SCHOOL MATHEMATICS NEWSLETTER

ISBN 978-988-8581-09-2

9 789888 581092

政府物流服務署印

學校數學通訊

第二十五期

教育局

SMN

SCHOOL MATHEMATICS NEWSLETTER

ISSUE 25

Published by
Mathematics Education Section, Curriculum Development Institute,
Education Bureau, Government of the Hong Kong Special Administrative Region.
香港特別行政區政府教育局課程發展處數學教育組出版

ISBN 978-988-8581-09-2

Foreword

Welcome to the 25th issue of the School Mathematics Newsletter (SMN).

The School Mathematics Newsletter (SMN) is for mathematics teachers. It serves as a channel of communication on mathematics education in Hong Kong. This issue involves various articles written by academics and teachers in different areas, including academic insightful views on Mathematics education, suggestions of effective strategies in learning and teaching of mathematics on specific topics, implementing school-based STEM education, computational thinking in mathematics lessons and articles related to mathematical modelling, mathematics game, the history of mathematics, etc.

In the existing education system, mathematics teachers are faced with the tremendous challenge of teaching students of very different abilities, motivations and aspirations. To meet this challenge, mathematics teachers need to equip themselves with necessary mathematical skills and teaching strategies to cope with different teaching situations. We do hope that all readers will find the content of this issue informative and stimulating.

The Editorial Board of SMN wishes to express again its gratitude to all contributors, and also to the fellow colleagues of the Mathematics Education Section who have made good efforts in producing the SMN Issue 25.

SMN provides an open forum for mathematics teachers and professionals to express their views on the learning and teaching of mathematics. We welcome contributions in the form of articles on all aspects of mathematics education. However, the views expressed in the articles in the SMN are not necessarily those of the Education Bureau. Please send all correspondence to:

The Editor, School Mathematics Newsletter,
Mathematics Education Section
Curriculum Development Institute
Room 403, Kowloon Government Offices
405 Nathan Road
Yau Ma Tei, Kowloon
email: math@edb.gov.hk

目錄

1. 數學素養：從學習經驗尋覓數學的意義

羅浩源

香港中文大學課程與教學學系

引言

「素養」（literacy）一詞，原意是指一個人所具備讀和寫的能力。隨着時代的變更，素養的理解亦變得複雜和多元。踏入 21 世紀的數碼年代（digital age），素養亦涵蓋了多元的理解和其相關的能力，包括數碼資訊素養（digital information literacy）、圖書館素養（library literacy）、和媒體素養（media literacy）等（見 OECD， 2000；Newman，2008；UNESCO，2013）。時至今日，對於受過良好基礎教育的人，似乎已超越擁有「讀、寫、算」在傳統素養能力培育上的期盼，而是包含通過訊息的詮釋和理解而達致與別人進行有效溝通的一種文化素養。換言之，21 世紀的「素養」是一種能以語言、文字、甚至是符號（包括數字和圖像）作為傳意或交流的媒體來回應瞬息萬變的世界的能力。數學作為基礎教育中必修必考的一個學科，又可以怎樣在培育新生代學生的素養上發揮其應有的重要作用？

數學素養：促進素養的數學 vs 促進數學的素養

「數學素養」（mathematical literacy）一詞，根據「經濟暨合作發展組織」（OECD，1999）的定義，乃是指從認識和

理解數學與真實世界的互動角色在不同生活情景中,所能展示如何作出反思性和建設性判斷的個體能力。這個定義，其後發展成「國際學生評估計劃」（PISA）在追蹤全球數學解難能力呈現在培育素養上所 進行測試的理論框架（de Lange，2006）。在 2006 年，「數學素養」更成為南非高中的一個選修科目（Venkat，2007），強調數學與生活情景上的關連,如何能運用數感（number sense）和空間感（spatial sense）去解決現實世界所遇上的問題（Machaba，2018）。

數學素養的發展,可追溯到更早期有關「數感」或「數字感」(numeracy)(Crowther，1959)和「量性素養」(quantitative literacy)（Steen，2001）在數學教育上的關注和討論。數學是一個極為重要的人類活動。在過去超過半個世紀以來,如何把數學普及成為真正的「大眾數學」(Mathematics for all)（Gates & Vistro-Yu，2003）一直是數學教育的一個值得深思的議題。在教育早已普及的今天,很可惜數學本身卻還未能做到真正的「普及」。每一個適齡學童皆會接受由小學到中學的 12 年基礎數學的訓練，但值得我們關心的是：究竟其中有多少人在完成整個課程後能從學習中得到其應有的意義？作為一個必修必考的學科,數學在促進學習者應擁有的素養上發揮了怎麼樣的角色？而另一方面,素養作為具備溝通能力的一種要求,如何融入教與學的過程,讓學生通過學習數學的經驗去塑造其意義，從而促進數學的普及？

數學學習的經驗

對於正在中小學接受基礎教育的學生而言,他們的數學故事就是在學校學習的故事。在學校不一樣的學習數學經驗,會為學生對數學產生很不同的觀感。美國加州州立大學富勒頓學院的 Andrea Guillaume 和 Lisa Kirtman 在 2010 年發表了他們研究有關準數學教師(*N*=144)自身的數學故事的報告。我從其中選取了四則故事,並加上標題,來詮釋數學學習經驗在影響學生怎樣看數學的重要性。

故事(一):討厭的計時器 我還清楚記得小學四年級數學課的挫敗經歷。那活該的 4 分鐘競賽活動,要求我們 4 分鐘內完成 200 題乘數。成績素來優異的我,突然感到失敗、羞辱,縱使再嘗試,也是失敗。我感覺自己蠢,但我知道我不是愚笨,我祇是討厭那種感覺。最後,經過四次嘗試後,我成功了。但我已再不想看到我的名字在那 恐怖的黃色告示板上出現,我完全感覺不到那次勝利的喜悅。我仍然很討厭那個計時器。

故事(二):特別深刻的非常規問題 我記得在五年級要不斷地做解難的題目。其中最深刻的記憶,就是老師問了一個這樣的問題:「有 3 個人想過河,他們每人的重量皆為 60 kg。但他們祇有一隻能負載 120 kg 的船,試問他們可以

怎樣能讓全部人過到河？」

故事（三）：成功經驗產生數學的熱愛生命中我還記得第一次因為那個老師令我真正享受上數學課，而甚至獲得甲等成績。對我來說那是一個重要的轉捩點。

故事（四）：老師，你可否用另一種方法教嗎？
在學習幾何課上，我完全跟不上。我不能掌握其中的概念，亦「看」不到那些抽 象的圖形和圖像。我的老師幫不了忙，只懂得用一種方法教我們—單向式的講課，而從不改變他的教法。班上很多同學跟我一樣，感到迷惘。

以上的四則故事，我嘗試用「4P」來作歸納：（1）Pain—「鬥快」，「鬥準」，再加上排名次，為學生帶來痛苦的經驗（故事一）；（2）Problem—「非常規」(non-routine) 或開放性（open ended）問題會給學生創造更深更廣的思考空間（故事二）；（3）Passion—成功經驗（包括來自學習的過程和評估的結果）能讓學生產生更積極的學習態度，成就學習背後更大和更遠的目標。多元的形成性評估 (formative assessment），甚或是真實的評估（authentic assessment）（Law，2021） 是否更有利促進學生在學習數學上會有更理想的態度？（故事三）；（4）Promise—單向性的講解是極不容易讓學生掌握抽象的概念。利用合適的「動手活動」

（hand- on activity）可創造對話空間（dialogic space）來引導學生「看」到隱藏在圖形或 圖像中的數學概念(故事四)。採用各種教學策略來支持學生在學習中獲得意義，這是所有教師都應該擁有的信念。而這種「信念」就是一種承諾(promise)。因此，「讓數學學習有意義」應該是職前教師在學習怎樣教數學中、對自己選擇投身數 學教育的一個承諾，如果他們真的希望他們教的學生能通過數學本身的學習會有 一個美好(promising) 的未來。

數學意義的「尋」、「覓」

文字或符號本身其實並沒有意義，直至有人利用那些文字或符號進行思考、詮釋、表達和運用才產生其意義。與生俱來對周遭環境的好奇，促使我們利用身體的感官去探索、去理解所經驗的事和物。在成長的過程中，我們會透過以語言和文字 來與別人交流彼此對事物的理解，從而獲得「常識」或「常理」（common sense）。這種「常識」是有別於在學校學習的常識科（general knowledge）；前者主要是從 生活經驗（包括學校的學習經驗）的實踐而來的，而後者則是來自常識作為一學 校科目上的學習而獲得。「Common sense」一詞的原意，大概是指一般常人利用 與生俱來的基本推理（reasoning）能力，從把它運用於實際的生活經驗中而獲得的一種可理解的思維。其實，數學和 common sense 的起源是相同的 — 從羣體行動中共享的感官經驗、社交經驗、和社交目的所獲得的抽象概念（Keitel & Kilpatrick，2005，頁109）。數學本身當然不等同於 common sense，但若果教師

能 把「數學當作常識」（mathematics as common sense）視為一個起點，與學生進行思辨和討論，應該能為他們開拓更開放的對話空間，好讓其從中獲得更深層的數學意義。

究竟學習者怎樣能領悟數學箇中的意義？我嘗試從「尋」、「覓」的古文形義（參考自中大人文電算研究中心的網上漢語多功能字庫）去探討如何獲得意義過程的脈絡。「尋」和「常」皆為古代的長度 — 八尺為尋，倍尋（一丈六尺）為常，喻短或小。「尋常」一詞，意指「普通、常見」。「尋」的本意，是量度人兩臂伸展開的長度（見圖一）。以 common sense 作為學習的起點，會經歷兩個以日常用語進行推理的過程 — 連繫（anchoring）和客觀或具體化（objectification）（Moscovici，1981，頁 192）。學生在學校學習數學的基本任務，就是要利用 common sense 通過開放的對話去內化經討論和辯証而獲得概念，從而認識和熟習本來是陌生的事物（make the unfamiliar familiar）（Keitel & Kilpatrick，2005，頁 111）。

圖一「尋」字的形義

(中大人文電算研究中心漢語多功能字庫)

數學的抽象性教人（包括接受過良好教育的成年人）看它不透（Coben，2000）。「覓」作為古文的形義，是從「見」從「爪」，以手半遮眼睛而視之形（見圖二），本義是窺視，引申表示尋求。學習數學要有意義，教師需通過課堂活動的設計來引導學生「看」到本來他們看不到的意念圖像（make invisible visible）。去「覓」數學背後的意義，課堂活動本身需讓學生以「手」和「眼」並用，並通過互動的討論、來引導他們有層次地把從生活經驗而來的 common sense、轉化為可理解和運用的數學認知。

圖二「覓」字的形義

(中大人文電算研究中心漢語多功能字庫)

結語

從整個人類文明的發展歷史看，數學的重要性不言而喻。數學教育需要我們關注的，不祗是數學精英的培訓，更是基礎數學作為一種素養的培育、推廣和深化。生活在事物變得複雜和不確定的 21 世紀，我們更有需要透過自主學習和真實評 估來發展學生的數學素養，從而更有利於 STEM 教育的進一步拓展。若果學生在學習數學過程中缺少了學習本身應有的意義，縱使他們能熟練運算上的技巧，卻未必能成為一個具備良好素養的人。在那「4P」故事背後，或許可為我們揭示出 在尋覓數學意義的學習旅程中更深層的「4P」——一個具備良好數學素養的人(Person)會有更大的潛力(Potentiality)過不同的視野觀點(Perspective)為未來帶來不一樣的想像可能 (Possibility)。在學生成長旅途上，但願看到他們從尋覓數學意義過程，能享受到那份難得真趣。

參考文獻

[1] Coben, D. (2000). Mathematics or common sense? Researching ‘invisible’ mathematics through adults’ mathematics life histories. In *Perspectives on Adults Learning Mathematics* (pp. 53-66). Springer, Dordrecht.

[2] Crowther Report. (1959). *Report of the Central Advisory Council of Education* (England) (Vol. 1: pp. 15–18). London: HMSO.

[3] De Lange, J. (2006). Mathematical literacy for living from OECD-PISA perspective. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, 25, 13-35.

[4] Gates, P., & Vistro-Yu, C. P. (2003). Is mathematics for all?. In *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 31-73). Springer, Dordrecht.

[5] Guillaume, A. M., & Kirtman, L. (2010). Mathematics stories: Preservice teachers' images and experiences as learners of mathematics. *Issues in Teacher Education*, 19(1), 121-143.

[6] Keitel, C., & Kilpatrick, J. (2005). Mathematics education and common sense. In *Meaning in Mathematics Education* (pp. 105-128). Springer, New York.

