題，筆者認爲低年級同學還未學C^n_r公式，根本未能掌握計算方法，故無法向他們教授這些問題；不過，各位仍可向他們透露一些事實[例如買一注六合彩中頭獎的概率約是八百萬分之一 (見第十二頁)]，使他們及早認識靠賭博贏錢的機會是非常微的，做人必須腳踏實地。如果他們仍然想追問多一些關於賭博的問題，老師可藉此勸導他們努力讀好數學，將來如能進入中四理科班便會學習一條組合公式，有了該公式便很容易計算很多有關賭博的問題。至於高年級理科班同學當掌握了C^n_r公式的意義和計算方法後，便可透過這些問題學習C^n_r公式的應用。

其實，筆者撰寫本文旨在拋磚引玉，希望各位在閱讀書本、報章或雜誌時，如果發現任何能夠提高學生學習數學興趣的問題 (特別是與日常生活有關的問題)，便立即剪下來並在空閒時間加以修飾增潤，然後投稿到「學校數學通訊」，給予全港數學老師分享。所謂集思廣益，共同努力把數學科變得更有趣及實用，從而激發學生學好數學的決心，此亦是本文最終希望達到的目的。

圖一：數學課本課文選錄

投注賽馬也可說是一種試驗。賽馬博彩有「孖寶」彩池，投注者須「買」中兩場跑第一的馬匹才能贏錢 (註一)。如果第一場出馬 10 匹，第二場出馬 12 匹，大家知道共有幾種投注方法？

通常馬匹都依次編號，例如出馬 10 匹，就編上 1，2，3，以至 10 號；出馬 12 匹則編上 1，2，3，以至 12 號。

投注者可「買」以下任何配搭：

1—1，	1—2，	1—3，	1—4，
1—5，	1—6，	1—7，	1—8，
1—9，	1—10，	1—11，	1—12，
2—1，	2—2，	2—3，	2—4，
2—5，	2—6，		

(學生可將其他配搭列出)

- 你知道總共有幾種配搭方法？ 120 種。

兩場賽馬完成後，120 種投注中有 119 種宣告賭輸，祇有一種贏錢。可知贏錢機會是微乎其微的。

另一種賽馬博彩方式是「連贏位」，投注者須從一場出賽馬中，選定兩匹 (即兩個號數) 下注。祇要它們跑出第一第二，便贏錢。

假定這一場出馬 9 匹，投注配搭計有：

1—2，	1—3，	1—4，	1—5，	1—6，
1—7，	1—8，	1—9，	2—3，	2—4，
2—5，	2—6，	2—7，	2—8，	2—9，
3—4，	3—5，	3—6，	3—7，	3—8，
3—9，	4—5，	4—6，	4—7，	4—8，

4—9， 5—6， 5—7， 5—8， 5—9，
6—7， 6—8， 6—9， 7—8， 7—9，
8—9，
共 36 種。

如果出賽馬匹愈多，投注配搭愈多，買中機會愈微。可能有人這樣想，出賽馬 9 匹，投注「連贏位」的方式有 36 種，祇要全部都下注，那豈不是必買中。這是最不切實際的想法，因為當賭徒下注後，舉辦賽事當局與政府先從彩池中抽出佣金及博彩稅近百分之二十，然後將剩餘的攤派給中獎者。

> 研究未來事情發生的可能性的數學，稱為概率論 (theory of probability)。

討論概率之前，大家先要知道某些試驗中的樣本空間究竟有多大。如果連「孖寶」、「連贏位」彩池各有多少投注配搭也不知道便貿然參加賭博，必然輸錢。— 當然，精通「投注算術」的賭徒也必定是輸家，否則，佣金與博彩稅從那裏得來？

問題

1. 設置「孖寶」彩池的兩場賽馬出賽馬匹都是 14 匹，共有幾種投注配搭？ (答案：196)
2. 某場賽馬共有 14 匹馬參加，問「連贏位」彩池共有幾種投注配搭？ (答案：91)

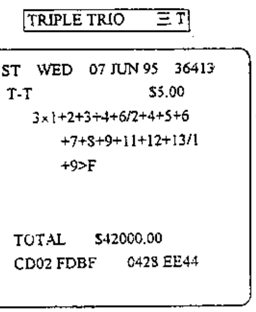
註：(一)近年投注「孖寶」，頭關跑第一而次關跑第二也能贏得「安慰獎」。
(二)以上課文是選自人人書局出版的香港中學適用數學第六冊（一九七九年版）。

與三種常見賭博遊戲有關的問題(附解答)

讀者在研究那些賭博遊戲問題前，必須具備以下知識：

1. 乘法定律
2. 組合公式 $C^n_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
   $\left[\text{或}\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}\right]$
3. 概率定義

A. 賽馬



「三T」票根

問題一

在1995年6月7日(星期三)夜馬賽事的「三T」，創下逾億港元彩池的紀錄，當晚「三T」共有十注中獎 [註：在指定的三場賽事中，每場首三名 (不論名次) 皆買中才算中了「三T」]，十元一注可獲獎金一千二百八十萬零一千二百三十五元。當晚三T的頭關 (第三場) 出馬十隻，次關 (第四場) 出馬十四隻，尾關 (第六場) 出馬九隻。結果頭

關的首三名是 3 號，7 號和 2 號，次關的首三名是 2 號、13 號和 12 號，而尾關的首三名是 9 號、1 號和 7 號 (見圖二)。

賽馬派彩結果及成績

第一場　第四班，一九〇〇米，出馬十匹。時間：廿秒三，四十五秒二，一分零九秒二，一分卅四秒六，一分五十九秒一(末段廿四秒五)。冠軍勝亞軍個半馬位，亞軍勝季軍一又四分一馬位。第四名：6.金融福星 (騎師金仕芬)

名次	馬名	騎師	W一四一元五
首名	10.眉飛色舞	丁冠豪	P 廿九元五
次名	7.大宛良駒	馬佳善	十八元
三名	4.七彩繽紛	告東尼	十三元五

連贏位派彩：五百一十五元五角
三重彩派彩：二千四百八十五元

第三場　第四班，一四〇〇米，出馬十匹。時間：十三秒八，卅五秒二，五十九秒八，一分廿四秒七 (末段廿四秒九)。冠軍勝亞軍一又四分三馬位，亞軍勝季軍一個馬頸位。第四名：8. 歡天喜地 (騎師高慈)

名次	馬名	騎師	W一百三十七
首名	3.非洲戰士	丁冠豪	P 廿九元五
次名	7.加州英雄	嚴顯強	十九元五
三名	2.足智多謀	馬佳善	十八元

連贏位派彩：二百廿七元五角
三重彩派彩：一千九百八十七元

第四場　第五班，一四〇〇米，出馬十四匹。時間：十三秒八，卅五秒六，一分零秒六，一分廿五秒五 (末段廿四秒九)。冠軍勝亞軍四分三馬位，亞軍勝季軍兩個半馬位。第四名：14. 長勝多寶 (騎師丁冠豪)

名次	馬名	騎師	W一百一十一
首名	2.萬利得	查汝誠	P 四十一元五
次名	13.金光	蘇利雲	四十五元
三名	12.是日精選	陳家俊	七十七元

連贏位派彩：七百三十四元
三重彩派彩：三萬二千二百八十一元
9. 皇者風範退出比賽

第六場　一二班混合賽，一九〇〇米，出馬九匹。時間：二十秒，四十五秒二，一分零九秒二 (末段廿三秒六)。冠軍勝亞軍一馬頭位，亞軍勝季軍個半馬位。第四名 2. 美好世界 (騎師錢健明)

名次	馬名	騎師	W八十元五
首名	9.履冰之注	告東尼	P 二十四元
次名	1.高飛遠逸	蘇利雲	廿一元五
三名	7.寶鼎金駒	金仕芬	十六元

連贏位派彩：二百四十九元
三重彩派彩：一千八百一十二元

圖二：7－6－1995 賽馬結果及派彩

(a) 藝人陳先生與友人在當晚合資用大包圍方法買「三T」，但只買五元一注（買中只分得派彩的一半），他們的買法如下：頭關五隻互穿，次關十隻互穿，尾關兩膽食全餐（即先選擇兩隻固定的馬再配以其餘在尾關出賽馬匹中的任意一匹）。問他們投注「三 T」的總金額是多少元？

(b) 由於今次「三 T」獎金吸引，巨富駱先生志在必得，但他在當時只有流動現金三千萬元。如果他以每注十元投注所有可能的情況，問他的現金是否足夠？

(c) 藝人陳先生與友人合資買中了半注「三 T」(獲獎金$ 6400617.50)的消息很快便傳遍港九。很多人認爲陳先生及其友人聰明絕頂，曠世奇材，但化學家曾正威先生卻不以爲然。他說：「有什麼了不起！如果他們將所有資金跟我買，肯定獲利更大。」原來當晚曾先生以 50 元一注買了第一場及第三場的二串一獨贏過關（必須兩場皆中頭馬才獲獎）。由於曾先生的偶像是諾貝爾物理學獎得主丁肇中先生，所以對姓丁的人特別有好感，因而兩關皆買騎師丁冠豪的馬，即第一場買 10 號，第三場買 3 號。結果騎師丁先生在該兩場皆勝出頭馬（見圖二），曾先生因而過了關。

(i) 問曾先生可獲獎金多少元？

(ii) 試計算曾先生和陳先生及其友人的賺率。

(iii) 若陳先生及其友人將所有資金跟從曾先生買那條二串一獨贏，是否必定獲得更多獎金呢？

解(a) 頭關五隻互穿，五隻選三隻，共有$C_3^5(=10)$種情況；次關十隻互穿，十隻選三隻，共有$C_3^{10}(=120)$種情況；尾關出馬九隻，兩膽食全餐，即兩膽拖七腳，共 7 種情況。

根據乘法定律，總注數$=10\times120\times7$
$=8400$

由於他們買五元一注，所以投注「三T」的總金額
$=\$(8400\times5)$
$=\$42000$

(b) 頭關出馬十隻，十隻選三隻，共有$C_3^{10}(=120)$種情況；次關出馬十四隻，十四隻選三隻，共有$C_3^{14}(=364)$種情況；尾關出馬九隻，共有$C_3^9(=84)$種情況。

根據乘法定律，投注所有可能情況的總注數
$=120\times364\times84=3669120$

由於每注 10 元，所以總投注金額
$=\$(3669120\times10)$
$=\$36691200$

由於 $\$36691200>\$30000000$，因此駱先生的流動現金並不足夠。

(c) (i) 頭關(第一場)十元一注的獨贏獎金爲 $141.5 (見圖二)。

他投注 50 元，所以共有獎金

$=\$(50\times 14.15)$

$=\$707.5$ (因爲賠率是14.15倍)

由於他買的是二串一獨贏，所以這些獎金將全部自動投注於次關。次關(第三場)十元一注的獨贏獎金爲 $137 (見圖二)

由於頭關的獎金 $707.5 全部自動投注於這一關，所以他最後獲得的獎金

$=\$(707.5\times 13.7)$

$=9692.75$(因爲賠率是 13.7倍)

(ii) 曾先生的賺率

$$=\frac{9692.75-50}{50}\times 100\%$$

$=19285.5\%$

陳先生及其友人的賺率

$$=\frac{6400617.5-42000}{42000}\times 100\%$$

$\approx 15139.6\%$

(iii) 由(ii)，曾先生的賺率較高，似乎跟從他的投注方法可以獲得更多獎金。但需留意的是他祇作小額投注，所以對彩池影响不大。假如陳先生及其友人將 $ 42000投注於曾先生的二串一獨贏，頭關可能對彩池影響不大，所選馬匹勝出後可能仍有 14 倍的賠率，但中了頭關後約有 60 萬元派彩，60 萬元自動投注於次關，所選馬匹的賠率必定突然下降，相信賠率連 10 倍也沒有，所以次關所選馬匹勝出後獎金亦難超過 600 萬元。因此依曾先生的方法去投注亦未必獲得更多獎金。

B. 六合彩

六合彩票根

問題二

(a) 某幸運兒在1995年6月27日 (星期二) 用四膽食全餐 (即選擇四個固定號碼配其餘 41 個號碼中的任意兩個) 的膽拖方法投注第五十期六合彩。結果做「膽」的四個號碼中正，因此所投各注全部中獎。

(i) 問該幸運兒共買了多少注六合彩？

(ii) 問該幸運兒共中多少注頭獎 (中正開彩的六個號碼)、二獎 (中五個號碼和一個特別號碼)、三獎 (中五個號碼)、四獎 (中四個號碼及一個特別號碼) 和五獎 (中四個號碼)？

(b) 尹先生在某日用單式方法買了一注六合彩，問他中正頭獎、二獎、三獎、四獎、五獎和六獎 (中三個號碼及一個特別號碼) 的概率分別是多少？ (答案請以 $\frac{1}{n}$ 的形式表示，其中 n 須準確至最接近的整數。)

(c) 劉先生在某日以 1–10 這十個號碼用複式方法投注六合彩。開彩結果是 1, 2, 3, 4, 5, 6，特別號碼是 7。

(i) 問劉先生共買了多少注六合彩？

(ii) 問劉先生共中多少注頭獎、二獎、三獎、四獎、五獎和六獎？又有多少注未能中獎?

解(a) (i) 該幸運兒所買注數

$= C^4_4 \cdot C^{41}_2$ [四個號碼做膽，配合其餘 41 個號碼中的任意兩個]

$= 1 \times 820$

$= 820$

(ii) 頭獎注數

$= C^4_4 \cdot C^2_2$ [四個膽，配合其他兩個中獎的號碼]

$= 1 \times 1$

$= 1$

二獎注數

$= C^4_4 \cdot C^1_1 \cdot C^2_1$ [四個膽，配合一個特別號碼，再配合其他兩個中獎號碼的其中一個]

$= 1 \times 1 \times 2$

$= 2$

三獎注數

$= C^4_4 \cdot C^2_1 \cdot C^{38}_1$ [四個膽，配合其他兩個中獎號碼的其中一個，再配合 38(= 41 − 2 − 1)個既非中獎又非特別號碼的其中一個]

$= 1 \times 2 \times 38$

$= 76$

四獎注數

$= C^4_4 \cdot C^1_1 \cdot C^{38}_1$ [四個膽，配合一個特別號碼，再配合 38 個既非中獎又非特別號碼的其中一個]

$= 1 \times 1 \times 38$

$= 38$

五獎注數

$= C_4^4 \cdot C_2^{38}$ [四個膽，配合 38 個既非中獎又非特別號碼的任意兩個]

$= 1 \times 703$

$= 703$

「另法：由於四膽中正，因此所有 820 注皆中獎(至少五獎)。由此，五獎注數= 820 − 1 − 2 − 76 − 38 = 703」

(b) 所有可能注數= $C_6^{45} = 8145060$

由於尹先生只用單式買了一注，所以：

他中正頭獎的概率= $\dfrac{C_6^6}{C_6^{45}} = \dfrac{1}{8145060}$

他中正二獎的概率 = $\dfrac{C_5^6 \cdot C_1^1}{C_6^{45}} = \dfrac{6}{8145060}$

$= \dfrac{1}{1357510}$

他中正三獎的概率 = $\dfrac{C_5^6 \cdot C_1^{38}}{C_6^{45}} = \dfrac{6 \times 38}{8145060}$

$\approx \dfrac{1}{35724}$

他中正四獎的概率 = $\dfrac{C_4^6 \cdot C_1^1 \cdot C_1^{38}}{C_6^{45}} = \dfrac{15 \times 1 \times 38}{8145060}$

$\approx \dfrac{1}{14290}$

他中正五獎的概率 = $\dfrac{C_4^6 \cdot C_2^{38}}{C_6^{45}} = \dfrac{15 \times 703}{8145060}$

$\approx \dfrac{1}{772}$

他中正六獎的概率 = $\dfrac{C_3^6 \cdot C_1^1 \cdot C_2^{38}}{C_6^{45}} = \dfrac{20 \times 1 \times 703}{8145060}$

$\approx \dfrac{1}{579}$

(c) (i) 劉先生所買注數= $C_6^{10} = 210$。

(ii) 頭獎注數= $C_6^6 = 1$

二獎注數= $C_5^6 \cdot C_1^1 = 6$

三獎注數= $C_5^6 \cdot C_1^3 = 18$

四獎注數= $C_4^6 \cdot C_1^1 \cdot C_1^3 = 45$

五獎注數= $C_4^6 \cdot C_2^3 = 45$

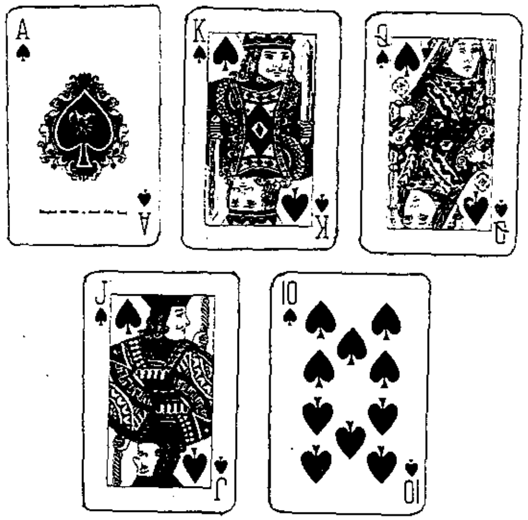
六獎注數= $C_3^6 \cdot C_1^1 \cdot C_2^3 = 60$

未能中獎的注數= $C_3^3 \cdot C_3^7 = 35$

[8, 9, 10 這三個號碼配合其他七個號碼中的任意三個]

「另法：未能中獎的注數＝ 210 − 1 − 6 − 18 − 45 − 45 − 60 ＝ 35」

C. 撲克牌



同花大順 (ROYAL FLUSH)

<u>問題三</u>

某人玩撲克牌遊戲，隨意取得 52 張牌中的 5 張。求他獲得以下狀況的概率，答案須準確至 3 位有效數字。

(a) 同花順子 (flush straight)

(b) 四條 (four of a kind)

(c) 三條及一對 (full house)

(d) 同花 (flush)

(e) 順子 (straight)

(f) 三條 (three of a kind)

(g) 二對 (two pairs)

(h) 一對 (one pair)

(i) 散張 (no relation)

解(a) P (同花順子)

$$= \frac{4\times 10}{C_5^{52}} = \frac{40}{2598960} \approx 0.0000154$$

(b) P (四條)

$$= \frac{C_1^{13}\cdot C_4^4\cdot C_1^{48}}{C_5^{52}} = \frac{13\times 1\times 48}{2598960} = \frac{624}{2598960} \approx 0.000240$$

(c) P (三條及一對)

$$= \frac{C_2^{13}\cdot C_3^4\cdot C_2^4\cdot 2}{C_5^{52}} = \frac{78\times 4\times 6\times 2}{2598960}$$

$$= \frac{3744}{2598960} \approx 0.00144$$

(d) P (同花)

$$= \frac{4\times C_5^{13} - 4\times 10}{C_5^{52}} = \frac{5108}{2598960} \approx 0.00197$$

(e) P (順子)

$$= \frac{10\times 4\times 4\times 4\times 4\times 4 - 4\times 10}{C_5^{52}} = \frac{10200}{2598960} \approx 0.00392$$

(f) P (三條)

$$= \frac{C_1^{13}\cdot C_3^4\cdot \frac{48\times 44}{2!}}{C_5^{52}} \quad [\text{或}\frac{C_1^{13}\cdot C_3^4\cdot (C_2^{48} - 12\times C_2^4)}{C_5^{52}}]$$

$$=\frac{13\times4\times1056}{2598960}=\frac{54912}{2598960}\approx0.0211$$

(g) P (二對)

$$=\frac{C_2^{13}\cdot C_2^4\cdot C_2^4\cdot C_1^{44}}{C_5^{52}}=\frac{78\times6\times6\times44}{2598960}$$

$$=\frac{123552}{2598960}\approx0.0475$$

(h) P (一對)

$$=\frac{C_1^{13}\cdot C_2^4\cdot\frac{48\times44\times40}{3!}}{C_5^{52}}$$

$$[或\frac{C_1^{13}\cdot C_2^4\cdot(C_3^{48}-C_1^{12}\cdot C_3^4-C_1^{12}\cdot C_2^4\cdot C_1^{44})}{C_5^{52}}]$$

$$=\frac{13\times6\times14080}{2598960}=\frac{1098240}{2598960}\approx0.423$$

(i) P (散張)

$$=\frac{\frac{52\times48\times44\times40\times36}{5!}-10200-5108-40}{C_5^{52}}$$

$$=\frac{1302540}{2598960}\approx0.501$$

另法：P (散張)

= 1− 由(a)至(h)的答案總和

$$=1-\frac{40+624+3744+5108+10200+54912+123552+1098240}{2598960}$$

$$=1-\frac{1296420}{2598960}$$

$$\approx0.501$$

很多同學都玩過這些紙牌遊戲，亦可能知道任意兩款牌中得到那一款方可獲勝 (例如三條贏二對)，但未必懂得為何如此安排。其實，任何遊戲都以獲得較難情況的一方為勝，因此，透過計算每款牌的概率，同學便可徹底了解各款牌勝負次序的安排是完全合理和不必爭拗的。

從一個生態模型談起…

畢留明

在一個生態環境中，我們最關心的，自然是當中各種生物的數量。我們更希望知道，過了某一段時間後那些數量的變化。如果我們設 p_n 爲某種生物在時段 n 內的數量，則 p_{n+1}就表示在下一個時段中生物的數量了。基於生物會繁殖的原故，我們不妨設 p_{n+1}與 p_n 成正比，即 $p_{n+1} \propto p_n$ 。