[7] Law, H.Y. (2021). Humanising mathematics education through authentic assessment: The story of Sarah. In *Authentic Assessment and Evaluation Approaches and Practices in a Digital Era: A Kaleidoscope of Perspectives* (pp. 260-282). Brill, Leiden.

[8] Machaba, F. M. (2017). Pedagogical demands in mathematics and mathematical literacy: A case of mathematics and mathematical literacy teachers and facilitators. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(1), 95-108.

[9] Moscovici, S. (1981). On social representations. Social Cognition: *Perspectives on Everyday Understanding*, 8(12), 181-209.

[10] Newman, T. (2008). *A Review of Digital Literacy in 3–6 year olds: Evidence, Developmental Models, and Recommendations*. London: Becta.

[11] Organisation for Economic Co-operation and Development. (1999). *Measuring Student Knowledge and Skills: A New Framework for Assessment*. OECD Publishing.

[12] Organisation for Economic Co-operation and Development. (2000). *Literacy in the Information Age: Final Report of the International Adult Literacy Survey*. OECD Publishing.

[13] Steen, L. A. (Ed.). (2001). *Mathematics and democracy: The case for quantitative literacy*. NCED.

[14] UNESCO Institute for Statistics. (2013). *Adult and Youth Literacy: National, Regional and Global Trends, 1985–2015*. Montreal: UNESCO Institute for Statistics.

[15] Venkat, H. (2007). Mathematical literacy -- mathematics and/or literacy: what is being sought?. *Pythagoras*, 66, 76-84.

2. 從一個簡單的算術遊戲說起

陳葉祥

香港中文大學課程與教學學系

引言

在剛修訂的小學數學課程，每年級均預留 10 小時作為「探索與研究」，讓學生「通過不同的學習活動，發現及建構知識，進一步提高探索、溝通、思考和形成數學概念的能力」（課程發展議會，2017，頁 15）。老師除可選取課程文件內的增潤課題設計學習活動，也可以透過一些簡單的數學遊戲進行數學討論，從而幫助學生深化及建構數學概念。這篇文章會以一個算術遊戲作為例子。

算術遊戲

多年前，筆者從書本得知以下的遊戲。[1] 同學只需懂得「18 以內的加法」，已經可以玩這個遊戲。首先，學生自選五個由 2 至 18 的數字（可選相同的數字）。然後，老師會擲兩顆九面公平的骰子（數字由 1 至 9）。若學生所選的數字中有這兩顆骰子的點數的和，便算猜中了這個數字。最先能猜

[1] 由於當時沒有記下出處，筆者已無法確定是哪一本書。

中五個數字的同學便算勝出。[2] 這個遊戲有不少數學討論的機會。

數學討論

雖然筆者不是小學老師,沒法得知小學生玩這個遊戲及討論的情況。不過,筆者通常在我任教的「小學數學教學法」的課堂上與準小學數學老師玩這個遊戲,並進行數學討論。當玩完這個遊戲之後,筆者會問同學選了甚麼數字及這樣選擇的原因。以下是同學通常提出的原因。

- 我的幸運號碼(或「生日日期」、「隨便選」之類)
- 選取命中機會似乎多一些的數字
- 選擇中間的數字
- 太大或太細的數字通常會少點機會命中(例如:只有 1+1 的和是 2;只有 9+9 的和是 18。)
- 雙數的命中機會似乎多一些

選擇幸運號碼的方法,看似沒有深思熟慮。不過,我估計不少人開始玩這個遊戲的時候,也是隨便選幾個數字。(若果玩家是小學生,我估計絕大多數最初都是以這方法選擇數

[2] 「五」只是一個隨意的數目,目的是要決定遊戲完結的時間。老師亦可限定投擲骰子的次數,以猜中得最多號碼的同學為勝出者。

字。）其實，隨便選幾個數字說明了事情的「隨機性」（不確定性）。這是「數學」與「統計/概率」本質上不同之處。前者是講求精確地描述現象，後者是一種預測不確定的事情的方法。不過，事情不一定按照預測而發生。（換句話說，玩這個遊戲仍需要靠運氣。）

為了盡可能獲得勝利，玩家會思考是否每一個數字都有相同的命中機會呢？（若玩家是小學生，老師可能需要適當地作出提問，以引導學生思考。）這就成為討論數學的切入點。

我們會嘗試找出哪些數字命中的機會較大。對某些人來講，他們未必真的做精確的計算，而是憑一些直觀的猜想。他們會先計算一些較極端的數字。例如：1+1＝2, 9+9＝18。以上分別是唯一使得 2 及 18 命中的情況。他們可能會繼續計算：1+2 = 3; 2+1 = 3; 9+8 =17; 8+9 = 17; 1+3=4; 2+2=4; 3+1=4; 9+7=16; 8+8=16; 7+9=16 …。從這些計算不難得到以下的猜想：「太大或太細的數字命中的機會較少」；或者「中間的數字命中的機會較大」。很有趣的是，即使得出這樣的猜想，我的學生也甚少只選最中間那個數字。他們通常會偏向選擇相對中間位置的幾個數字，有些也同時會選擇一、兩個較大或較小的數字。（看來他們頗明白事情的「隨機性」（不確定性）！）

有趣的是：我的學生中，有些會從單數或雙數的角度去思考這個問題。（可能由於我的課堂是「小學數學教學法」。我的學生嘗試找一些初小生能認識的概念入手做這問題。）他們這樣分析：兩個雙數相加得到雙數；兩個單數相加也得到雙數；只有當一個單數加一個雙數時，才會得到單數。因此，雙數命中的機會多一些。雖然這個分析存在漏洞，但它卻是很好的機會，讓學生進一步思考。

進一步的數學討論

我們可以引導學生思考以下兩個問題：

1. 如何更嚴謹地論證「中間的數字命中的機會較大」？
2. 是否「雙數命中的機會多一些」？

當然，以上的問題是屬於概率問題。只需要有中學程度的概率知識，找出上面的問題的答案並不困難。不過，若果玩家是小學生（或準小學老師），我們就要問：能否用小學生能夠明白的方法來解答上面的問題？

首先，這問題的重點就是要找出所有分別由兩個 1 到 9 的數字加起來的和。這裡涉及 81 個加數式，如何有系統地把它們一一列出，並且能容易看到其中的規律？

何不畫個表？

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

只要稍為填寫幾行，應該就不難看到規律。[3]對角線是 10，是 2 到 18 最「中間」的數字，也是表中出現最多的數字；

[3] 若果是小學的課堂，老師則宜按照學生的年級、數學能力及實際情況，與學生一起填完整個「加法表」（也可順便溫習各 18 以內的加數）。為了節省時間，老師也可考慮預先製作一張完整的「加法表」，以便在適當時候展示。

接著 9 和 11，各自在對角線旁，出現次數各自比對角線 10 的次數少 1。如此類推。沿這個思路，不難解釋為何「中間的數字命中的機會較大」而且「太大或太細的數字命中的機會較少」。事實上，我們有比這更精確的描述。

我們可以利用上表，以逐個數的方法，把各個數字（和）出現的頻率列出來。

和	出現頻數
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	7
9	8
10	9
11	8
12	7
13	6
14	5
15	4
16	3
17	2
18	1

若果把上表的「出現頻數」各自除以 81（即有多少條加數式），那就是在這些加數式中佔多少條的和是這個數字的比率。若果以中學課程內的概率術語，就是「這個數字是骰子出現的兩個點數的和」的理論概率，又即係它的命中率。當然，不一定要引入這些數學專門用語也可以讓學生明白這些內容。這個例子正好說明如何向未有正式的概率知識作預備知識（例如：小學生），仍可清楚解釋這個問題。事實上，這個遊戲是可以作為非正式介紹概率。

至於單數抑或雙數的命中機會多一些？對於具有中學數學知識的人，這是標準的概率問題。不過，如何簡易地向小學生解釋這個問題的答案呢？（請讀者暫停閱讀，自行思考一下。）

利用「加法表」（即第一個表），不難得到以下的結論。

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	雙/單較多？	相差幾多？
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	雙	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	單	1
3										雙	1
4										單	1
5										雙	1
6										單	1
7										雙	1
8										單	1
9										雙	1

因此，我們得出的結論是：和是雙數的加數式的確比和是單數的加數式為多。不過，它們只是相差 1。換句話說，雙數的命中機會和單數的命中機會其實是差不多。因此，以雙數命中的機會似乎多一些為理由，而偏向選取雙數，其推理並不正確。

以上的討論，旨在說明：我們是可以透過簡單的數學遊戲，向學生討論一些頗為深入的數學內容。這些內容甚至有可能超越該年級的課程要求。（只要老師避開一些不必要的術語，並運用較具體及顯淺的方式來表達。）在討論的過程中，我們是讓學生真正做數學（doing mathematics），就是先做猜想再進行論證，亦即是 Polya（1954）提倡的「合情推理」（plausible reasoning）。

其他類似的遊戲

上面的遊戲，當然不一定限制於「18 以內的加法」。視乎教學的進度，可以改為：若學生所選的數字包含兩顆骰子的點數的差（大的點數減小的點數），便算中了這個號碼。若果適當地調節，也可以改為與乘法或除法相關的遊戲。留待讀者思考遊戲的細節及相關的數學內容。

最後，筆者介紹另一個關於乘法的遊戲。這遊戲選自：林碧珍、蔡寶桂（2014）。首先，老師預備以下的數字卡備用：

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 56, 60, 63, 70, 72, 80, 90。

每位學生有一張遊戲紙，如下。

x					

老師抽出一張數字卡。學生選取兩個 1 至 10 的數字（只可用一次），其相乘的積是老師抽出的卡上的數字；然後，在遊戲紙的白色格上填上數字卡上的數字及把選取的兩個因子分別填入適當的灰色格上。遊戲按這方法繼續。當學生把 1 至 10 全部數字都填入十個灰色格，並最快能把填入數字的白色格連成一直線則為勝利。（下圖是一個例子。）

x	4	8	3	5	9
1		8	3		
6			18		
10			30	50	
7	28		21		63
2			6		

這遊戲需要的數學知識不多，基本上懂得基本乘法已可以，它也可幫助學生記熟乘法表。不過，若要較大機會取勝，則需要較深入的數學思考。因此，它是另一個可以引發數學討論的遊戲。

最直接的問題是：為甚麼數字卡上是這些數字？（這問題不難回答。）進一步的問題是：如何決定選哪兩個數字（抽到的數字的兩個因子）？如何決定把抽到的數字放在哪一個格子？這些問題可以涉及很豐富的數學討論，其中包括：一個數字有多少個不同因子？質數與合成數的處理方法有甚麼分別？林碧珍、蔡寶桂（2014）有很詳細的討論。

結語

以遊戲作引子，再作數學討論，可以說是培養學生解難（problem solving）及論證（reasoning）能力的好方法。重點是遊戲本身需要足夠簡單及容易理解，討論的問題要具有開放性，老師也需要夠彈性，容讓學生發表他們的看法，並順應學生的思路來發展討論。著名數學教育家 Jo Boaler 就提倡透過「低起點高終點」的學習任教（Low-floor High ceiling Tasks）來讓班中每一位學生都投入數學課堂（Boaler, Muson & Williams, 2017）[4]。筆者認為本文介紹的「從遊戲進入數學討論」也算是這類型的學習任務。

[4] Jo Boaler 及她的團隊為 K-8 年級（即幼稚園至初中）設計很多「低起點高終點」的學習任教（Low-floor High ceiling Tasks）。有興趣的讀者，可以瀏覽 https://www.youcubed.org/ 及 Jo Boaler, Jen Munson & Cathy Williams 編寫（Jossey-Bass 出版）的 *Mindset mathematics: Visualizing and integrating big ideas* 系列（由 Grade K 至 Grade 8，一級一冊）。

參考資料

[1] 林碧珍、蔡寶桂（2014）。《數學魔術與遊戲設計》台北：書泉出版社。

[2] 課程發展議會（2017）。《數學教育學習領域課程指引補充文件：小學數學科學習內容》。香港：課程發展議會。

[3] Boaler, J., Muson, J., & Williams, C. (2017). Introduction. In J. Boaler, J. Munson, & C. Williams. Mindset mathematics: Visualizing and integrating big ideas (Grade 4) (pp. 1-15). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

[4] Polya, G. (1954). Mathematics and Plausible Reasoning Volume I: Induction and Analogy in Mathematics. Princeton, NJ: Princeton University Press.

[5] Polya, G. (1954). Mathematics and Plausible Reasoning Volume II: Patterns of Plausible Inference. Princeton, NJ: Princeton University Press.