上述的關係式可表爲 $p_n = k^n p_0$；其中 p_0 表示在那生態模型中，該種生物最初的數目，而 k 則是一常數。我們應該明白，在一個有限的生態環境中，生物的數量是不可能無限地增加的，所以上述的結果並不能反映「實況」。我們需要引入另一變數到公式裏，這就是生態環境中的「剩餘空間」。

爲了方便後來的敘述，我們再設 $x_n = \dfrac{p_n}{N}$ ，而 N 就是生態模型中對該生物的「最高容量」。換句話

說， x_n 亦即是該生物在時段 n 中佔有整體空間的比率。從實驗得知

$$x_{n+1} \propto x_n(1-x_n)$$

$$\text{即 } x_{n+1} = r\,x_n(1-x_n) \quad \text{..............} \quad (*)$$

而 r 爲一實數。

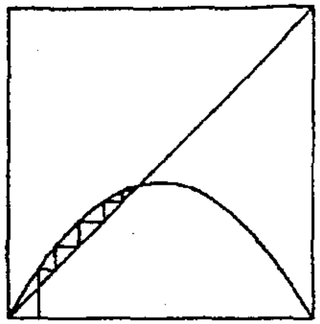
從 x_n 的定義可知， x_n 必定是一些介乎 0 與 1 之間的數值。如果我們將 (*) 式改寫爲函數的形式，我們有

$$\begin{aligned} f(x) &= r\,x(1-x) \\ &= r\,(x-x^2) \\ &= r\,(-(x-½)^2+¼) \end{aligned}$$

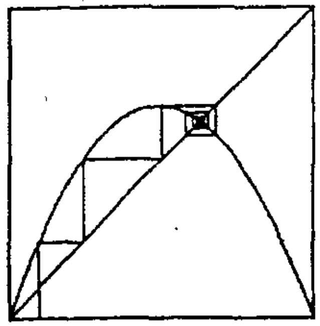
不難發現，因爲 $0 \le f(x) \le 1$ ，所以 $0 \le r \le 4$ 。

數學家發現 (*) 式有很多驚人和引人入勝的特點，非常值得研究，並稱它爲「**邏輯斯諦方程**」**(logistic equation)**。有別於一般的線性方程，邏輯斯諦方程是「**非線性**」，它是沒有解的！不過，我們可以通過計算機或電腦等計算工具來推算當 n 增大時 x_n 的變化。

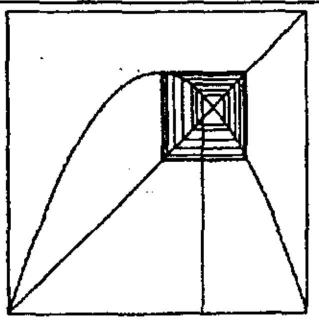
如果大家對一些線性方程（例如：經濟學上的「供求關係圖」）有認識的話，就一定知道，當 n 值增大時，線性方程內的變量最後都會趨向一個極限。但邏輯斯諦方程就不同了，數學家發現，如果 r 介乎 0 與 3 之間， x_n 仍然會趨向一個極限，不過當 r 大於 3 時，就出現一些意想不到的結果了。除了用電腦或計算機來證明這一點外，我們亦可從下面幾幅圖中發現以上結果。



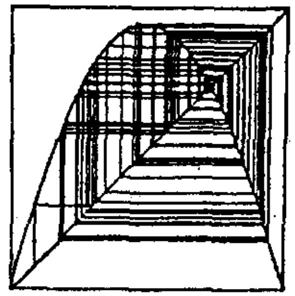
圖一：$r = 1.45$。
x_n 收斂於 0.310 。



圖二：$r = 2.75$。
x_n 收斂於 0.636 。



圖三：$r = 3.2$。
x_n 循環於 0.513 和 0.799 之間。



圖四：$r = 3.8$。
混沌現象。x_n 無法收斂。

明顯地， $y = f(x) = rx(1-x)$ 是一個二次代數式，繪於 x–y 平面上，就成爲一條拋物線。因爲 (*) 式可以表示爲 $x_{n+1} = f(x_n)$ ，即 $f(x)$ 輸出的結果重新代入下一次的 x 中，所以我們可以在圖中加上一條 $y = x$ 的直線，將 $f(x)$ 輸出的結果「反射」回拋物線上，從而獲得 x_n 所趨向的結果。

從圖一和圖二可知，如果 r 小於 3 ， x_n 最後會趨向一個極限。圖三就表示 $r = 3.2$ 的情況， x_n 並不趨向一個單一的結果，而是在兩個數值之間來回反射。如果將 r 增加到 3.8 ，我們便得到一個完全不規則的現象，如圖四，無論 n 增加到那一個數值，x_n 都祇是來回於 0 與 1 之間，而無法收斂，數學家稱這時候爲「混沌」(**Chaos**)。

混沌學

「混沌學」(**Chaos Theroy**)起源於50年代的天氣預報研究工作。當時由電腦的發明人馮諾意曼(**John von Neumann**)領導的一群科學家，希望通過機械的計算來預報長期的天氣變化。在當時，雖然他們的預報工作並不成功，但是他們依然相信，如果他們能夠改善收集數據的方法和瞭解引起天氣變化的各項因素，那麼終有一天可以成功地作出長期的天氣預報。

60年代初，麻省理工學院的洛倫茲(**Eward Lorenz**)在一次天氣預報實驗中，將一串準確度原本爲六位小數的數據，四捨五入至三位小數，然後輸入電腦之中，起初他本能地認爲，這祇不過是千分之一的差別，不可能會引起甚麼差錯，但誰知當他的電腦將數據重覆地計算多次後，竟然產生了一個意想不到的結果：他發現新得出來的「預測」，跟以往計算出來的結果，居然完全相反！起初他還以爲是自己的電腦出錯，但後來才發現，其實問題就出於那千分之一的差別！洛倫茲察覺到，我們所使用的任何一台電腦，始終都有一個「功能上的極限」，計算到了某個

小數位，就必須進行四捨五入，正因爲有誤差的出現，長期的天氣預報工作，就註定要完蛋了！

混沌學的命名人約克(**James Yorke**)曾經說過，即使地球表面上每隔一尺就有一個探測器，能夠準確地收集大氣中的各種數據，亦不能預報一個月後某地區的天氣。這是因爲我們依然無法量度在探測器周圍飛過的每一隻蝴蝶所產生的震盪，而這震盪的影響範圍，卻會隨時間增長而擴大，影響到我們預報工作的可靠性。而洛倫茲就稱這現象爲「**蝴蝶效應**」：一隻蝴蝶在北京拍動雙翼，也可能引致不能準確地預測德州出現的風暴。

簡單來說，「混沌學」就是研究在一個敏感運動中，當輸入的數據有些微差別時，運動軌跡偏離程度的科學。到了今天，混沌學的知識不單應用在天氣報告上，亦已引用於生物學、生態學、經濟學、地理學、幾何學和湍流、雲層變化等研究之中。混沌學家更指出，在不同混沌現象之間，其實存在著不少共同的特性。例如從這些現象中得到的數據均能符合一方程，它就是上文提及的「邏輯斯諦方程」了。

邏輯斯諦方程

「邏輯斯諦」是由英文 "logistic" 一詞音譯過來，解釋爲「後勤」、「補給」的意思，跟「邏輯」(logic)一詞並無關係。

爲了令大家更易去瞭解「邏輯斯諦方程」的特點，便編寫了以下的一個 GW-BASIC 程式，大家可先將它輸入你的電腦，然後慢慢研究。

```
100  KEY OFF : SCREEN 0 : CLS
110  PRINT "Logistic Equation"
120  R = 0
130  WHILE R <= 0 OR R > 4
140    INPUT "Enter the value of r : ", R
150  WEND
160  X = .4137 : XX = 1
170  SCREEN 9 : COLOR 12, 1 : CLS
180  LOCATE 25, 35 : PRINT "r ="; R;
190  COLOR 14
200  WHILE INKEY$ <> " " : REM press space-bar to stop
210    YY = 350 - INT(X * 350)
220    PSET (XX, YY)
230    PITCH = 220 * 8 ^ X
240    SOUND PITCH, .5
250    X = R * X * (1 - X) : REM Logistic Equation
260    IF XX < 640 THEN XX = XX + 1 : GOTO 300
270       COLOR 12, 1 : CLS
280       LOCATE 25, 35 : PRINT "r ="; R;
290       COLOR 14 : XX = 1
300  WEND
310  KEY ON : SCREEN 0 : CLS
320  END
```

首先在程式中的 130 至 150 行輸入一個合理的 r 值，然後在 160 行設定 x_n 的起始數值；如果大家不

喜歡這數值的話，可以選擇另一個數。200 至 300 行是用來計算各個 x_n 值的指令。本可將計算的數值結果印於螢幕上，但爲了增加趣味性，就加入 210 至 240 行，令輸出變成圖像和聲音。如果想終止這些指令，祇需按「空白鍵」即可。

正如上文所述，如果我們將 r 設定在 0 與 3 之間，就會發現 x_n 是收斂的，但速度就有快有慢了。（嘗試 $r = 1$ 、 2 或 3 。）超過 3 ，就出現兩個數值的循環。（嘗試 $r = 3.3$ 。）如果 r 繼續增加，四周期、八周期、十六周期亦會相繼地出現。（$r = 3.5$ 、 3.55 、 3.566 。）再大一點，（$r = 3.7$，）「混沌」的現象就出現了！雖然如此，在 3.6 至 4 的範圍中，我們亦能發現某些數值，突然又再出現「規律」，（例如 $r = 3.74$ 或 3.83 ，）非常有趣！

事實上，「邏輯斯諦方程」確能反映出混沌學中的一些精髓：在簡單的模型中，會出現不規律的複雜現象；相反，在複雜現象之中，卻又蘊含著簡單的條理。例如：在 1975 年，費根包姆(**Mitchell J. Feigenbaum**)就發現，「邏輯斯諦方程」的周期分裂，即由二周期變四周期、四周期變八周期等，其實是符合一個幾何級數的關係，而收斂比率約等於 4.669。不單如此，他更發現很多不同形式的非線性方程，都符合這個關係！

「普適性」的發現，轟動了世界，鞏固了混沌學的地位，同時亦打通了一條連結物理學和數學的通道。

後記

在電影「侏羅紀公園」中，自稱是「混沌學家」的馬康武博士曾向片中那兩名恐龍專家問道：「你們認識『混沌學』嗎？」二人同時搖頭表示不知，跟著又問：「非線性方程呢？」…「奇異吸引子呢？」…「未聽過？眞奇怪你們從未聽過這些名稱！」

當我聽到這段對白時，心中也感到非常慚愧。作爲一個數學教師，竟然也不知道他在說甚麼！所以便決心閱讀一些有關的書籍，並將收集回來的資料加以整理寫成這篇文章。希望能拋磚引玉及得到對這方面有心得的老師的指教。同時因爲篇幅所限，所以「分形幾何」、「吸引子」等內容，均未能一一介紹。文中或有錯漏和不足之處，希望各位能加以指正。

參考書目

盧侃、孫建華　**混沌學傳奇**　上海翻譯出版公司（本書譯自 **James Gleick** *CHAOS:Making a New Science* **Sphere Books (1988)**）

Peitgen, Jürgens, Saupe *FRACTALS FOR THE CLASSROOM* **Springer-Verlag**

Dixon *Chaotic Music on the BBC Micro or IBM PC* **Mathematical Spectrum** 1994/5 Volume 27 Number 1 Page 11

漫談數學教學心得

夢

「我認爲在小學各科中最難教授的是數學科。」這是我在教育學院入學面試中的對答。我一直覺得數學除了抽象外，還要講求邏輯。其實，要一般人理解尚且不易，更遑論要教呢！

正是世事難料，我的第一份教席便是要任教數學科。當我接到校長的通知時，我感到惆悵萬分。在教育學院三年的學習期間，我與數學科絕了緣，或許是我的幸運，我能順利過關；或許又是我的損失，我既沒有任教數學科的經驗，也沒有得到任何的批評和指引。那麼，我只好硬著頭皮去接受這項重大而艱巨的任務。

不經不覺，我任教數學科已經六年了，我對小學各級課程瞭如指掌，要比我主修的美勞科還接觸得多呢！這是我始料不及的。我認爲數學科與其他科目截然不同，它特別著重理解及活學活用，可惜，教導學生在練習簿上的格式卻花了我

不少時間。雖然我認爲格式不太重要，最重要的是學生能運用最有效的方法來計算數學題，但爲了應付校長的查簿及督學的拜訪，大家不得不在格式上多下功夫。每年學期初，我總要三番四次，重覆又重覆地提醒學生做練習時要注意的事項，但總有一些學生要你不斷給予特別的照顧。有時因爲格式問題而弄致教學兩者均不愉快。老師因學生錯誤的格式，如沒有隔行、沒有間好線、直式放亂了位置等而氣結；學生則覺得做好一條數學題便是了，不必執著於雞毛蒜皮般的格式。

任教數學科與解決了一條深奧的數學題所得的滿足感一樣令人不能抗拒。當你把學生從迷惑中解放出來，看見他們恍然大悟的樣子，那份喜悅是難以形容的。我想，這是教其他科目所不易得到的感覺。然而，教授數學科的挫敗感也很大。當你批改習作、測驗卷及考試卷時，才知道你的教學完全失敗，那種失落感也不好受！不過數學老師總能面對這些困難，並找出原因和解決方法，例如運用其他的教學方法，採用不同的運算過程，由淺入深等方法來引導學生。

成績好的學生固然能吸收老師的教導，作爲有責任感的教師也要顧及成績較差的一群，爲免阻延課堂的進度，有時便要犧牲休息的時間來幫助他們。我發覺一星期只有六堂數學是絕對不足夠的，如能安排較多數學科的節數便更理想了。

事實上，教授數學科極具挑戰性，也間接令我的腦筋靈活不少，無怪我愈來愈喜歡教授數學呢。

小學數學教學的解決問題技巧

立昭

近年數學教學的趨勢,除了著重學生對數學概念及計算技巧的掌握,以及啓發兒童的數學思考外,更著重發展學生學習及運用知識的基本能力。而幫助學生發展其解決問題的能力，已成爲近年數學教學目標的重要一環。

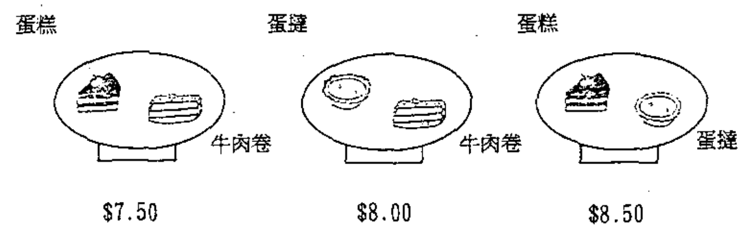
甚麼是「問題」？

這裏所說的「問題」是有別於學生平日所做的「練習」。一般來說，「練習」的目的是訓練，著重某項數學或計算技能的熟習和答案的準確性；而「問題」則是富挑戰性的，需要學生經過思考，找出問題的解決方法，所以，解決問題的重點應在於期間的過程，而非結果。

甚麼是「解決問題」？

解決問題是指利用已有知識和運用數學的技巧和方法,應用於新的情境中,爲問題找出解決的方法,然後驗証結果。現試舉例說明：

下面的三隻碟子,分別盛放了兩款西餅。



你能算出一件蛋糕的售價嗎？試把你的方法寫出來。

____

____

____

對多數學生來說，當面對上述的一類問題,可說是極具挑戰性的。因爲老師在平日課堂上並未曾舉例講解過，在平日所做的數學習作中亦未曾遇見過，所以這情境對學生來說是新的，而它亦有別於一般課本上的習題,學生並不能依循某一個約定俗成的程序，一下子便可直接找到問題的答案，要解決這個問題,學生必須掌握小數四則運算的知識，經過反覆的思考，並利用數學適當的技巧，才能爲問題找出解決的方法，當然，最後他還要驗証所得的答案是否正確。

培養學生學習「解決問題」技巧的原因

當學生面對一個問題時，他往往要利用已有的數學知識和運用數學的技巧和方法去解決，所以在解決問題的過程中，不但能鞏固學生所學的數學知識和技巧，更能發展他們的數學思考能力。例如當學生要解決上述的問題，首先他本身必須掌握小數四則運算的知識，在清楚了解問題的要求後，他知道把任何兩碟西餅的售價相加或相減，都無法找到一件蛋糕的售價，因此，他便要深入研究，反覆思考，選用適當的策略。譬如他會把三碟西餅的售價相加起來，然後除以 2 ，再把所得的結果與第二碟西餅的價錢相比，從而找出一件蛋糕的售價(當然，還有很多其他的解決方法)。在整個過程中，學生其實已運用了不同的數學技巧和方法去解決問題。

當學生把這些技巧應用在日常的生活時，就不期然地提高了他們分析和解決日常生活中難題的能力。例如在小學四年級，當學完「立體圖形」和「面積」這兩個課題後，學生想爲一份禮物製造禮物盒時，他就要綜合運用在這兩個課題中所學的知識，應用於這個實際的問題上。學生要面對「一個紙盒共有多少面」、「紙盒的長、闊、高分別是多少」及「要預留黏貼邊嗎」等等的問題。他要根據上述幾個因素來設計紙盒圖樣，可能還要經過多次的修改，才能製成一個禮物盒。而在整個過程中，不但能鞏固學生所學的數學知識和技巧，更能增強他們解決日常生活中難題的能力。

當學生能成功找出解決問題的方法時，他們的自信心和學習的動力便會不期然地增強。透過與同學們一起研究問題，探討解決方法的同時，學生亦學會了與人相處之道，促進他們的社交技巧。

「解決問題」的步驟

根據波利亞 (Polya, 1957)，一般解決問題的過程可由以下四個步驟組成：

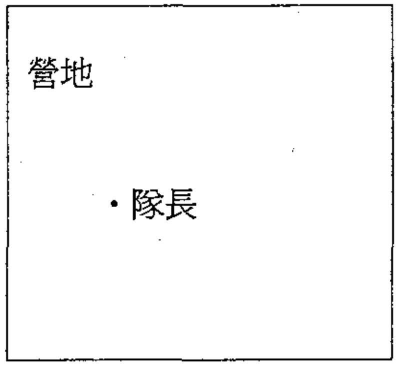
(一)理解問題
(二)設計解題計劃
(三)按步解題
(四)回顧檢討

(一)理解問題

學生首先要明白問題的要求、涉及的概念和算法，這步驟往往需要學生能將問題情境轉化爲數學情境。

示例：

五個童軍隨隊長到郊外露營，他們可隨意在營地上蓋搭帳幕，但帳幕必須與隊長的距離相等。現已知隊長帳幕的位置，問他們的帳幕應蓋搭在哪裏呢？請把你的建議繪在圖中。



面對上述問題時，學生首先要充份理解問題的兩點要求：(一)他要在圖中繪出五個童軍所蓋搭的帳幕位置；(二)這五個帳幕必須與隊長的距離相等，從而找出所涉及的數學概念，即圓周、圓心和半徑的關係，方能找出解決的方法。

(二)設計解題計劃

學生在理解完問題之後，跟著便踏入另一個步驟，也就是最重要的一環，他要找出解決這個問題的適當方法及進行所需的資料處理。一般來說，以下的策略，均適合小學生在解決問題時運用：

(1)實驗和模擬

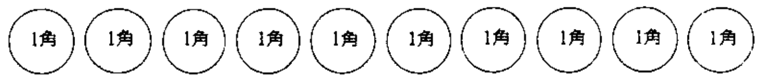
示例：

桌子上排列了 10 個一角硬幣。如每隔一個就改爲二角硬幣，然後每隔兩個就改爲五角硬幣，最後每隔三個就改爲一元硬幣。經改換後，桌子上的 10 個硬幣共值多少？

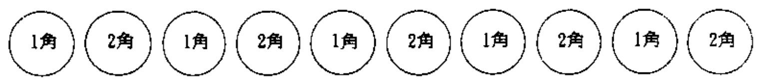
學生可通過實際試驗來解決上述問題。把 10 個一角硬幣排列在桌子上，然後依題目的指示逐一改換，看看最後排列在桌子上的硬幣共值多少。

除了試驗外，學生亦可藉一系列的繪圖來模擬問題：

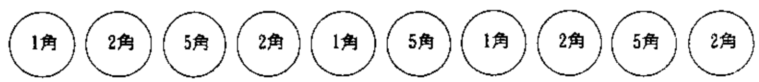
• 首先排列 10 個一角硬幣



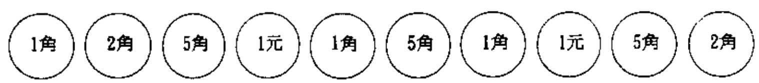
• 每隔一個改爲二角硬幣



• 每隔兩個改爲五角硬幣



• 每隔三個就改爲一元硬幣



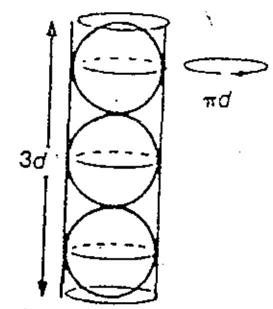
透過這個模擬活動，學生可準確無誤地找出最後排列在桌子上的硬幣共值四元二角。

(2)繪圖

示例：

在一個圓罐內，剛好能把三個網球一個緊貼一個的放進去，究竟圓罐的高度和罐底的圓周那個較長呢？

以上的示例，如學生單從題意來找尋解決的方法，可能花上一段時間也未必能摸得著頭腦，但假如他能根據題意繪製一幅草圖(如下圖)，問題就變得容易得多了。



根據上圖，學生不難發現圓罐的高度相當於三個網球的直徑 (3d)，而罐底的圓周即是網球的直徑乘以圓周率 (πd)，因此就能輕易找出解決問題的方法：圓罐的圓周較高度長，因爲$\pi d > 3d$。