3. 小學低年級利用數學繪本進行教學的實踐與反思

蔡怡華

筲箕灣官立小學

張僑平

香港教育大學數學與資訊科技學系

一、引言

當學生從幼稚園升上小學，往往面對學習方式上的巨大轉變。不同於過往幼稚園主題式或遊戲化的學習模式，他們需要適應小學的分科學習，按照教科書或校本課程的內容編排進行學習。做好幼稚園到小學的銜接，是每一間小學都要面對的難題。香港課程發展議會（2017 a）提出，幼小銜接的教學策略應以遊戲和活動形式進行，當中以講故事為例子，建議小學教師配合小一學生的學習特徵以幫助幼兒了解學習內容（頁 72）。這一教學建議一方面是考慮到初小學生的學習特點，另一方面也兼顧到學生過往在幼稚園的學習經歷，希望做到銜接和過渡。然而，對數學科而言，利用故事在數學課堂上施教常規課程，是否真的可行呢？這樣的課堂會否變成講故事而學不到數學呢？相信不少教師可能都會有這樣的疑問。

最近，新修訂的數學課程指引（課程發展議會，2017b）提出，「鼓勵學校在推動『從閱讀中學習』的成果上進一步推

動學生閱讀主題與數學相關的文本，以拓闊學生的知識基礎、提升他們的語文能力和處理包含文字、圖表、數學符號和多模式元素（即聲音、圖像、影片）的閱讀材料的能力。」（頁 48）由此看來，在學校數學課程中引入故事文本進行數學閱讀並非不可。如果我們認為數學也是一門語言，理解數學的概念真正需要在一定處境中進行溝通和交流。從這個意義上來說，在課堂上融入數學故事或者數學閱讀的內容，未嘗不是可行的教學方式，或能協助初小學生銜接小學數學常規課程，促進他們對數學知識的理解。

帶著這樣的想法，我校數學科組決定嘗試在低小年級實行數學繪本的教學實驗。然而，只是有想法還遠不足夠。繪本作為一種兒童文學，深受小朋友的喜愛。依據其圖畫和文字的搭配比例不同，有時也稱為圖畫書或者故事書。儘管教師對繪本不陌生，但對數學繪本還不熟悉。而且，數學科的課程內容涉及到不同學習領域，當中的數學知識和概念眾多，「甚麼課題有適合用故事的方式演繹呢？」、「如何找合適的數學繪本故事？又如何教？」、「常規課時已緊湊，繪本教學應該怎麼安排，會影響考試的常規考核範圍嗎？」這些疑問不斷在我們腦海中湧現。在內心抱著擔心、不安的同時，我們亦懷著對「繪本教數學」躍躍欲試的心態開展這個教學試驗計劃。畢竟是初次嘗試，我們的教學實踐在很多方面定會存在不足，但希望我們的教學實踐歷程以及反思，能夠給

更多的前線同工帶來一些教學啟示，也為有興趣進行繪本教學的教師提供一些經驗。

二、數學繪本教學計畫

因為 2020 年新冠疫情的關係，學生均缺少面授課堂的學習經歷。經過科組老師一起商議，決定是次教學計劃選取在小二試行，主要因為他們是初小階段，同時他們有一年的小學學習經歷。我校小二全級共有四班，每一班學生數學能力是平均分佈。四位科任教師均參與了是次計劃。在檢索校內圖書資源後，我們發現能與二年級數學課題配合的數學繪本選材有限，結合學校課程的整體進度，最終決定採用與數據處理範疇相關的繪本《蜘蛛和糖果店》來教授「象形圖」這一課題。

《蜘蛛和糖果店》講述的是糖果店中的小蜘蛛協助店主人記錄不同顧客所購買糖果的種類及數量，從而推測糖果的銷量，是一本與數據處理相關的數學繪本。故事中涉及的紀錄數據方法與二年級課程中象形圖的學習內容貼合，而象形圖整個單元的教學節數在學校課程中較短，課時只佔約 5 個教節，對下學期學習內容的影響會較少，故此科任教師一致同意以上選材與課題。《蜘蛛和糖果店》的故事內容及數學概念頗多，因此教師在籌備教學時，計畫對原著進行大幅度的編輯，借故事人物作故事背景，設計校本的數學繪本小冊子，從中帶出數據處理範疇中象形圖的教學要點。經過科任

教師之間的共備討論，整個單元教學共有三節，教案格式如下表（表 1）：

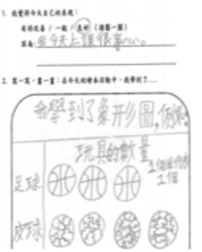
表 1. 繪本教學教案樣例

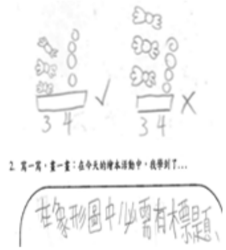
<table>
<tr><td colspan="2">日期:__/04/2021</td><td>班別: 2___</td><td>題目: 單元九</td></tr>
<tr><td colspan="2">人數:___</td><td>時間:</td><td>節數:第___節 （共三節）</td></tr>
<tr><td>教學目標</td><td colspan="2">● ___________________
● ___________________</td><td>繪本圖書名稱:《蜘蛛和糖果店》</td></tr>
<tr><td colspan="3">繪本內容</td><td>教學流程</td></tr>
<tr><td colspan="3">P.__ 繪本小冊子
P.___ 繪本小冊子
P.__ 繪本小冊子
P.___ 繪本小冊子</td><td>繪本導讀 （25 分鐘）
●
●</td></tr>
<tr><td colspan="4">繪本延伸活動 （10 分鐘）</td></tr>
</table>

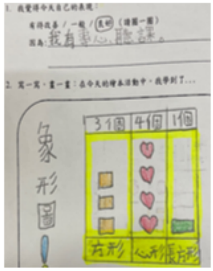
在課堂教學中，學生除了使用校本設計的數學繪本小冊子進行學習活動外，亦有一本「我的數學學習日記」，方便以文字或畫圖的方式來表達想法及記錄每節所學。這樣的設計也有助於教師跟進二年班學生的學習進度，做到形成性的學習評估。以下圖（圖 1）展示了學生每節課上的部分學習成果：

圖 1. 學生在「我的數學學習日記」中的學習成果

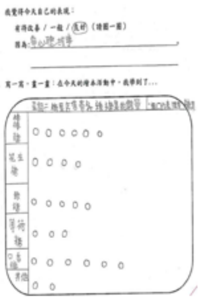
第一節教學目標：認識象形圖及能闡釋象形圖

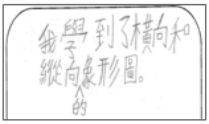


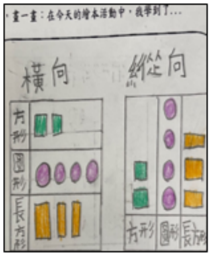




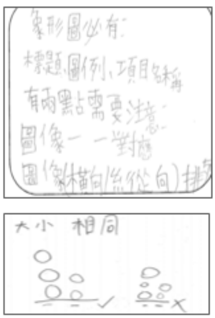
第二節教學目標：認識及能闡釋縱向及橫向象形圖







第三節教學目標：製作象形圖



三、繪本教學的教學反思

3.1 繪本教學的優點

作為一種數學教學的工具,數學繪本可以銜接正式與非正式的幼兒數學教學、引發學生的學習動機和聯結數學學習（Skoumpourdi & Mpakopoulou, 2011）。陳埩淑（2020）在分析不同研究者針對數學繪本的研究發現後,具體總結了數學繪本在幼兒數學學習中的四種功能：（1）引導與增加數學學習機會；（2）提供支持性的學習情境；（3）擴展數學知識內容；及（4）提升數學學習能力和正向的數學態度。在是次二年級的數學繪本教學計畫中,我們也發現透過繪本故事能提升學生的學習興趣,他們的學習態度表現投入及專注。在教授象形圖課題的一個星期裡，學生在課堂內外會主動提及繪本中的角色，課堂學習氣氛和回饋質素亦得到提升。借助數學繪本故事,師生及生生能在課堂上產生基於情境的互動交流。不少學生也表示喜歡老師說故事扮演當中的角色。

另外,從學生每天的學習日記中，我們看到學生在逐步建構所學的知識：在第一天，他們畫了一些大小不一的象形圖，他們大概知道象形圖是以圖形去表示數量的統計知識;第二天,他們畫了橫向的象形圖,可以看到他們已建立大小一致、一一對應的概念,並能用簡化的圖例去表示數據;至第三天,已有同學能自己建立象形圖。雖然學生撰寫或者繪畫的日誌中可能還有些錯漏，但是對二年班同學來說，他們能在一個

空白的方格來建構一個新的象形圖，已是非常不錯的表現。把學習的主動交給學生，讓學生做學習的主人，正是需要我們重視和尊重學生的自我創作！無論是課堂學習，還是學習日誌，教師都可以觀察到學生們對學習積極投入和對所學內容的濃厚興趣。他們也能牢記住每節重點，有效掌握象形圖的數學概念。四位任教教師均認同，在教授象形圖課題時，利用數學繪本教學比以往恆常以課本直接教學，能提供更全面、有趣情境，把數學原理與日常生活連繫得更自然，把學習象形圖這課題變得更生活化，也幫助學生容易理解為何需要及如何作數據處理，比如甚麼數據信息是重要的，為何要記錄數據，以及如何統計數據等。此外，教師也發現繪本能讓學生在同一主題下研究象形圖，解答一些開放性的問題，對問題情境有更深入的了解。學生的數學思維和推理能力也得到發展。

3.2 繪本教學實施中所遇到的困難

畢竟是初步的嘗試，在教學計劃籌備及課堂施教時，我們也遇到不少的困難，這些經驗也為今後再次規劃提供不少借鑑。在下表 2 中，我們列出任教教師在是次教學計畫中面對的狀況及困難：

表 2. 數學繪本教學中的困難和可能的應對策略

遇到的困難/情況	可能對應的解決方法
（一）教師工作量增加	• 尋求校內人手資源 • 預早安排工作
（二）教授額外的繪本教材致教時不足	• 適當的課程剪裁，省卻或濃縮教授課本上的內容
（三）演繹故事需技巧	• 預先錄製故事音檔
（四）偏重數學教學，忽略故事性，容易偏離故事情節	• 在備課會議上要加強討論 • 安排同儕觀課

困難一：繪本選材與籌備，讓教師工作量增加

為了保留故事的設計及聚焦教學內容，教師在籌備校本繪本小冊子上花了不少功夫，例如重組學習內容、編輯繪本的內容、圖片及製作校本繪本小冊子。經大幅度的編輯後，繪本內容及情節比較濃縮，需要教師在施教時潤飾故事情節、增加趣味。當然，在恆常教學中，教師同樣需要解讀教材內容，以方便學生理解。但對繪本故事的解讀，對於習慣教科書的教師來說，一開始經驗會顯不足。因此，教師若是初次涉獵繪本教學，繪本的選材尤其重要。倘若坊間有繪本已跟各年級及課程配對、有大學的教師培訓或課研計劃能提供或介紹與課題相關的繪本故事、友校分享繪本教學經驗及教學資源等，便可大大增加教師選材的空間，減省編修的工作量，從

而有助教師推進繪本教學工作。學校層面如能協助繪本教學的教師對校本資料的編輯提供協助，如資料輸入、排版及圖片美化等工作，會更有助教師推廣不同學習主題下的繪本教學，以及採納於恆常的課堂中。

困難二：配合學校課程，教時不足

因疫情的關係，學校只有半天上課日，在教節減少但不減教學內容及考核範圍的情況下，每一位教師的課時變得相當緊湊。我校的繪本教學計劃加插在原定的教學進度中，結果導致教時不足。日後恢復全日授課，或能緩解課時的壓力。在校本課程層面，教師也可以考慮作適當的課程內容剪裁，如省卻或濃縮教授原定課本上的內容，替換成繪本教學中的學習內容，減少及避免教授課本上重複的內容及練習。

困難三：演繹故事需技巧

是次參與教學的教師都沒有繪本教學的經驗，當中有教師表示未曾有向初小學生說故事的經驗、未能適應要模仿、角色扮演及聲音轉換等說故事技巧，令教學時感到困難。亦有教師提出疑問，應該以口語還是利用書面語去演繹繪本故事。這些正是在學校實施和推廣繪本教學需要面對的現實。儘管我們常說，授課本身就像講故事，然而考慮到每位教師都有個人特質及不同的長處，演繹故事的技巧需要時間鍛煉。因此，我們可善用人力資源，邀請校內說故事生動有趣的同工，幫忙預先錄製繪本故事音檔。這不但減少了施教教師的心理

負擔，能令教師更專注於內容的教授和學生之間的互動，同時也穩定了整個團隊在繪本教學的質素及一致性。另外，預先錄製的做法亦方便製作成電子版的繪本資料，讓學生自己翻閱及聆聽故事內容。