(3)逆轉思考

有些問題，假如我們依照題目的意思順序去思索，可能會感到很棘手。這時候，我們不妨逆轉過來，由終點動手，一步一步的求出原來的未知值。

示例：

文德踏進電梯，電梯先上升 4 層，然後下降 6 層，再上升 8 層，這時電梯停留在 11 樓。問文德在哪一層踏進電梯？

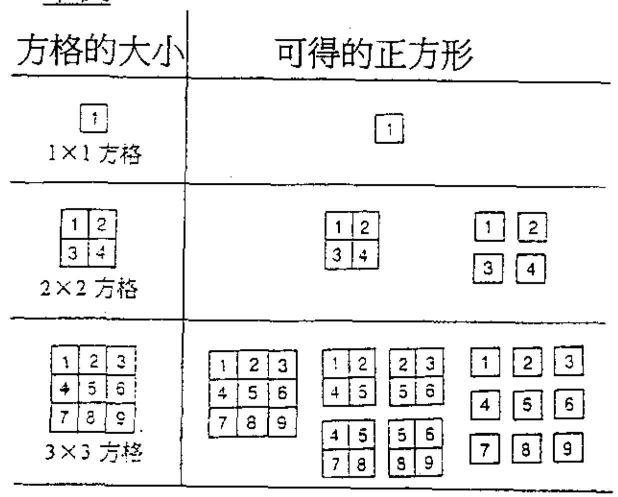
學生可以用逆推法的方式，先計算：

1. 電梯還未上升8層，是停留在(11–8)層 = 3 層
2. 電梯還未下降6層，是停留在(3+6)層 = 9 層
3. 電梯還未上升4層，是停留在(9–4)層 = 5層。

因此，文德是在第五層踏進電梯的。

(4)列表

示例：



根據上圖，在 1×1 方格中，共可找得正方形 1 個；在 2×2 方格中，共可找得正方形 5 個；在 3×3 方格中，共可找得正方形 14 個。那麼，在 5×5 方格中，共可找得正方形多少個？

在解決上述問題時，如果學生只是一味在 5×5 方格上數來數去，最終也可能會出錯。遇到類似的問題，不妨可以鼓勵學生利用列表的方式，去幫助思考。按題目的指示，我們可以編製下列的表格：

方格的大小	5×5 正方形	4×4 正方形	3×3 正方形	2×2 正方形	1×1 正方形	正方形總數
1×1	0	0	0	0	1	1
2×2	0	0	0	1	4	5
3×3	0	0	1	4	9	14

在尋求 4×4 方格及 5×5 方格中，正方形總數分別是多少時，只要學生能把資料作有系統的整理，塡入表格內。就能輕易地得知在 5×5 方格中，共可找得正方形 55 個。(見下表)

方格的大小	5×5 正方形	4×4 正方形	3×3 正方形	2×2 正方形	1×1 正方形	正方形總數
1×1	0	0	0	0	1	1
2×2	0	0	0	1	4	5
3×3	0	0	1	4	9	14
4×4	0	1	4	9	16	30
5×5	1	4	9	16	25	55

(5)邏輯推理

> 示例：
>
> 惠玲、博文、小雁和建忠是同班同學，他們各自喜愛不同的球類活動：排球、籃球、乒乓球和壁球。博文最愛玩乒乓球；而他們四人中，有一人愛玩籃球。但小雁卻不愛玩壁球，而建忠則不愛玩壁球和排球。問小雁和建忠分別最愛什麼球類活動？

要解決上述問題，學生可採用邏輯推理的方法。但由於問題所提供的資料頗爲繁多，故此學生最好先把這些資料稍作整理。以這個示例來說，利用表列方法來表達資料就較爲理想。

	惠玲	博文	小雁	建忠
排球				×
籃球				
乒乓球		√		
壁球			×	×

根據所得資料，學生便要利用邏輯推理去延展圖表的資料。舉例來說，由於博文最愛玩乒乓球，學生就可在博文那一行的其他球類活動欄內塡上「×」。跟著，他便會察看到惠玲可能是唯一一個愛玩壁球的人。

	惠玲	博文	小雁	建忠
排球	×	×		×
籃球	×	×		
乒乓球	×	√		
壁球	√	×	×	×

由於排球都不受惠玲、博文和建忠歡迎，所以它應該是小雁所愛玩的球類活動。找到小雁所愛玩的球類活動後，建忠所喜愛的球類活動就顯而易見了。

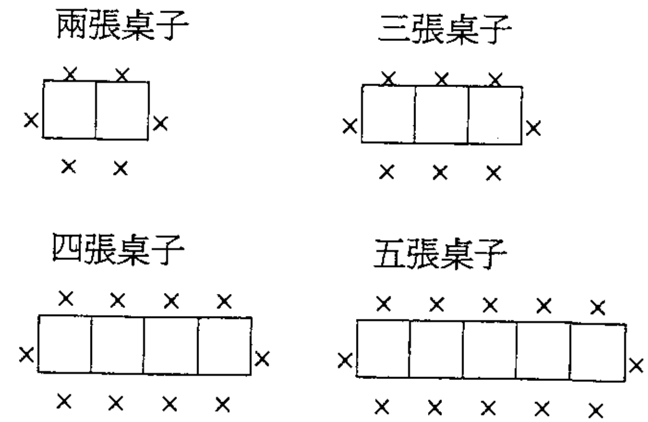
(6)簡化問題

在解決問題時，簡化問題這技巧往往會跟其他技巧，如繪圖、列表和尋找規律等一起運用。

> 示例：
>
> 香城餐廳內有 25 張小正方形桌子，供餐舞會時用。每張桌子的一邊只能坐一人。如將該 25 張桌子一張貼一張的拼作一張長桌，問共有座位多少個？

假如學生無法立即找到解決問題的答案時，他們可採用一個有效的方法，就是先把問題簡化，如「把 2 張、 3 張或 4 張桌子拼作一張長

桌，有多少座位呢？」然後根據題意把不同的情形，用圖畫表達出來：



繪了若干個圖後，學生可能已發覺到座位的數目是桌子數目的 2 倍再加 2 。因此，如果教師能把問題稍作簡化，學生就能較易找到解決問題的方法了。

當然，如果學生未能在這階段找出桌子數目和座位數目之間的關係，那麼，他們只好一邊繪圖，一邊以圖表把結果紀錄下來：

桌子數目	座位數目
2	6
3	8
4	10
5	12
6	14

學生可觀察圖表中兩數的關係，從而找出規律：桌子數目乘以 2 再加 2 ，即 (2n + 2) ，就是座位的數目。所以把 25 張小正方形桌子拼作一張長桌，共有座位 52 個。

(7)尋找規律

示例：

在九月新學期開始的時候，文傑著手籌備組織一個集郵學會，當時只得他一人，是唯一的一個會員。在招募新會員方面，他希望在十月內可以招募另一名會員，然後在以後每一個月都要求每一名會員也招募多一人入會，作爲新會員。如他的計劃能達成的話，那麼，在學期結束時(截至六月底)，集郵學會共有多少會員？

對於上述問題，最有效的解決方法就是用列表方式把最初幾個月集郵學會的會員人數紀錄下來，然後觀察數字之間的關係，找出特定的規律。跟著，再要找出學期結束時，集郵學會的會員總人數，就方便容易得多了。例如：

	月份	會員人數	規律
1.	九	1	1
2.	十	2	2
3.	十一	4	2×2
4.	十二	8	2×2×2 = 4×2
5.	一	16	2×2×2×2 = 8×2
6.	二	32	2×2×2×2×2 = (16×2)

從列表中，學生不難發現除了第一個月(即九月份)外，其餘月份裏集郵學會的會員人數均爲 2 的倍數。而在進一步的探索後，他們更能察覺到 2 的自乘項數是相當於月數減 1 。換而言之，要找出截至六月底時，集郵學會的會員人數，學生只消算一算，由九月開始至第二年六月止，合計是 10 個月。而在六月底時(即第 10 個月)，會員的人數就應該是 2 自乘 (10–1) 次，即 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ (= 2^9)，所以答案便是：在學期結束時，集郵學會有會員 512 名。

(8)推測和核對

> 示例：
>
> 麗萍的媽媽每星期都會給她 32 元作零用。這星期，媽媽給她若干個 1 元、 2 元和 5 元硬幣，總數為 19 個。試算出麗萍所得的每款硬幣各有多少個。

相信學生是無法從一般數學的運算方法來解決上述問題的。一般來說，學生都會採用「推測」這技巧去尋找解決的方法。但如果只是胡亂地、毫無法則地進行推測，可能花上了半天也未必能解決這問題。因此，學生在進行推測時，亦要有系統。他們大可用表列方式來紀錄推測的結果。例如：

	五元	二元	一元	硬幣總數	金額
1.	5	2	3	10	$32
2.	5	1	5	11	$32
3.	4	2	8	14	$32
4.	4	1	10	15	$32
5.	3	4	9	16	$32

在上述圖表中，學生是先推測五元硬幣的數量，然後按照規定的金額（ 32 元），才決定二元

和一元硬幣的數量。（當然，亦可先推測一元或二元硬幣的數量，然後才決定其餘的硬幣分別有多少個。）在進行每次推測後，學生必須把結果核對，看看是否合乎問題的要求。如在上表中，可看見經核對後，第一至五次的推測都是錯誤的，因此學生便需繼續推測下去。但經過多次的推測，學生就能察覺到當五元硬幣減少時，由於金額維持不變是 32 元，硬幣的總數就會相應增加。最後當他推測麗萍所得的硬幣分別是 3 個五元、 1 個二元和 15 個一元時，硬幣的總數就是 19 個，而金額亦合乎要求，是 32 元。這些都是與問題的要求相配合，那就可核對到上述結果是準確無誤的了。

(9)詳列所有可能的答案

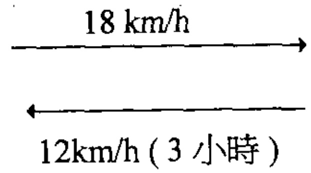
在找出解決問題的方法後，學生亦應查看一下所得的結果是否唯一合理的解決方法。假若還有其他合理的解決方法，就應一一詳列出來了。即如在「推測和核對」的示例中，「麗萍所得的硬幣分別是 3 個五元、 1 個二元和 15 個一元」只是其中一個合理的結果。學生如能繼續推測下去，就知道麗萍所得的硬幣可以是「 2 個五元、 5 個二元和 12 個一元」或「 1 個五元、 9 個二元和 9 個一元」。在詳列所有可能的答案後，問題才算圓滿地解決。