困難四：把握故事線和數學線，確定課堂教學重心

透過同儕觀課，我們發現有教師在教學時，儘管以繪本故事開始引入，教學重心卻未能持續保持以故事線作發展。到課堂中段，教學往往變為主要強調數學相關的重點知識和有少量審題的指導等。教師的教學從故事線改以數學線為主軸，欠缺緊扣繪本故事情節的發展，顯得脫離了以繪本內容為中心。這時，我們也看到學生的投入感未能延續，繪本故事在課堂中變得有些斷斷續續，以致未能達到繪本教學要帶出的教學目的。因此，數學繪本教學需要平衡故事線及數學線的雙線發展，讓兩者在課堂上同步延伸，彼此貫穿整個課堂的進程。顯然這對任教教師是有一定要求的，需要同時熟悉繪本內容和課程的教學重點。因此，在共同備課會議上，科組教師之間要加強討論故事線及數學線如何平衡發展，教案設計上如何做好內容的銜接等。同時，科任教師可透過同儕觀課，彼此提點，不斷改善教學模式及技巧。

四、結語

正如前面所提及，是次繪本教學計劃對任教的教師帶來不少的挑戰與困難。正因為了解到數學繪本和繪本教學的優點，

我們願意做出這樣的嘗試以優化教學。特別是在課堂上，我們觀察到學生專注又積極的學習態度，連一些往日學習動機低的學生亦能專注上課、在課業上呈現理想的學習成果，更令我們認同是次繪本教學為學生帶來正面的果效。教育理論和教學實踐之間從來都存在差距，數學繪本的優點也並不一定適用於所有的學生。繪本教學對學生的數學學習在哪些方面帶來怎樣的影響，還需要進行更多的實證研究。本文介紹的這段教學歷程，不僅能為我校來年進一步優化繪本教學計劃提供不少新的啟示，也希望能給其他同工提供借鑑和參考。

參考文獻

[1] 陳埩淑（2020）。幼兒數學繪本。載於楊凱琳、左台益（編著）。閱讀數學：文本、理解與教學（頁 3-23）。台北：元照出版有限公司。

[2] 課程發展議會（2017a）。幼稚園教育課程指引—遊戲學習好開始　均衡發展樂成長。香港：課程發展議會。https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/major-level-of-edu/preprimary/TC_KGECG_2017.pdf

[3] 課程發展議會（2017b）。數學教育學領域課程指引（小一至中六）。香港：政府印務局。

[4] Skoumpourdi, C. & Mpakopoulou, I. (2011). The prints: A picture book for pre-formal geometry. Early Childhood Education Journal. 39, 197-206.

4. 一則教學故事劃出之迴轉

梁淑坤

數學教育工作者

筆者是大學教師，首次和小朋友上課，是千禧年，由香港中文大學教師安排一年級的「比多少？」，經過那一次特別的安排，發現借班教學有不少收穫(梁淑坤，2013)。另外，筆者也有不少次是因為參觀實習教師而擔任一位觀課者。無論其中角色扮演教學者或是參觀者，回顧現場時勾起不少親身經驗，教學及觀課真是一個不容錯過的學習機會。首先提及角色扮演，教學參觀是一個活教室，它提供不同角色人物不同方面的學習機會，無論是教學者及團隊在準備上課前、上課中及下課後的三階段，參觀者在現場的收穫和教學者及參觀者課後研討。其次也要注意參觀者與教學者的關係，更要妥善利用此參觀達到參訪的目的及功能。下列是筆者回憶過去的自身經驗的一則故事，討論故事背後的成因以及可能帶來的潛在學習機會以及專業成長。這案例是在小學教室，由筆者擔任教學者、教師及準教師是觀課者，兩者關係為共同學習者。由於故事發生在往香港時客串小學老師，只能說這是個人觀點，不代表其他故事人物的看法。

下課後不是教學的結束，對教學者而言，是反省的開始，而與同儕於下課後的討論或上課日誌分享均能為教學參觀劃下一個休止符。第一節課是五年級的「值日生擦走甚麼題

目」。非常感謝幫忙錄影的同仁，錄影帶給筆者美麗的回憶也協助反省。

教學故事一：值日生擦走甚麼題目？

(一) 課程內容：代數(五年級)

文字題-方程式-解方程-答題為教材的順序，(方程式、整數、只有一步驟)。例如：文字題為「班上有 40 人，分 5 人一組，可以分多少組？」學生閱讀完文字題後使用 x 為未知數，形成「$5x=40$」方程式，之後解方程用等量原理把左右同時除以 5 形成 $x=8$。但因為是文字題，寫成 $x=8$ 仍然不是最後步驟，要回歸到文字題內容，x 是代表多少組的未知數，所以答案會是「8 組」而不是「8」。

(二) 設計理念：

這一次的課程設計，是考驗同學能否判斷方程背後可能代表甚麼文字題，是一個反向思考的挑戰。教學者在黑板寫上 $5x = 40$；$x = 8$ 引起台下同學注意，說值日生已擦掉的問題(文字題)，請學生猜原題。

課前的準備：先理解乘除法文字的種類，例如，「倍數問題」只問及多少倍，題目內容只提及同一量的單位而已。至於「量數同構」題目，提到兩種不同量搭上關係。最後，「叉積型」是有同兩位乘積交叉相乘，產出一個新的單位。這個文字題部份很重要，當現場學生發表種類不多時，教學者就

要想辦法引導出，使全班同學接觸多種乘除法文字題的種類。教學者要特別注意的是，文字題的語意，以及文字題的「5」、「x」、「40」和在文字題代表的意義。若教學者匆匆帶過，忽略語意，只會一味的解方程而不理解題意。

(三) 上課故事：

梁老師在台上引起動機方面，教師先在黑板畫上一個框，說值日生擦掉數學題引起台下同學的好奇心。然後，她請同學猜梁老師出甚麼考題(即：框內寫甚麼？)有提示，框下面寫上 $5x = 40$；$x = 40 \div 5$；$x = 8$。於是，二人一組擔任老師出一個數學題目。經過一番討論後，梁老師發工作紙，同學手抄文字題再交給梁老師。為了怕同學難過，梁老師說：「因為時間有限等一下只選一部份分享，沒有被選出的勿失望。」至於同學在台下猜題的結果，先想像一下再看下面。

1. 一盒巧克力有 5 粒，現在有 x 盒，全部共有 40 粒，問共有多少盒？ (量數同構)

梁老師手比「5」眼看台下問：「這個 5 是甚麼？」大家回：5 粒巧克力。之後，又問「x 是甚麼？」答是「盒」，最後手比「40」，問：「40 是代表甚麼？」同學說：「全部有多少粒？」。之後，梁老師又找出其它同學交出來的作品，請台下逐一口頭報告題目，一共五題，其餘的四題如下。

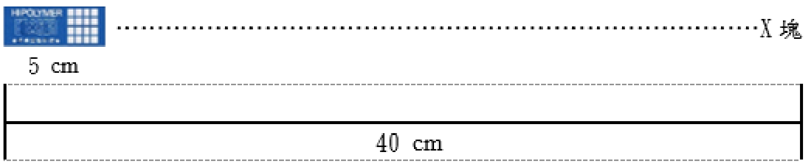
2. 班上 40 人，分 5 組，一組有 x 人，請問 x 是多少？(等分除)
3. 1 顆蘋果 5 元，x 顆蘋果共 40 元，問有多少顆蘋果？(量數同構)
4. 我有 x 元，哥哥的錢是我的 5 倍，哥哥有 40 元，我有多少元？ (倍數問題)
5. 我們班有 40 人，5 個人一組，分 x 組，x 是多少？ (包含除)

在其餘的四道題目(上述 2.至 4.)，台上梁老師有刻意檢查，每次台下報告完題目後，她手比黑板的 「5」、「x」、「40」問台下是甚麼？(巧克力？盒？人？組？；個？元？等等……)。這個動作她不省略，很有耐心，和第一道題目的問法一樣。在趕進度的教學文化下，這一個步驟，常被老師忽略。梁老師不嫌麻煩，在台上或報告上不停重覆地問及數字跟符號代表甚麼，使學生加深理解代數的意義，例如：第三題，5 代表的是 5 元，一顆蘋果的價錢，x 代表的是 x 顆，x 顆甚麼呢？x 顆蘋果，40 代表的是 40 元，40 元是 x 顆蘋果的價錢。

(四) 下課前之小挑戰：

預期的三種題目(倍數、量數同構、叉積)只出現前二種，以上五題均不是叉積題，梁老師想引導大家想出一個面積問題，她走向黑板加一行為「答：8 cm」大聲說：「如果回答的同學寫上 8 cm，請問你再猜一下這文字題？這個題目會是甚麼？」她希望同學會出題為長方形的長、寬及面積。

嘩！相當精彩，大家交頭接耳地討論，終於有人舉手了，開心的梁老師以為是面積問題出來了，可是，台下小朋友的問題不是面積題而是長度題。「橡皮擦一塊 5cm 長，有 x 塊接在一起，連起來一共是 40 cm 長」梁老師聽到了沒有失望，也沒有把題目改為面積，她走向黑板，飛快地畫出一塊橡皮擦及多塊連接起來的圖。



誇張的皺著眉頭的她，問：「咦，x 是甚麼？」

台下不滿意地回：「x 塊，不是要 x cm 嗎？」

梁老師得到了想要的反應很高興，學生說出道理比老師指正的好，因此，她要求大家把題目修改，結果如下：

「一塊橡皮擦 x cm 長，把 5 塊接起來長度是 40 cm，請問橡皮擦一塊有多長？」計算過程配合，真的會修改，梁師說：「我們班很棒！」很好，今天的主題是代數，「x」代表甚麼？立方程式後解題，x=8 又代表甚麼？到回答時 x＝8 cm 又代表甚麼？在梁老師這一節課的刻意安排，小朋友在這一節課的時候自己思考，和小組同伴討論，在全班同學面前報告以及和台上老師互動。看著黑板的 $5x = 40$ 多次，眼睛注意到的「5」、「x」、「40」又會是代表甚麼，理解原來不簡單的方程及代數。

終於時間到了，下課鐘聲響起，這一節課到此為止，面積題「長方形的邊長 5 cm，寬 x cm，面積是 40 cm^2，寬是幾公分？」，就只好在下一節課再引導，或由老師說：「假如你的同學想出此題，你認為可以嗎？」，令乘除法文字題三種類型可以有完整的呈現。

對教學者的建議：

教學故事(teaching story)是教學法，也是研究手法(Chapman, 1999)。撰寫人先於現場紀錄或回顧自己的教學寫一份札記，再因應不同功能改寫為不同的故事。例如，筆者以家長身份往兒子的班級帶領教學遊戲後和小朋友及其它家長分享(梁淑坤，2003)，日後可以另存及改寫以便運用於：(1)數學科教材教法授課、(2)實習輔導、(3)教師成長班座談、(4)家長的通訊、(5)學生發表手冊或教室佈置。輔助教學故事的資料還有教具，教學錄影帶，教師及

學童作品及上課相片。師資培育者不妨以上課故事接合教材教法課程。至於筆者之專業成長方面，反省是回頭看昨天的自己，找出可以學習或改進的地方，加入反省為何教學會這樣進行。

筆者常用上課故事取代講義，為數學教材教法之生動教材。例如，沒有教學經驗的職前師資生，在班級經營和互動方面，也可以從影片或上課紀錄參考。雖然梁老師是大學教師，在扮演單次小學教師時，借到的班級及學生又是首次見面，有甚麼地方要注意呢？梁老師在大班級中安排二人一個小組及全班的相關活動，她在上課前先和同學建立默契。例如，說話及聲音大小方面，自言自語要很小聲甚至沒有聲音(心中盤算)，到小組討論時間時要小聲，向全班報告時需大聲誦讀，要發問之前請先舉手。至於如何知道可以發言，當舉手時老師會手指同學或老師用描述方式「戴紅色框眼鏡的女同學請說」，讓同學回答。

影片中也呈現一些上課小技巧，例如：客串老師不會走進教室就馬上說課，要先暖身，梁老師和同學先聊天。例如，她第一眼看見第一排男孩(雙胞胎)說，「你們」說「你」時看左男同學，說「們」時走向另一男同學，引起同學好開心地回「他們是雙胞胎」，全班就豎起耳朵聆聽。此外，當沒有台下舉手，她說：「昨天我上另一班，他們有舉手問問題……」，同學馬上就舉起手來了。以上的兩則故事，不只職前教師們受惠，連在職的研究所教師們也安靜的聆聽故事娓娓道來。

參考文獻

[1] Chapman, O. (1999). Reflection in mathematics: The storying approach. In Nerida Ellerton (Ed.), Mathematics Teacher Development: International Perspectives. (pp.201-216) West Perth: Meridan Press.