(10)自設方程

> 示例：
> 偉平由家中騎自行車往公園，平均速率是每小時 18 公里；而從公園騎自行車返回家中，他的平均速率是每小時 12 公里。如果偉平在回程時花了 3 小時，那麼，全程他共花了多少小時？

對於這示例，學生可依從下列的步驟去分析和解決：

● 按題意作一草圖



● 列出問題中所涉及的數量，包括已知和未知的。

速率(啓程)	時間(回程)
速率(回程)	距離(家中往公園)
時間(啓程)	距離(公園往家中)

● 把數量之間的關係用等式表示，利用代數符號代表未知的數量。

設偉平由家中騎自行車往公園花了 t 小時

$18t = 12 \times 3$ （距離 = 速率 × 時間）

● 解答所設的方程，並驗算結果：$18t = 36$，所以 $t = 2$。
偉平由家中騎自行車往公園花了 2 小時，所以全程他共花了 5 小時，即 (2 + 3) 小時。

在上述整個過程中，最重要是訓練學生明白問題中數量之間的關係。當然，在找到結果後，把結果代入問題本身來作驗算也是非常重要的。否則，很多學生可能會誤把 2 小時當作答案。

(三)按步解題

學生在尋得解決問題的方法後，便要把答案或結論表示出來。他要先把資料整理好，然後按定出的策略，有系統地列出計算過程，使讀者能一目了然，容易理解。

(四)回顧檢討

其實，把問題的答案或結論表示出來，學生仍未算完成整個解決問題的過程。最後一個步驟是要驗証答案或結論的合理性。如驗証所得，答案或結論並不合理，學生便要重新檢查計算過程或另選方法，並重覆步驟(二)至(四)，直至答案或結論合理爲止。

事實上，解決問題這個學習及運用知識的方法是非常重要的，已滲透在整個現行的數學課程中。教師在設計及進行數學教學時，宜向學生強調這技巧，從而提高他們在這方面的能力，並擴闊他們在數學領域的視野。

The 36th International Mathematical Olympiad (IMO)

KWOK Ka-keung
Deputy Leader, The 36th IMO Hong Kong Team
Hon. Secretary, IMO (HK) Committee

The 36th International Mathematical Olympiad (IMO) was held in Canada from July 13 to 25, 1995. 412 contestants from seventy-three countries took part in the Olympiad. The Hong Kong Team won 2 silver medals, 3 bronze medals and 1 honourable mention and was at the 20th place in the competition.

The Organizing Committee and Academic Committee of the IMO were composed of mathematicians from Canada's tertiary institutions. In addition, many volunteer helpers and guides were recruited from sectors other than tertiary education. Jury meetings and examinations were held respectively at the University of Waterloo and York University in Toronto.

In each of the two days of the contest, 3 questions were given. Each of the 6 questions carried 7 points and the total score was 42 points.

A brief summary of the scores of the contestants and the 73 participating teams were given in Table 1 and 2.

Table 1 Brief Summary of scores received by contestants

	73 teams	Hong Kong Team
number of contestants	412	6
mean score	18.95	25.17

Table 2 Brief Summary of scores of the 73 teams

number of teams	73
mean score	106.96
modal score	131
median score	101

Total score of the Hong Kong Team is 151.

Contestants who scored 37 to 42 points were awarded gold medals, 29 to 36 points silver medals and 19 to 28 points bronze medals. In total, there were 201

medallists; 30 gold, 71 silver and 100 bronze. In addition, 98 contestants received honourable mentions. This year, a special prize was given to Nikolay Nikolov, a contestant from Bulgaria, who gave an elegant solution to question 6.

The success of the 36th IMO owed much to the courtesy and patience of all the IMO officials and guides. The commitment of all leaders (of the participating countries/territories) to the nurturing of young mathematicians is a bond which unites all the participants for a single purpose. This commitment also contributes to the success of the IMO as a forum for international cooperation.

For the sake of interest, the distribution of awards, the questions and solutions of the 36th IMO are given in the appendix. At last, I would like to give a special thanks to Dr. K.Y. LI from HKUST for the compilation of the solutions.

DISTRIBUTION OF AWARDS - 1995 IMO

COUNTRY	SCORE	AWARDS			
		Gold	Silver	Bronze	Hon Men
Argentina	129	-	2	2	1
Armenia	111	-	2	1	1
Australia	145	-	1	4	1
Austria	88	-	-	1	3
Azerbaijan	30	-	-	-	1
Belgium	83	-	-	1	4
Bosnia-Herzegovina	18	-	-	-	-
Belarus	131	-	1	3	2
Brazil	86	1	-	-	3
Bulgaria	207	1	4	1	-
Canada	153	-	2	3	1
Chile	14	-	-	-	1
China	236	4	2	-	-
Columbia	100	-	1	2	2
Croatia	111	-	-	3	2
Cuba	59	-	-	-	2
Cyprus	43	-	-	-	3
Czech Republic	154	-	1	5	-
Denmark	77	-	-	1	4
Spain	72	-	-	1	3
Estonia	55	-	-	-	2
Finland	101	-	-	4	1
France	119	1	-	2	3
United Kingdom	180	2	1	3	-
Georgia	79	-	1	-	2
Germany	162	1	3	1	1
Greece	66	-	-	1	2
Hong Kong	151	-	2	3	1
Hungary	210	3	1	2	-
Indonesia	68	-	-	1	3
India	165	-	3	3	-
Iran	202	2	3	1	-
Ireland	41	-	-	-	2
Iceland	19	-	-	-	-
Israel	171	1	2	2	1
Italy	131	-	-	5	1
Japan	183	1	3	2	-
Kazakhstan	54	-	-	-	3
Kyrgyzstan	28	-	-	-	1
South Korea	203	2	3	1	-
Kuwait	0	-	-	-	-
Latvia	97	-	1	1	2
Lithuania	74	-	-	-	4
Macau	33	-	-	-	-
Morocco	138	-	1	4	1
Malaysia	1	-	-	-	-
Mexico	43	-	-	1	-
FYR Macedonia	117	-	1	3	-
Moldova	101	-	1	1	2
Mongolia	91	-	-	1	5
Netherlands	85	-	-	2	1
Norway	70	-	-	1	2
New Zealand	84	-	1	1	1
Philippines	28	-	-	1	-
Poland	161	-	1	5	-
Portugal	26	-	-	-	-
Romania	230	4	2	-	-
South Africa	95	-	-	2	4
Russia	227	4	2	-	-
Singapore	131	-	2	2	1

COUNTRY	SCORE	AWARDS			
		Gold	Silver	Bronze	Hon Men
Solvenia	42	-	-	-	3
Sri Lanka	10	-	-	-	1
Switzerland	97	-	2	-	2
Slovakia	145	-	2	2	2
Sweden	106	-	-	2	3
Thailand	107	-	1	2	1
Taiwan	176	-	4	1	1
Trinidad and Tobago	32	-	-	-	2
Turkey	134	-	2	3	-
Ukraine	140	1	1	1	2
United States of America	178	-	3	3	-
Vietnam	220	2	4	-	-
Yugoslavia	154	-	2	3	1

IMO (1995) Questions

First Day
July 19,1995

CANADA
1995

Premier jour
19 juillet,1995

1. Let A, B, C and D be four distinct points on a line, in that order. The circles with diameters AC and BD intersect at the points X and Y. The line XY meets BC at the point Z. Let P be a point on the line XY different from Z. The line CP intersects the circle with diameter AC at the points C and M, and the line BP intersects the circle with diameter BD at the points B and N. Prove that the lines AM, DN and XY are concurrent.

2. Let a, b and c be positive real numbers such that abc = 1. Prove that

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$

3. Determine all integers n>3 for which there exist n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in the plane, and real numbers $r_1, r_2, \ldots, r_n$ satisfactory the following two conditions:

(i) no three of the points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ lie on a line;
(ii) for each triple i, j, k ($1 \le i < j < k \le n$) the triangle, $A_i A_j A_k$ has area equal to $r_i + r_j + r_k$.

Time Allowed - 4½ hours.
Each problem is worth 7 points.

Second Day July 20 ,1995	CANADA 1995	Deuxième jour 20 juillet ,1995

4. Find the maximum value of x_o for which there exists a sequence of positive real numbers $x_o, x_1, \ldots, x_{1995}$ satisfying the two conditions:

(i) $x_o = x_{1995}$

(ii) $x_{i-1} + \dfrac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \dfrac{1}{x_i}$
for each $i = 1,2,\ldots,1995$

5. Let ABCDEF be a convex hexagon with

$$AB = BC = CD,$$

$$DE = EF = FA,$$

and

$$\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$$

Let G and H be two points in the interior of the hexagon such that $\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ$. Prove that

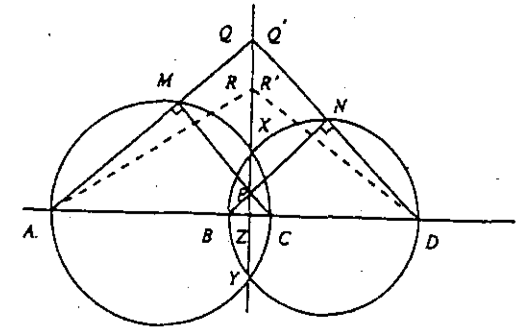
$$AG+GB+GH+DH+HE \ge CF.$$

6. Let p be an odd prime number. Find the number of subsets A of the set {1,2, ...,2p} such that

   (i) A has exactly p elements, and
   (ii) the sum of all the elements in A is divisible by p.

Time Allowed - 4½ hours.
Each problem is worth 7 points.

Solutions to 1995 IMO Problems



1. Solution I (by YU Chun Ling, Ying Wa College)

Let AR be parallel to BP and DR' be parallel to CP, where R and R' are points of line XY. Since $BZ \bullet ZD = XZ \bullet ZY = CZ \bullet ZA$, $BZ/AZ = CZ/DZ$. Since Δ CZP is similar to Δ DZR' and Δ BZP is similar to Δ AZR,

$$\frac{ZP}{ZR}=\frac{BZ}{AZ}=\frac{CZ}{DZ}=\frac{ZP}{ZR'}$$

Hence, R and R' must coincide. Therefore, Δ BPC is similar to Δ ARD.

Since XY is perpendicular to AD, AM is perpendicular to CM, CM is parallel to DR, DN is perpendicular to BN and BN is parallel to AR, the lines AM, DN, XY are the extensions of the altitudes of Δ ARD, hence must be concurrent.