[2] 梁淑坤（2003）。教學故事之編寫以「爬到二十」為例, EduMath，16，31-39。

[3] 梁淑坤（2013）。一則教學故事引起的回憶。載於羅浩源、張僑平、林智中主編《漫漫教‧研路—黃毅英教授榮休紀念文集》。頁 16-30。香港：香港數學教育學會。

5. 探討小四四邊形的學與教

劉珈瑗、李東樂、麥桂英

青松侯寶垣小學

一、引言

為配合課程持續發展及改革，課程發展處自二零零一至零二學年開始推行協作研究及發展（「種籽」）計劃。在 2020/21 學年，本校四年級老師透過參與數學教育組的種籽計劃，確實讓我們獲得很多寶貴的經驗。

2020/21 年度的種籽計劃以「探索與發展在小學數學修訂課程的學與教和評估中照顧學習者多樣性的策略」為主題，本校參加種籽計劃期望協助校本課程發展、提升數學科教師的專業發展能力及提升學生的學習效能。數學教育組的課程發展主任與我們共同備課，探討教授新修訂課程的四邊形的方法。本文旨在介紹本校四年級老師在教授這課題時所用的教學方法，及學生的相關學習表現。

二、設計理念

小學數學科正推行修訂數學課程，在四年級圖形與空間範疇，修訂課程加入了四邊形之間包含關係的學習內容，例如所有正方形皆是菱形、所有長方形皆是平行四邊形等。我們選擇四邊形作為種籽計劃的探討課題，原因是在修訂課程下，學生需要懂得四邊形之間的包含關係，我們認為這個學

習重點對學生來說較難掌握。在幾何學習中，如果學生能夠理解分層包含關係，對於學生的演繹推理能力是有所幫助的(Currie & Pegg，1998)，最明顯和基礎的就是四邊形的分層包含關係。故此，我們與數學教育組課程發展主任共同商議，先認清學生在第一學習階段所學的四邊形內容及此課題的學習難點，在單元計劃設計的過程中，便能更有效掌握學習重點，對照顧學生學習多樣性有更多認識，從而制定有效的教學策略去設計活動，達致提升教學效能。

三、學習過程

四年級老師共編定了八節教授 4S1 四邊形(三)，整個學習單位的教節、學習內容及學與教活動詳見附件一。下文內容是我們在第二節教授時，所使用的教學策略（詳見附件二）。我們使用了 Classkick 網上平台，教師能即時看到學生的作答情況及進行回饋。而這種互動式的回饋方法，能有效提升學生的學習效能(Pytash,K.E.,Ferdig, R.E.,& Rasinski, T. V.，2013)。在 Classkick 網上平台上使用分層工作紙，能照顧學生的個別差異。例如：學生能以「拖拉」的形式在網上工作紙選取答案，不需要書寫文字，令書寫能力稍遜的學生亦能作答。此外，Classkick 網上平台亦使較擅於運用視覺和聽覺的學生都能得到有效的學習。學生能從 Classkick 回答問題，我們亦可透過分享功能，讓其他同學觀摩，加深學生對課題的認識。

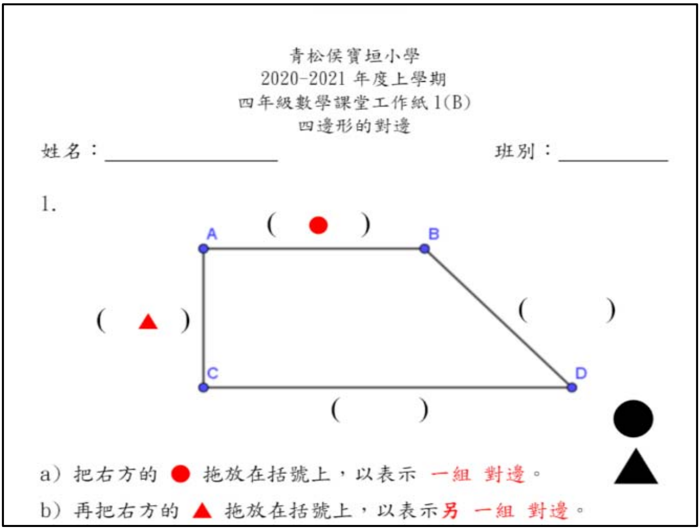

青松侯寶垣小學
2020-2021 年度上學期
四年級數學課堂工作紙 1(B)
四邊形的對邊
姓名：
班別：
1.
A
B
C
D
a）把右方的 ● 拖放在括號上，以表示 一組 對邊。
b）再把右方的 ▲ 拖放在括號上，以表示另 一組 對邊。

圖 1

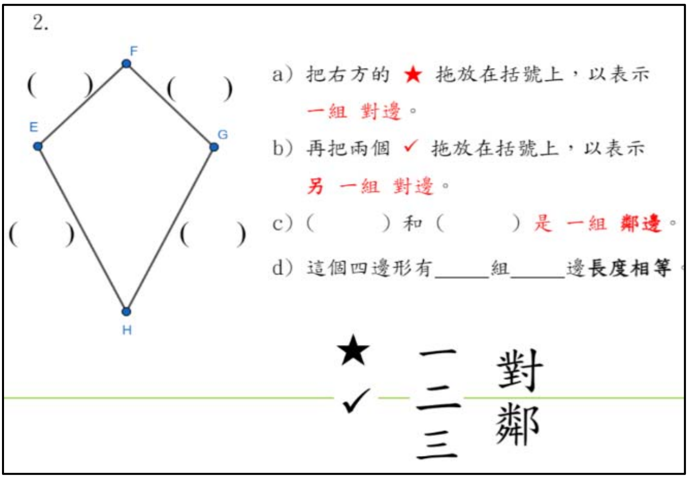

2.
F
E
G
H
a）把右方的 ★ 拖放在括號上，以表示
一組 對邊。
b）再把兩個 ✓ 拖放在括號上，以表示
另 一組 對邊。
c）（ ）和（ ）是 一組 鄰邊。
d）這個四邊形有_____組_____邊長度相等
一
二
三
對
鄰

圖 2

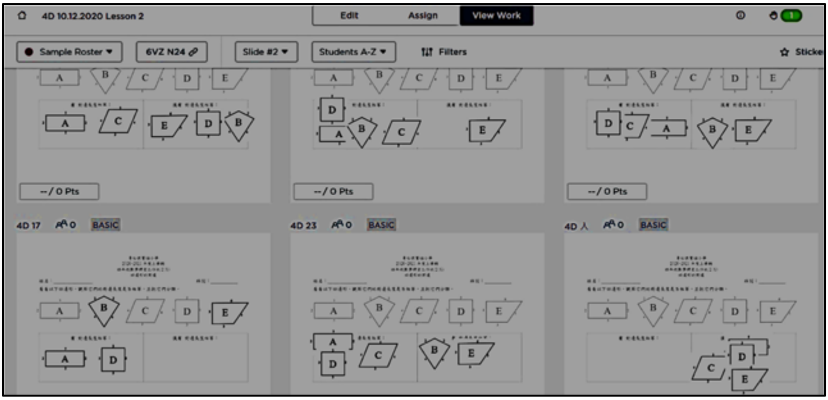


圖 3

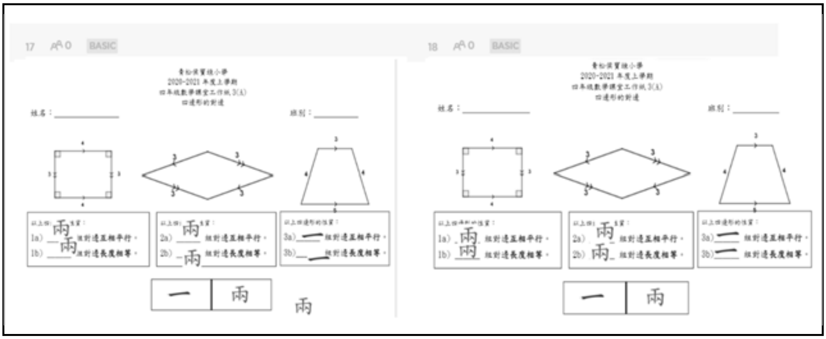


圖 4

圖 1-4：在 Classkick 平台上，學生能在相關的圖示上，以「拖拉」的形式在網上工作紙選取答案，而且老師能一覽無遺地檢視學生的作答。

我們現從以下各方面來探討學生學習上的變化：

a) 數學語言的使用

本校較高能力的學生能適當運用數學語言，例如：能以英文字母命名一組對邊或鄰邊，並能準確說出在四邊形中，一組對邊或鄰邊包括了兩條邊。由於此課題要求學生表達出準確的數學語言，因此學生對「相等」、「平行」等數學語言運用更為準確。再者，學生亦能準確運用數學語言來形容四邊形中兩條邊的關係，如「AB 的鄰邊是 BC」或「這一組對邊有 AB 及 CD」。學生亦能說出四邊形中，某兩條邊是「一組對邊/鄰邊」。

b) 對概念的理解和掌握

較高能力的學生能充份掌握對邊和鄰邊的概念，並能在四邊形的例子中找出適當的對邊或鄰邊。另外，學生也能分析每一組的對邊是否具有「長度相等」或「平行」的特性，從而找出該四邊形的特性。學生亦能將「對邊和鄰邊」與「平行和長度相等」合併處理，表達出「這四邊形有兩條互相平行的對邊。」此外，配合溫氏圖及有關四邊形的圖像教授，學生能從圖像簡單清楚地顯示有關四邊形的包含關係，因此，學生能掌握四邊形中，較抽象的包含關係。在修訂課程下，四年級學生需要學習新概念「對邊」和「鄰邊」和複習舊概念「平行」和「長度相等」，學生亦需要即時把兩種概念合而為一，才可以準確歸納出四邊形的特性。故此，部份學生

未能掌握其中一種概念，需在老師的指導下，逐漸成功理解和表達出四邊形的特性。

c) 解決問題的技巧

四年級學生使用 Classkick 網上平台進行學習，我們能更聚焦學生的學習難點，進行即時回饋。學生得到老師的回應後，便能更集中處理課堂的題目。但是，部份資訊科技能力稍遜的學生未能流暢地使用網上平台，對他們而言學習變得更困難，但同時，學生需要運用適當的資訊科技能力解決問題，使自己能參與課堂。此外，面對描述性質的四邊形題目時，學生會更多使用圖畫，瞭解題目的要求。

d) 學習態度

整體而言，四年級不同能力的學生都對 Classkick 網上平台感到興趣，他們願意完成工作紙，並對老師即時展示學生的成品感到好奇。另外，此課題集中教授學生以四邊形的特性來探討曾學習過的四邊形，這對以往他們只以直觀的方法命名四邊形更為具體和客觀，學生大多對學習這個課題感到興趣。由於學生使用電腦作答及能觀察同學的答案，讓部分學生更具信心在視像學習中說出自己的方法、進行解釋或在聊天室寫出方法幫助同學。

我們採用了以下多元化評估的方法評估學生的學習過程和成果：

四、教學實踐反思

就照顧學生多樣性上，教師在以下各方面作出改變 ：

a) 教學方法

即時回饋對學生十分重要。在以往的教學中，往往只能透過學生的學習成果（即能否正確答出題目答案）來判斷學生的學習效能。但是，這種展示學習成果的方式未必能反映學生在思考的過程。透過 Classkick 網上平台和工作紙，教師可以即時知道學生的難點，從而即時作出回饋，學生就能夠在學習過程中修正答案，不用最後一刻才得知自己的學習是否正確。

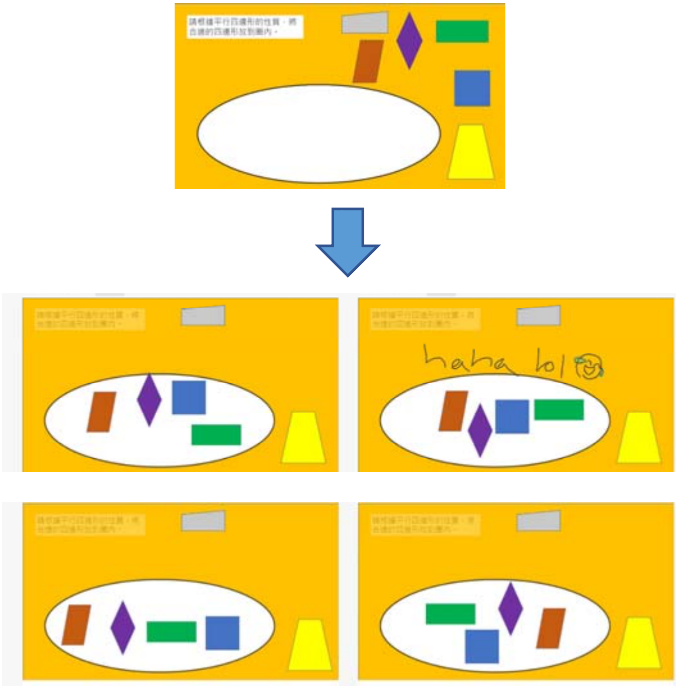


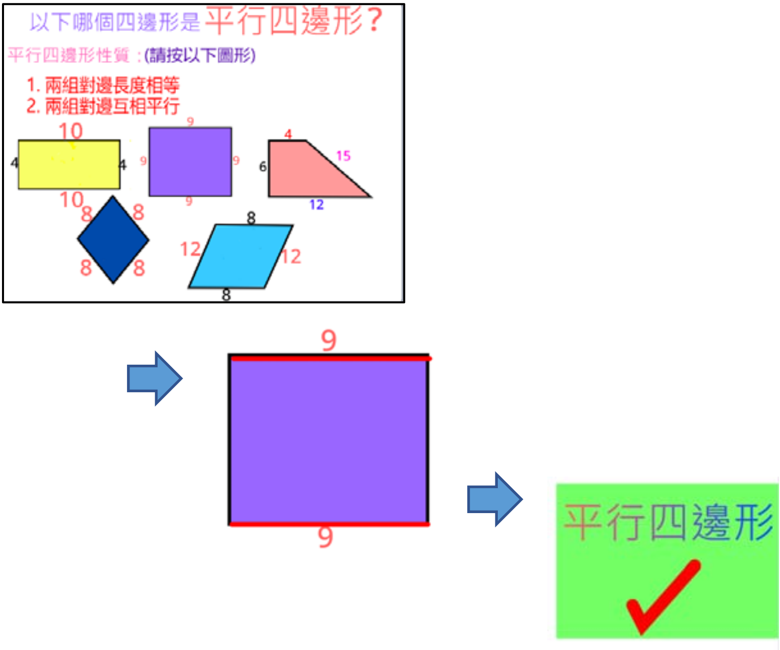
圖 5：教師利用 Classkick 平台，即堂要求學生根據平行四邊形的性質，找出所有平行四邊形，上圖為學生回饋。

b) 教學活動的設計

由於課堂以網上視像形式進行，所以教師設計活動時，需設計適合於網上進行互動的活動。網上工作紙的好處在於學生能以「拖拉」的形式選取答案，學生不需書寫文字，這能更有利於書寫能力稍遜的學生。加上，「拖拉」的方式也能更有系統地展示學生的答案。在教授分類時，老師讓學生設計有關的外星人圖案，並在上課時要求學生說出分類的原則，

令課堂的趣味增加，學生更加投入。此外，在完成整個課題後，學生可利用 Scratch 的包含關係小遊戲來鞏固所學，讓他們對學習這課題更感興趣，而且更具彈性，他們能透過重覆遊玩來分析自己的學習困難。

圖 6: 學生設計不同的外星人圖案，用作教授四邊形分類時的教材。



A. 以動畫方式提出問題。

B. 學生選擇其中一種圖形，再以動畫顯示圖形的對邊長度是否相等或平行。

C. 以音效和動畫表達答案是否正確。

D. 回到(A)部份，重新回答下一個四邊形。

圖 7：Scratch 小遊戲的演示過程

c) 評估方法的成效

在課堂評估方面，評估方法成效顯著，學生能得到教師的即時回饋，從而作出修正。透過網上平台評估，也能節省收發工作紙和教師逐一批改的時間。可是，教師在應用 Classkick 網上平台時也遇上了不少問題。例如，學生在使用平板電腦和桌上電腦的介面有所不同、學生未能成功登入工作紙、教師未能流暢使用 Classkick 等。因此，如把 Classkick 恆常化使用，讓教師和學生都更能習慣系統。

在課堂遊戲方面，利用「猜謎遊戲」(這個四邊形四邊長度相等，這四邊形是甚麼)，評估學生對四邊形性質的認識，學生都能說出四邊形的名稱。在單元評估方面，學生能準確回應有關數學詞彙的意思(那條是鄰邊對邊、正方形有甚麼性質等)，以及在釘板、方格紙或空白方格內畫出相應的四邊形。至於遊戲「四邊形 BINGO」，利用逆向邏輯，評估學生對四邊形性質的認識及包含關係 ，學生十分投入活動，亦有效評估學生對課題的認識。

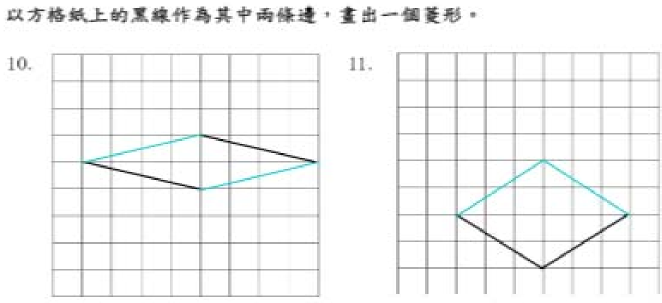


圖 8：學生利用 Classkick，在方格紙上繪畫菱形。

d) 教師所遇的困難及解決方法

第一，學生未熟習各特性，因此能力稍遜的學生需要在進行遊戲時打開書本。第二，對學習內容的誤解根深柢固，特別是四邊形的包含關係，因此在進行遊戲時，學生會在急忙下說出「正方形不屬於長方形」等結論，當學生靜心細想，才修正自己的答案。這主要歸因於學生在低年級時，主要運用自己的直觀來判斷圖形，仍未學習圖形之間的包含關係。

e) 增進校內教師專業交流

在集體備課時，教師能因應自己擅長的領域發表自己的意見和進行分工。是次計劃讓我們對新課程中強調圖形之間的包含關係(四年級)有更深的了解，教師對新課程的改變探討得更為深入，反思學生學習數學的最新發展。此外，教師在設計教學活動時，能更善用資訊科技工具，使用更多網上平台，從而更能照顧學生的不同學生的需要及提高學生學習數學的興趣。

六、總結

參與是次計劃，我們得到教育局人員的專業支援，加強同級教師之間的專業交流，集思廣益，並建立數學科的共通語言，促進教師的專業發展。在修訂課程下，教師能更認清學生不同的學習難點，在單元計劃設計的過程中，能有效掌握學習重點，從而制定有效的教學策略去設計活動，達致提升教學效能。在日後教授其他課題時，我們將嘗試更多不同的電子平台，對課堂上即時回饋及學生互動確實有莫大的幫助。

參考文獻

[1] Pytash, K. E., Ferdig, R. E., & Rasinski, T. V. (2013). Preparing teachers to teach writing using technology. ETC Press.

[2] 課程發展議會（2017）。《數學教育學習領域課程指引補充文件:小學數學科學習內容》。香港，教育局。

網上參考資料

詹凡儀(2019)不同學習階段學生在四邊形及其包含關係的認知表現論文。台灣。

https://etds.lib.ntnu.edu.tw/thesis/detail/cf23c75af7f2f6e4199c6d90b282bafe/

附件一

青松侯寶垣小學

2020/21 年度　種籽計劃　上學期　單位計劃

學習範疇:　圖形與空間

學習單位:　4S1 四邊形(三)

年級：　四年級

每節時間：　30 分鐘

教節	課題	學習內容	主要學與教活動
第 1–5 節	菱形	1. 認識菱形的概念和性質(菱形的性質包括:四邊長度相等及兩組對邊分別互相平行) 2. 繪畫和製作菱形	❖ 網上工作紙 (Classkick 平台) a) 分類活動:尋找外星人、從一組外星人中，分別根據符合的條件，把這些外星人放進適當的小屋內。 b) 尋找四邊形 c) 找出各個四邊形對邊及鄰邊 d) 找出一些對邊平行的四邊形，並找出其特性 ❖ 以「十」字為基礎，學生分別在「釘點紙」、「格仔紙」及「電子釘板」製作菱形 ❖ 介紹利用繪畫長方形的策略製作菱形：針對一些依指示在方格紙上畫出菱形的題目

教節	課題	學習內容	主要學與教活動
第 6-8 節	四邊形	1. 認識不同種類四邊形之間的關係 關係包括： a) 所有正方形都是長方形 b) 所有正方形都是菱形 c) 所有正方形、長方形和菱形都是平行四邊形 2. 利用溫氏圖或樹形圖以展示不同種類四邊形之間的包含關係	❖ 猜謎語活動： 加強學生數學語言的運用及進一步掌握各種四邊形的特性。 ❖ 網上工作紙 (Classkick 平台) 四邊形王國： 學生根據各四邊形的特性，在網上工作紙將不同的四邊形放入村莊，著學生找出圖形之間的關係。 ❖ 四邊形 BINGO 遊戲

附件二

青松侯寶垣小學

課程發展處數學教育組

種籽計劃 MA0720 (2020/21)上學期

探索與發展在小學數學修訂課程的學與教和評估中照顧學習者多樣性的策略**教案**

學習階段： 2

學習範疇： 圖形與空間

學習單位： 4S1 四邊形(三)

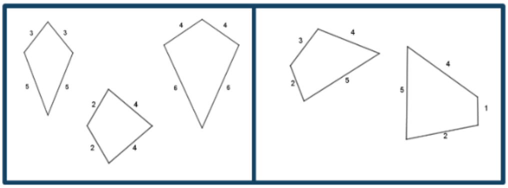
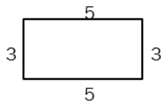
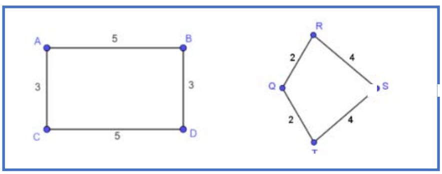
目標： (i) 認識四邊形的對邊及鄰邊的概念

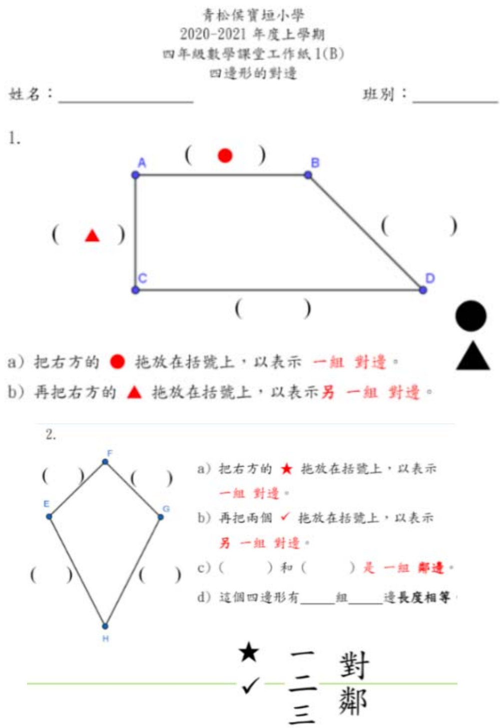
(ii) 重溫在圖形上利用平行的符號標示

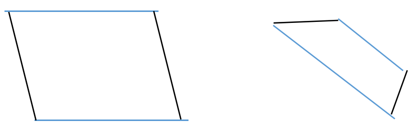
先備知識： 認識平行的概念

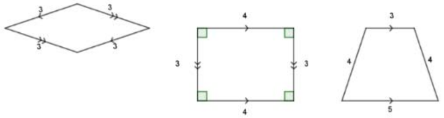
教學資源： Zoom, Classkick 網上工作紙

<table>
<tr><td colspan="2">課題： 四邊形
教節： 第二教節
教學時間： 35 分鐘</td></tr>
<tr><td>教師： 劉珈瑗老師
班別： 4A
男 高
女 高</td><td>教師： 李東樂老師
班別： 4D
男 中/低能力
女 中/低能力</td></tr>
</table>

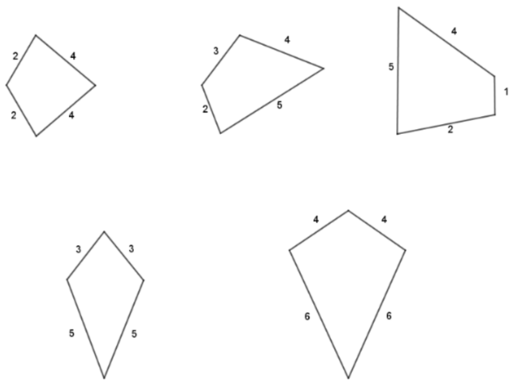
學習內容	學與教活動	備註
1. 認識四邊形的對邊及鄰邊的概念	引入 (5’) 第一節我們根據外星人的面部特徵類，其實在四邊形中也有可辨認的特徵，我們稱為四邊形的性質。教師出示一個分類圖：  討論問題： 以上的分類圖是根據四邊形邊長的性質把它們分成兩組。 1. 你認為分類的原則是甚麼？ 2. 長方形可以入其中一組嗎？為甚麼？  3. 左邊的組的入組條件要是甚麼才可讓長方形入組？(有兩組邊長度相等) 4. 為了方便說明，今天會介紹四邊形的對邊及鄰邊。	簡報 培養學生的明辨性思考能力
i) 線段的命名 ii) 對邊及鄰邊	對邊及鄰邊(7’) 5. 教師用簡報展示剛才長方形及一個四邊形，以顏色線表示對邊及鄰邊。  例如：AB 和 CD 不相連，AB 的對邊是 CD，CD 的對邊是 AB；AC 和 BD 不相連，AC 的對邊是 BD，BD 的對邊是 AC	簡報