Solution II (by MOK Tze Tao, Queen's College)

Without loss of generality, let A, B, C, D be on the x-axis, X, Y, Z be on the y-axis with Z = (0, 0). Let the coordinates of the centers of circles AMC and BND be $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ and the radii of the circles be r_1, r_2, respectively. Then
$A = (x_1 - r_1, 0)$, $B = (x_2 - r_2, 0)$ $C = (x_1 + r_1, 0)$, $D = (x_2 + r_2, 0)$

Let $P = (0, y_o)$. Then the slope of CP is $\frac{-y_0}{x_1 + r_1}$.
Since AM is perpendicular to CP, the equation of line AM is $(x_1 + r_1)x - y_0 y = x_1^2 - r_1^2$. Let Q be the intersection of AM with XY, then $Q = \left(0, \frac{r_1^2 - x_1^2}{y_0}\right)$.

Similarly, let Q' be the intersection of DN with XY, then $Q' = \left(0, \frac{r_2^2 - x_2^2}{y_0}\right)$.
Finally, $r_1^2 - x_1^2 = ZX^2 = r_2^2 - x_2^2$ Therefore, $Q = Q'$.

Solution III

Let AM intersects XY at Q and DN intersects XY at Q'. Observe that the right angled triangles AZQ, AMC, PZC are similar, so AZ/QZ = PZ/CZ. Then

QZ = (AZ • CZ)/PZ = (XZ • YZ)/PZ. Similarly, Q'Z = (XZ • YZ)/PZ. Therefore Q = Q'. The case P is outside segment XY is also true, no words need to be changed, just examine the new picture.

2. Solution (by CHEUNG Kwok Koon, SKH Bishop Mok Sau Tseng Secondary School)

Substitute $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$, then x, y, z are positive and $xyz = (abc)^2 = 1$. The original expression becomes

$$\frac{1}{a^2(ab+ac)} + \frac{1}{b^2(bc+ca)} + \frac{1}{c^2(ca+cb)}$$
$$= \frac{y}{xz(x+z)} + \frac{z}{xy(x+y)} + \frac{x}{yz(y+z)}$$
$$= \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} + \frac{x^2}{y+z}$$

Now by the Cauchy-Schwarz inequality,

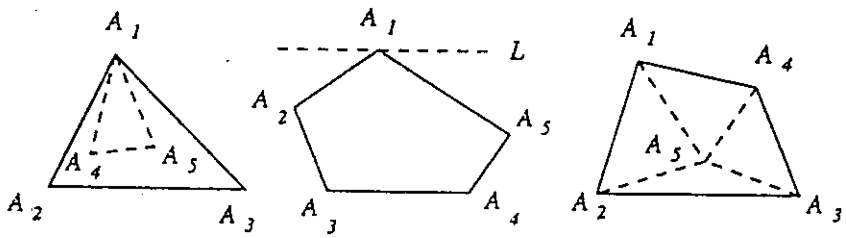
$$\left(\frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} + \frac{x^2}{y+z}\right)\left[(x+z) + (x+y) + (y+z)\right] \geq (y+z+x)^2$$

Therefore,
$$\frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} + \frac{x^2}{y+z} \geq \frac{y+z+x}{2} = \frac{3}{2}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$
$$\geq \frac{3}{2}(xyz)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$
by the AM-GM inequality.

3. <u>Solution</u> (by HO Wing Yip, Clementi Secondary School)

For $n = 4$, let $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (1,0)$, $A_3 = (1, 1)$, $A_4 = (0,1)$, $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1/6$.

Next, we are going to prove that there are no solutions for $n \geq 5$. Suppose the contrary, consider the convex hull of A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.(This is the smallest convex set containing the five points.) There are three cases.



Case 1. (Triangular Case)
We may assume the points are named so that A_1, A_2, A_3 are the vertices of the convex hull, with A_4, A_5 inside such that A_5 is outside $\Delta A_1A_2A_4$ and A_4 is outside $\Delta A_1A_3A_5$. Denote the area of ΔXYZ by $[XYZ]$. We get a contradiction as follow :

$$\begin{aligned}[A_1A_4A_5] + [A_1A_2A_3] &= (r_1 + r_4 + r_5) + (r_1 + r_2 + r_3)\\ &= (r_1 + r_2 + r_4) + (r_1 + r_3 + r_5)\\ &= [A_1A_2A_4] + [A_1A_3A_5]\\ &< [A_1A_2A_3].\end{aligned}$$

Case 2. (Pentagonal Case)
We may assume $r_1 = \min\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$. Draw line L through A_1 parallel to $A_3 A_4$. Since

$$[A_1A_3A_4] = r_1 + r_3 + r_4 \leq r_2 + r_3 + r_4 = [A_2A_3A_4],$$

A_2 is on line L or on the half plane of L opposite A_3, A_4 and similarly for A_5. Since A_1, A_2, A_5 cannot all be on L, we get $\angle A_2A_1A_5 > 180°$ contradicting convexity.

Case 3. (Quadrilateral Case)
We may assume A_5 is inside the convex hull. First observe that $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$. This is because

$$(r_1 + r_2 + r_3)+(r_3 + r_4 + r_1) =(r_1 + r_2 + r_4)+(r_2 + r_4 + r_3)$$

is the area S of the convex hull.
So $2S = 3(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$. Also

$$\begin{aligned}S &= [A_1A_2A_5]+[A_2A_3A_5]+[A_3A_4A_5]+[A_4A_1A_5]\\ &=2(r_1+ r_2 + r_3 + r_4)+4r_5.\end{aligned}$$

From the last two equations, we get
$r_5 = -(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)/8 = -S/12 < 0$.

Next observe that A_1, A_5, A_3 not collinear imples one side of $\angle A_1A_5A_3$ is less than 180°. Then one of the quadrilaterals $A_1A_5A_3A_4$ or $A_1A_5A_3A_2$ is convex. By the first observation of this case, $r_1 + r_3 = r_5 + r_i$, where $r_i = r_4$ or r_2. Since $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$, we get $r_5 = r_2$ or r_4. Similarly, considering A_2, A_5, A_4

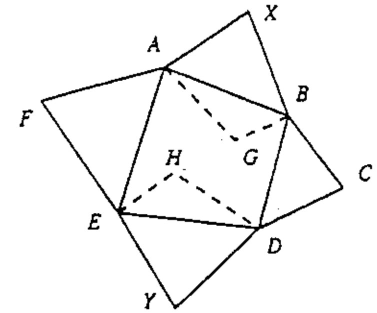
not collinear, we get $r_5 = r_1$ or r_3. Therefore, three of the numbers of r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 are negative, but the area of the corresponding triangle is positive, a contradiction.

4. Solution (by POON Wai Hoi Bobby, St. Paul's College)

Condition (ii) implies $2x_i^2 - (x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}})x_i + 1 = 0$ which gives $x_i = \frac{1}{x_{i-1}}$ or $\frac{x_{i-1}}{2}$. (Thus, x_i is obtained by either a reciprocal operation or a halving operation from x_{i-1}.) Hence $x_{1995} = 2^r x_0^s$, where $s = \pm 1$ and r is an integer at most 1995.

Suppose from x_0 to x_{1995}, there are n reciprocal operations and 1995 – n halving operations. Then $s = (-1)^n$. Also, 1995 – n and r have the same (odd-even) parity. If n is even, then r is odd so that $x_{1995} = 2^r x_0^1$ and condition (i) implies $x_0 = 0$. If n is odd, then r is even so that $x_{1995} = 2^r x_0^{-1}$ and condition (i) implies $x_0 = 2^{r/2} \le 2^{997}$.

The sequence $x_0, \frac{x_0}{2}, \frac{x_0}{2^2}, \ldots\ldots, \frac{x_0}{2^{1994}}, \frac{2^{1994}}{x_0}$ shows the maximum of x_0 is 2^{997}.



5. Solution (by WONG Him Ting, Salesian English School)

As in the figure, we draw equilateral triangles ABX and DEY such that ABCDEF is congruent to DBX AEY. Since the corresponding sides and angles are equal, CF = XY.

Now $\angle AXB + \angle AGB = 180° = \angle DYE + \angle DHE$. So ABXG and DHEY are cyclic quadrilaterals. By Ptolemy's theorem, $AB \cdot XG = AX \cdot GB + XB \cdot AG$, which implies XG = AG + GB. Similarly, HY = DH + HE. Therefore,

$$\begin{aligned} AG + GB + GH + DH + HE &= XG + GH + HY \\ &\ge XY = CF. \end{aligned}$$

6. Solution

Consider the polynomial
$F_a(x) = (1 + ax)(1 + a^2x)(1 + a^3x) \dots (1 + a^{2p}x)$

$$= \sum_{k=0}^{2p}\left(\sum_n c_{nk}a^n\right)x^k$$

The coefficient c_{nk} counts the number of terms $(a^{i_1}x)(a^{i_2}x) \dots (a^{i_k}x)$, where $i_1, i_2, \dots, i_k$ are integers such that $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le 2p$ and $i_1 + i_2 + \dots + i_k = n$. So the answer to the problem is $\sum_{n\equiv 0 (\text{mod } p)} c_{np}$.

The coefficient of x^p in $F_a(x)$ is $\sum_n c_{np}a^n$,from which we have to single out those c_{np} with n divisible by p. To do that, we can try setting a to be a p-th root of unity. Then $a^n = 1$ when $n \equiv 0 (\text{mod } p)$. (However for $n \not\equiv 0 (\text{mod } p)$, a^n will be a complex number!)

First observe that for the p-th root of unity $\omega = e^{2\pi i/p}$,

$$\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}\omega^{nj} = \begin{cases} \frac{1}{p}\frac{(\omega^n)^p-1}{\omega^n-1} = 0 & \text{if } n \not\equiv 0 (\text{mod } p), \\ \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} 1 = 1 & \text{if } n \equiv 0 (\text{mod } p). \end{cases}$$

So to get $\sum_{n\equiv 0(\text{mod } p)} c_{np}$ from $\sum c_{np}a^n$, we can set $a = 1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-1}$ to get p expressions, then

average these expressions to get $\sum_{n\equiv 0(\text{mod } p)} c_{np}$, i.e.

$$\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}\left(\sum_n c_{np}\omega^{nj}\right) = \sum_n c_{np}\left(\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}\omega^{nj}\right) = \sum_{n\equiv 0(\text{mod } p)} c_{np}.$$

So the answer to the problem is the coefficient of x^p in

$$\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}F_{\omega^j}(x) = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}(1+\omega^j x)(1+\omega^{2j}x)(1+\omega^{3j}x)\cdots(1+\omega^{2pj}x)$$

$$= \frac{1}{p}\left[(1+x)^{2p} + \sum_{j=1}^{p-1}\left[(1+\omega^j x)(1+\omega^{2j}x)\cdots(1+\omega^{pj}x)\right]^2\right]$$

$$= \frac{1}{p}\left[(1+x)^{2p} + \sum_{j=1}^{p-1}(1+x^p)^2\right]$$

$$= \frac{1}{p}\left[(1+x)^{2p} + (p-1)(1+x^p)^2\right],$$

where in the second equality we used $\omega^p = 1$ implies $\omega^{(p+i)j} = \omega^{ij}$ and in the third equality we used the identity $Z^p + t^p = (Z + t)(Z + \lambda t) \dots (Z + \lambda^{p-1}t)$ with $\lambda \neq 1$ a p-th root of unity. Therefore,

$$\sum_{n\equiv 0(\text{mod } p)} c_{np} = \frac{1}{p}\left[C_p^{2p} + (p-1)2\right]$$

is the answer to the problem.