學習內容	學與教活動	備註
	AB 和 AC 及 BD 相連，AC 和 BD 都是 AB 的鄰邊。 四邊形共有兩對對邊：AB 與 CD、AC 與 BD。 定義： ● 一條邊的鄰邊—兩條跟它相連的邊 ● 一條邊的對邊—沒有跟它相連的邊	
	<u>活動一</u>：鞏固：(5’) 1. 學生在網上工作紙(Classkick 平台)/實體工作紙上，以<u>相同顏色標示</u>出各個四邊形對邊，並寫出該四邊形邊的性質。  青松侯寶垣小學 2020-2021 年度上學期 四年級數學課堂工作紙 1(B) 四邊形的對邊 姓名：________ 班別：______ 1. a) 把右方的 ● 拖放在括號上，以表示 一組 對邊。 b) 再把右方的 ▲ 拖放在括號上，以表示另 一組 對邊。 2. a) 把右方的 ★ 拖放在括號上，以表示 一組 對邊。 b) 再把兩個 ✓ 拖放在括號上，以表示 另 一組 對邊。 c) (　　) 和 (　　) 是 一組 鄰邊。 d) 這個四邊形有____組____邊長度相等。 ★ ✓ 一 二 三 對 鄰	網上工作紙(Classkick 平台)/實體工作紙

學習內容	學與教活動	備註
	<u>活動二</u>：發展(5’) 分類：著學生觀察以下 5 個四邊形的性質作分類。 (A,B 班：工作紙中的四邊形已分類) 1a) 教師提問學生以甚麼原則作分類。(有 2 組對邊長度相等/有 2 組鄰邊長度相等/有平行的邊) 2a) 教師提問學生甚麼是平行？(直接進入下一部份) (C,D,E 班：工作紙中的四邊形未分類) 1b) 教師著學生以邊長的性質分類。 2b) 教師提問學生除了邊長，還有沒有其他分類的方法。	(Classkick 平台)/簡報
重溫在圖形上利用平行的符號標示互相平行的線。	<u>活動三</u>：發展：(10’) 教師與學生溫習平行線的概念，並著學生說出四邊形的性質。 1. 兩條線段的長短與它們是否平行並沒有關連  ∴以上都是一組平行線。 2. 教師引導學生說出，以下四邊形中有多少組對邊平行。 	簡報 網上工作紙(Classkick 平台)/實體工作紙

學習內容	學與教活動	備註
	3.學生在工作紙中，找出以上四邊形的性質。  4. 以上四邊形有______組對邊平行。 以上四邊形有______組對邊長度相等。	
	總結：(3’) 1. 定義： 鄰邊---有相連的邊 對邊---沒有相連的邊 2. 利用平行符號標示互相平行 的對邊	

附一(引入)

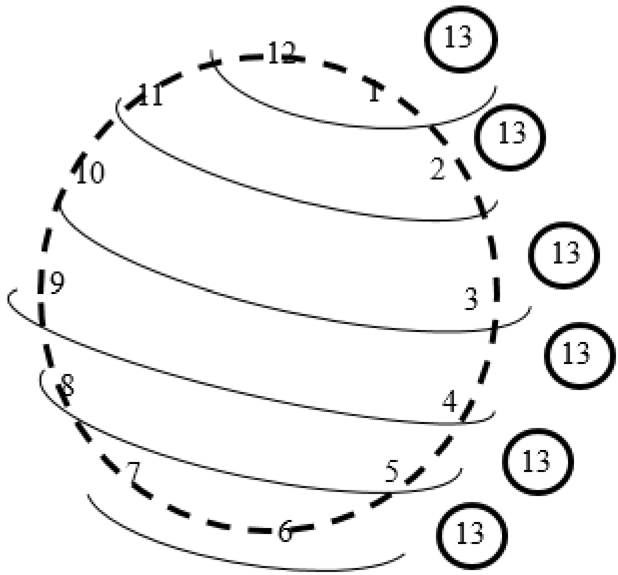


6. 從手機社交群組瘋傳數學小品談起 [1]

黃毅英

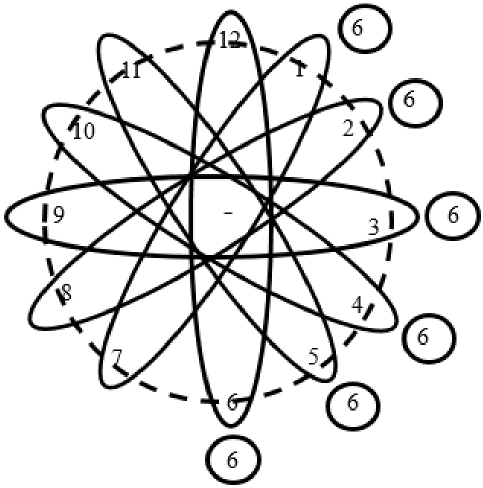
退休數學教育工作者

手機社交群組又瘋傳兩道數學帖文：



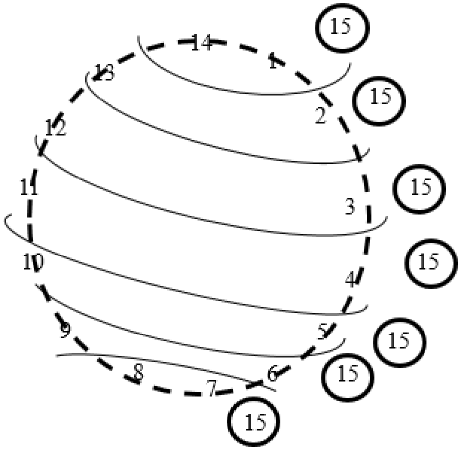
圖一：鐘面數字加起來都是 13。

[1] 感謝黃家樂和鄧國俊兩位的寶貴意見。

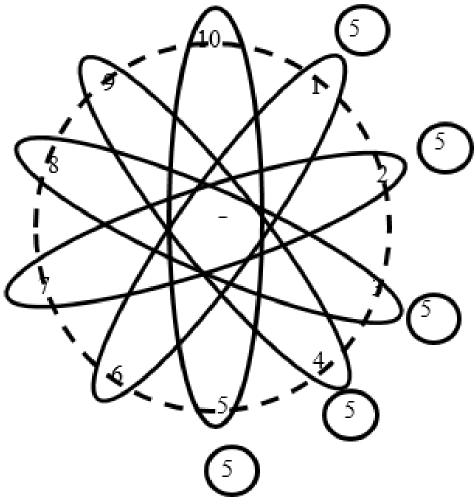


圖二：鐘面數字相差都是 6。

好神奇！但細心想，這和 12 沒有甚麼關係，例如

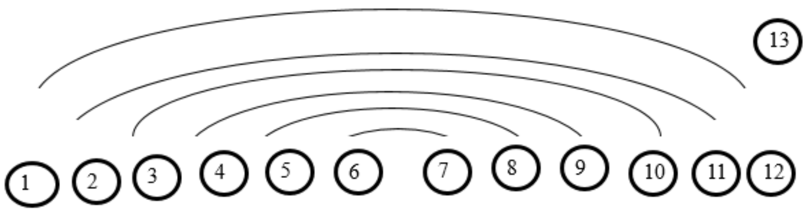


圖三：加起來都是 15。



圖四：相差都是 5。

（當然如果「n」是奇數就要點調整 — n 是有多少個數字)。其實我們攤開就更加清楚了。圖一變成：



圖五：13 的組成。

這其實並不陌生，就是初小「數字的組成」（上圖是 13 的組成），例如 7 的組成便是：

$1+6=7$

$2+5=7$

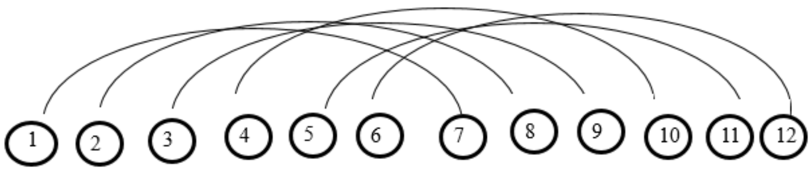
$3+4=7$

$4+3=7$

$5+2=7$

$6+1=7$

如果「n」是 9 的話，便是「湊十法」。至於圖二，又把鐘面攤開，其實是一個等距關係：



圖六：等距關係。

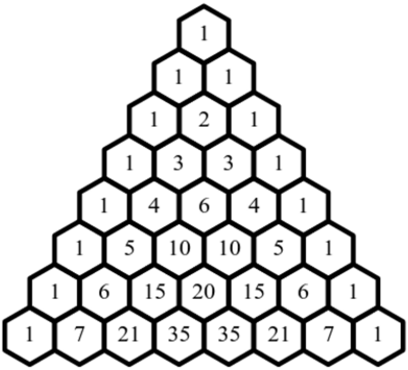
這些規律十分有趣。可進一步想想：是否一定由 1 開始？5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 又如何？又相隔不是 1 又怎樣？如-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17？這些規律最極致的可算是巴斯卡三角，詳細可見

www.mathsisfun.com/pascals-triangle.html →

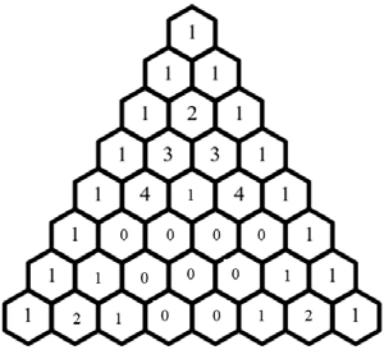
鄭肇楨教授更加讓學生為巴斯卡三角填色（他本人喜愛畫畫，也可能是這個緣故，中文大學教育學院的教室當年命名為「數學及美術室」，與美術科共用）。詳細做法已記載在〈數學與課外活動〉[2]一文。→

[2] 黃毅英（1992）。〈數學與課外活動〉。《數學傳播》，62 期，96-109。後載黃毅英（編）（1997）。《邁向大眾數學之數學教育》（頁 227-252）。台北：九章出版社。
http://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d162/16216.pdf

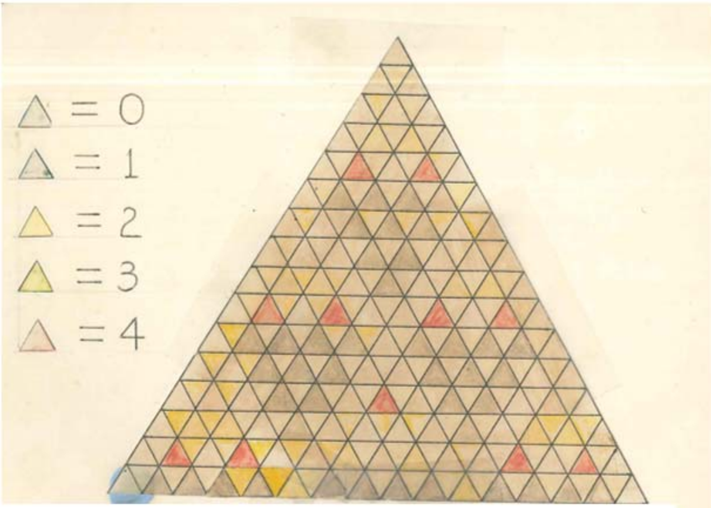
方法是，首先繪製巴斯卡三角，然後選定一個正整數，例如 5。將巴斯卡三角裏面的數字用模 5 （modulo 5）化成 0、1、2、3、4 的數字（即是把數字除以 5 求餘數），再將 0、1、2、3、4 指定不同顏色，例如白、黑、黃、紅、綠，按照規定塗畫就可以了。