Extra-curricular Activities:

Mathematics Camp

KAN

A three-day Mathematics Camp organised by the 12th Hong Kong Mathematics Olympiad (HKMO) Organising Committee was held at Wu Kwai Sha Youth Village on 20-22 April 1995. The finalists of the HKMO were invited to join the Camp and the camp fee was sponsored by the Education Department.

The aims of the Camp were to enhance participators' knowledge in Mathematics as well as to provide recreational activities. The main events in Day 1 of the Camp were the talks delivered by Dr. SIU Man-keung (HKU) and Dr. LI Kin-yin (HKUST). Their topics were "Can you count? I can't!' and "How to solve problems?" respectively. Participators were given an informal competition in Day 2 to apply what they had learnt in Dr. LI's talk. Dr. LI also gave a talk on the solutions to the problems of the informal competition in Day 3.

Apart from the talks, programmes including maths games, film show, variety show, mini Olympic games and barbecue were organised. Participators were welcomed to take part in the programmes. Some topics that were beyond the textbook boundaries were introduced through activities. In addition, they could make use of the opportunities to make friends with one another.

The Camp was run smoothly in those three days. Participators were highly involved in the programmes. It was not hard to see that they had lively and informal discussions with their teachers and the guest speakers. Their interests in learning mathematics were obviously stimulated. At the closing ceremony, the Assistant Director of Education, Mr. Che-leung HO was invited as the guest of honour and to present souvenirs to the winners of the competition.

Mathematics Camp might sound a brand new name but it was certainly not impossible to materialise. Teachers were recommended to take it into consideration when mathematics extra-curricular activities were planned. It provided another environment which was free and open for pupils to learn mathematics. Teacher-pupil relationship and understanding would be improved through living in the Camp. On the other hand, motivation of learning mathematics would be greatly enhanced and pupils' vision on the mathematical field widened.

A set of the Mathematics Camp materials was placed at the Mathematics Teaching Centre at room 310, 4 Pak Fuk Road, North Point. The committee members of the HKMO were looking forward to sharing their experiences with you. If you have any queries or suggestions, please let the members have them via the editor of SMN.

PASTIMES

1. (i) The number 567 has three digits that are consecutive numbers. Find the remainder when it is divided by
   - (a) 3
   - (b) 11
   - (c) 37

   What do you discover when other numbers with the same pattern (e.g. 012, 123, ... 789) are divided by these three numbers ?

   (ii) Find all the numbers with this pattern that are multiples of
   - (a) 4
   - (b) 6
   - (c) 7
   - (d) 9
   - (e) 12
   - (f) 13

   Why are there no three digit numbers with the said pattern that are multiples of 11 ?

2. If A, B, C and D are four different digits and

$$\begin{array}{r} ABCD \\ \times \quad\quad 4 \\ \hline DCBA \end{array}$$

What value does ABCD stand for ?

3. Two brothers, Paul and John, sold n sheep for \$n each. They shared the money by taking \$10 each time in turn. Paul took the money first. At the last turn, Paul took \$10 and John took the rest which was less than \$10. Paul then gave John a knife and it made the deal fair. Do you know the cost of the knife ?

4. Train A traveled from city P to city Q and train B traveled from city Q to city P at a different speed. Two trains started the journey at the same time. They met first time at a point 50 km from P. The two trains returned immediately after they reached their destinations. The two trains met again at another point 30 km from Q. Suppose the two trains traveled at uniform speed throughout the whole journey. What is the distance between P and Q ?

Suggested Solutions to PASTIMES

1. (i) The numbers are of the form $100x+10(x+1)+(x+2) = 111x + 12$. The remainders are
   (a) 0,
   (b) $x+1$, i.e. the middle digit, and
   (c) 12.

   (ii) (a) If $111x+12=4m$, then x must be 4 (or 8), so 456 is the only multiple of 4.
   (b) All even numbers with this pattern are multiples of 6. (012, 234, 456, 678)
   (c) $111x+12=7(16x+1)-x+5$, so that $x=5$ gives 567 as the only multiple of 7.
   (d) $111x+12=9(12x+1)+3(x+1)$, so $x=2$ or $x=5$ gives 234 and 567 as multiple of 9.
   (e) $111x+12=12(9x+1)+3x$, so $x=4$ gives 456 as the only multiple of 12.
   (f) $111x+12=13(8x+1)+7x-1$, so $x=2$ gives 234 as the only multiple of 13.

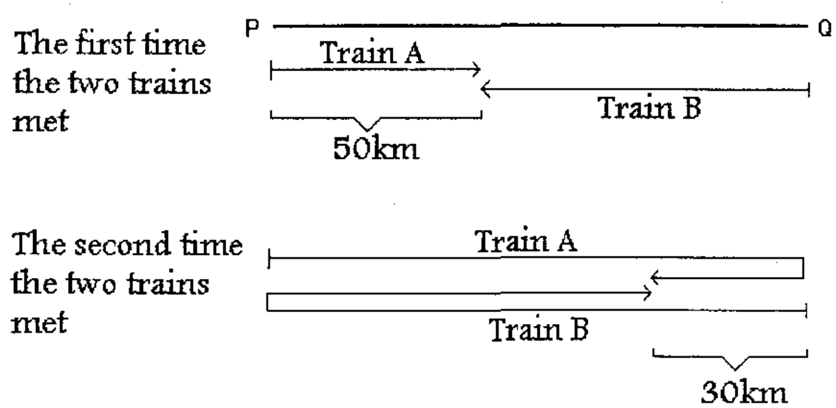
   $111x+12=11(10x+1)+x+1$, and if $x+1=11$, then $x=10$ which is impossible.
   $\therefore$ There were no three digit numbers with the said pattern that are multiple of 11.

2. Since the product is a four-digit even number, A must be even and less than 3 so A=2. Now the last digit of the product is 2, so D should be either 3 or 8. Since the product must be greater than 4000, D=8. Since 4(8)=32, B must be

an odd number. As B is less than 2, B=1. As the last digit of 4C + 3 is 1, C is either 2 or 7. Since A=2 and C ≠ A, C=7. So ABCD stands for 2178.

3. Let n=10a+b where a, b are positive integers and $b \le 9$. Total money they got was $\$(10a+b)^2 = \$(100a^2+20ab+b^2)$. Since $100a^2+20ab$ is divisible by 20, we need only consider b^2. At the last turn, John got less than 10 dollars. So b^2 should be equal to $10(2k-1)+m$ where k and m are single-digit positive integers and $k \le 5$. It is not hard to find that only $b^2 = 16$ or 36 meets the requirement. In both cases, John got \$6 at the last turn. So the value of the knife was \$4.

4.



Referring to the figure, the total distance traveled by the two trains at the first time they met was equal to the distance between P and Q. At the second time they met, the total distance they traveled was 3 times the distance between P and Q. So, at that moment, train A had traveled 150 km (3 × 50km), and PQ = 150 km – 30 km = 120 km.

For Your Information

1. <u>International Mathematical Olympiad (IMO)</u>

The 36th IMO was held from 13 to 25 July 1995 in Canada. The contest was on 19 and 20 July. It was the seventh year for the Hong Kong Team to participate in the event.

The Hong Kong Team won 2 silver medals, 3 bronze medals and 1 honourable mention and was at the 20th place in the competition.

The six members participated in the 36th IMO were:

CHEUNG Kwok-koon	(SKH Bishop Mok Sau Tseng Secondary School)
HO Wing-yip	(Clementi Secondary School)
MOK Tze-tao	(Queen's College)
POON Wai-hoi	(St. Pauls' College)
WONG Him-ting	(Salesian English School)
YU Chun-ling	(Ying Wa College)

Other details like the performance of contestants from other countries are divulged in the article "The 36th International Mathematical Olympiad" by Mr. KWOK Ka-keung, Deputy Leader of the 36th IMO Hong Kong Team and Honourable Secretary of the IMO (HK) Committee.

2. The Mathematics Camp (1995)

A three-day Mathematics Camp organized by the 12th Hong Kong Mathematics Olympiad (HKMO) Organizing Committee was held at Wu Kwai Sha Youth Village on 20-22 April 1995. The finalists of the HKMO were invited to join the Camp. The aims of the Camp were to enhance participators' knowledge in mathematics and to provide recreational activities. For further details, please see the article 'Extra-curricular Activities: Mathematics Camp" in this issue.

3. The Thirteenth Hong Kong Mathematical Olympiad (HKMO)

176 secondary schools participated in the heat event of the Thirteenth HKMO on 10 February 1996. 40 schools which got the highest scores in the heat event were selected to enter the final event which is scheduled to be held on 30 March 1996 at the hall of the Black Campus, the Hong Kong Institute of Education.

Regarding the Poster Design Competition for the Thirteenth HKMO, the champion was CHING Ka-fung of Jockey Club Government Secondary Technical School. The First Runner-up was TANG Ka-man of Jockey Club Ti-I College and the Second Runner-up was YU Man-ching of Sacred Heart Canossian College. The champion poster is shown on page 89.

A Mathematics Camp is also scheduled to be held in April 1996 for the 40 teams participating in the final event of the Thirteenth HKMO. This is the second time that the Mathematics Camp is organized.

4. Mathematics Teaching Centre

The opening hours of the Mathematics Teaching Centres are :

Monday	9:00 a.m. - 12:30 p.m.
Wednesday	2:00 p.m. - 5:00 p.m.
Saturday	9:00 a.m. - 12:00 noon

(except public holidays)

Teachers are welcome to visit the centre and use the facilities there.

From the Editor

I would like to express my gratitude to those who have contributed articles and also those who have given valuable comments and suggestions to the newsletter.

The SMN cannot survive without your contributions. You are, therefore, cordially invited to send in articles, puzzles, games, cartoons, etc for the next issue. Anything related to mathematics education will be welcomed. We particularly need articles on sharing teaching experiences, classroom ideas, teaching methodology on particular topics, organization of mathematics clubs and even the organization, administration and co-ordination of the mathematics panel. Please write to the SMN (with your contact address included) as soon as possible and the address is

The Editor,
School Mathematics Newsletter,
Mathematics Section,
Room 1207, Wu Chung House,
213, Queen's Road East,
Wanchai,
Hong Kong.

For information or verbal comments and suggestions, please contact the editor on 2892 6554.