圖七：巴斯卡三角。



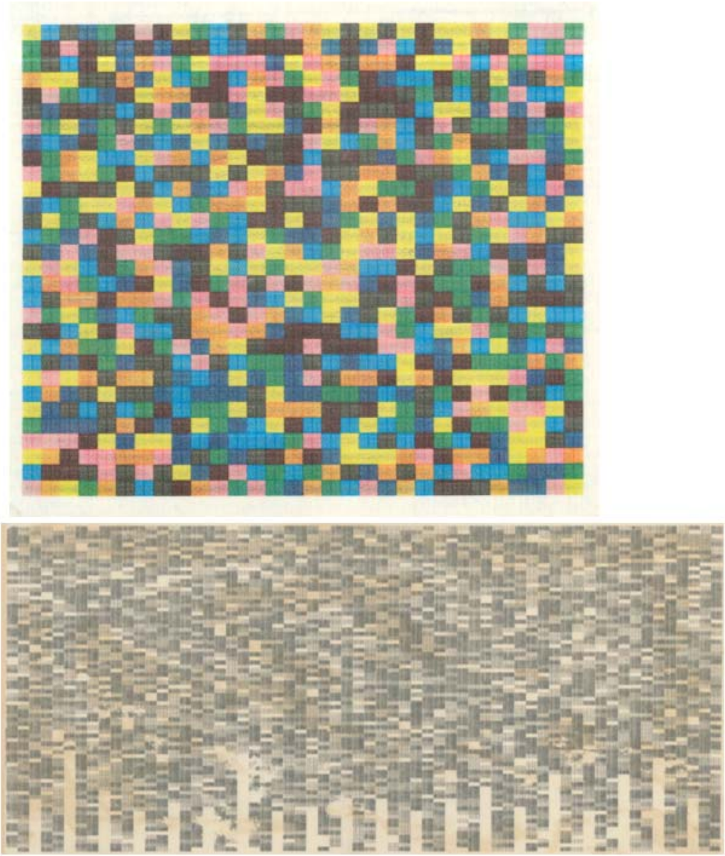
圖八：巴斯卡三角模 5。



圖九：巴斯卡三角填色方法。

圖十：巴斯卡三角填色。

同文亦介紹了鄭老師的「隨機美術（random art）」，十分有趣。做法就是每一格按照隨機方式（例如擲毫、擲骰）去決定顏色。亦可以用電腦製作。筆者曾經問過鄭老師，他說他反而喜歡只用黑白兩種顏色，因為這帶來陰陽的反差。



圖十一：隨機美術。

隨著社交應用程式的發達，這十多年來我們就常收到這一類數學小品或問題，很多第一眼看去都覺得很神奇。甚至朋友們會來問我們。當然我們不能說所有這一類問題我們都能解讀，但作為數學老師，對於其中一些（如這個），我們如果細心分析，也可以戳破其面紗，得出有意義的詮釋，甚至連繫到相關的活動（上面的便是巴斯卡三角填色和隨機美術）和朋友及學生分享。

7. 開源計算軟件對數學教育之影響

陳泳昌

香港大學博士研究生

前言

隨著科技發展，輔助計算的工具不斷推陳出新。古人曾用算板、算籌、算盤等計算工具，並對一些常用的函數（例如三角函數、平方及平方根）編製數表。對數（Logarithm）之出現，旨在化乘除為加減，簡化運算，亦由此引發了計算尺（Slide Rule）的發明。後來機械式及電子式計算機面世，時至今日，個人電腦以及智能配備，已成為日常生活不可或缺的物品。

新的計算工具陸續出現，教育及考評制度亦須調適。在 20 世紀中期，香港中學學生一般使用四位數表（Four-Figure Tables）進行計算。香港考試局（今稱香港考試及評核局）從 1980 年開始，准許考生使用電子計算機；及至 1991 年，又對計算機型號作出規範，只有印上特定標籤的計算機，方可用於試場。

除了計算機之外，專業計算軟件亦有日趨普及之勢。以往一些發展成熟、廣受認可的專業計算軟件大多是商用性質，價格不菲，一般只用於高等學府或大型企業。然而近年相繼出現專業計算的開源軟件（Open Source Software），能在符合

授權條款下，合法免費下載和使用。本文略舉二種此類軟件，並試論其對數學教育之影響。

GNU Octave

MATLAB 是美國 MathWorks 公司出品的商業軟件，可以搭配多種不同學科的工具箱，擴充功能，幾已成為專業計算之標準軟件。因此我們評估相應的開源軟件時，往往考慮是否與 MATLAB 兼容。Octave[1]是此方面比較流行的開源軟件，其開發工作始於 1988 年，以其中一名開發者 John W. Eaton 之業師、美國俄勒岡州立大學教授 Octave Levenspiel（1926-2017）命名。Octave 是根據 GNU 通用公眾授權條款的開源軟件，指令格式大致與 MATLAB 兼容，足以應付中學程度的數學計算，如表一所示。

問題種類	範例	GNU Octave 計算結果 （以下範例須先執行指令，載入所需套件） >> pkg load symbolic >> syms x
多項式展開	展開$(x+1)(x+5)$	>> expand((x+1)*(x+5)) ans = (sym) 2 x + 6*x + 5
多項式因式分解	因式分解$x^2+7x+12$	>> factor(x^2 + 7*x + 12) ans = (sym) (x + 3)*(x + 4)

1 參閱網址 https://www.gnu.org/software/octave/index。

問題種類	範例	GNU Octave 計算結果 （以下範例須先執行指令，載入所需套件） >> pkg load symbolic >> syms x
方程式求解 （包括複數根）	解$x^2-6x+13=0$	>> solve(x^2 - 6*x + 13 == 0) ans = (sym 2x1 matrix) [3 - 2*I] [ ] [3 + 2*I]
不等式求解	解$x^2-3x+2\le 0$	>> solve(x^2 - 3*x + 2 <= 0) ans = (sym) And(1 <= x, x <= 2)
矩陣運算	計算$\begin{pmatrix}2&1\\3&2\\-2&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&4\\2&-2&1\end{pmatrix}$	>> A = [2,1;3,2;-2,2] >> B = [1,1,4;2,-2,1] >> A * B ans = 4 0 9 7 -1 14 2 -6 -6
微分	求$\frac{d}{dx}\sin(2x)$	>> diff(sin(2*x)) ans = (sym) 2*cos(2*x)
不定積分	求$\int\frac{2}{x}dx$（省略任意常數）	>> int((2/x)) ans = (sym) 2*log(x)
定積分	求$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$	>> int(sqrt(1 - x^2), 0, 1) ans = (sym) pi -- 4

表一：GNU Octave 計算範例

MiniZinc

中學數學問題一般求取實數解，例如求一元二次方程式的實根；但亦有一些問題，我們須求整數解，即答案必須是整數，不能取任意實數。此方面雖然超出中學數學教育的範疇，但由於牽涉不少有趣且切合日常生活的題目，故堪在此一論。

例一：這是著名的算式謎題（Cryptarithmetic Puzzle）SEND + MORE = MONEY，每個英文字母分別代表 0 至 9 其中一個數字，見圖一。我們須求每個英文字母所代表之數字，使算式成立。

$$\begin{array}{cccccc} & & S & E & N & D \\ + & & M & O & R & E \\ \hline = & M & O & N & E & Y \end{array}$$

圖一：算式謎題

例二：政府向市民派發 5000 元消費券。現有三種商品 A、B、C，售價分別是 321 元、434 元及 249 元。我們希望購買這三種商品，每種商品購買數量不限，大前提是儘量用畢 5000 元，不致浪費。假如有一個購買方案，總消費等於 5000 元就最好；若不可行，我們不介意在 5000 港元之外，額外補貼一些金錢，只是希望補貼越小越好。

以上都是一些典型的約束滿足問題（Constraint Satisfaction Problem），其定義是有一些變量（Variable），每個變量須在離散域（Discrete Domain）取值（例如只限取整數，而不能取任意實數）；再者，我們希望變量的取值，能滿足一些約束（Constraint）。以上兩例，可用約束滿足問題方式表示如下：

例一：算式謎題

1. E, N, D, O, R, Y 是 0-9 的整數，S 和 M 是 1-9 的整數（因為 S 和 M 是某四位數及某五位數的首位數字，故不可能為 0）。
2. S, E, N, D, M, O, R, Y 兩兩不等（Pairwise Distinct）。
3. $(1000S + 100E + 10N + D) + (1000M + 100O + 10R + E) = 10000M + 1000O + 100N + 10E + Y$。

例二：消費券問題

設三種商品 A、B、C 的購買數量為 NA、NB、NC，售價分別為 321、434 及 249。

1. NA 是整數，最小值為 0，最大值為[5000/321]=16（我們不介意補貼，所以 NA 最大值須進位捨入）。
2. NB 是整數，最小值為 0，最大值為[5000/434]=12。
3. NC 是整數，最小值為 0，最大值為[5000/249]=21。
4. $321NA + 434NB + 249NC \geq 5000$。
5. 求 $321NA + 434NB + 249NC$ 的最小值。

要用電腦解決約束滿足問題，以往我們一般只能使用商業計算軟件（例如 MATLAB 或 IBM ILOG），但近年出現不少

開源軟件可供選擇。在此筆者介紹 MiniZinc[2]，這是由澳洲蒙納殊大學（Monash University）團隊領導開發的軟件，語法簡單直接，如圖二及圖三所示。

```
var 1..9: S;
var 0..9: E;
var 0..9: N;
var 0..9: D;
var 1..9: M;
var 0..9: O;
var 0..9: R;
var 0..9: Y;


include "alldifferent.mzn";
constraint alldifferent([S,E,N,D,M,O,R,Y]);
constraint (1000*S + 100*E + 10*N + D) + (1000*M + 100*O +
10*R + E) = 10000*M + 1000*O + 100*N + 10*E + Y;
solve satisfy;
```

（用 MiniZinc 執行此程式，可得 S=9，E=5，N=6，D=7，M=1，O=0，R=8，Y=2，整個算式是 9567+1085=10652。）

圖二：MiniZinc 程式範例（算式謎題）

[2] 參閱網址 https://www.minizinc.org/。

```
int: Budget = 5000;
int: PriceA = 321;
int: PriceB = 434;
int: PriceC = 249;

var 0..ceil(Budget / PriceA): NA;
var 0..ceil(Budget / PriceB): NB;
var 0..ceil(Budget / PriceC): NC;

constraint PriceA * NA + PriceB * NB + PriceC * NC >= Budget;
solve minimize PriceA * NA + PriceB * NB + PriceC * NC;
```

（用 MiniZinc 執行此程式，可得 N_A=9，N_B=2，N_C=5，即消費金額=5002。）

圖三：MiniZinc 程式範例（消費券問題）

小議

回顧歷史，每當有新的科技發明面世，都會引起社會關注，此種變革會否令我們失去原有的技能。例如電子計算機出現後頗有議論，謂學生會否對其過於依賴，難以鍛鍊運算能力。然而電子計算機日漸普及，終為教育及考評制度所接納。開源計算軟件的出現，對教學帶來何種影響，值得學界探討。

由於新冠肺炎疫情的關係，學校改用網上授課及提交作業，甚或舉行線上考試，學生會否暗用開源計算軟件以完成功課和答卷，這的確是教師須注意之事。惟中學數學教育除了要求學生進行運算外，亦須對命題求證，建立運用抽象符號的能力，及把現實問題用數學方式呈現，學生須對數學有更高層次的理解，這並非計算軟件所能輔助。

開源計算軟件亦能為數學教育帶來新機遇。囿於學生的數學水平，教師給出題目的範圍及種類，未免有所限制，題材亦不一定切合日常生活。有了開源計算軟件之輔助，教師可以提出一些水平較深但更有趣的題目，例如上文談及之算式謎題及消費券問題。學生雖然未有解決此等題目之知識，但教師可利用開源計算軟件作課堂示範及討論，學生當能從中體會數學於日常生活之重要性，從而提高學習數學之興趣。

作者電郵：jsphchan@connect.hku.hk

8. 行列式—解多元高次方程組

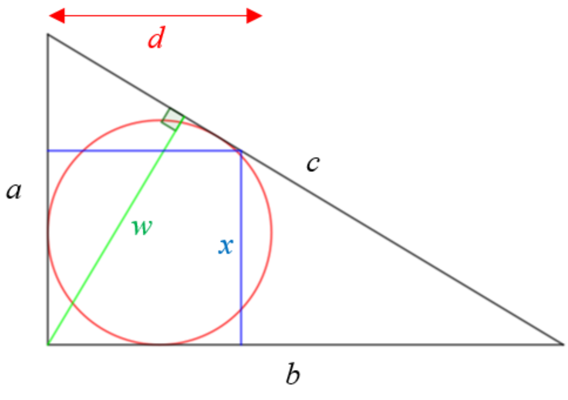
鄧廣義

元朗商會中學

井關知辰，生卒年份不詳，元祿三年（1690）著《算法發揮》，這是數學史上第一本關於行列式展開研究的出版物，比 Cramer（1750）及 Vandermonde（1772）的研究為早。《算法發揮》以日文著述，由上、中、下卷構成；卷上介紹如何由前、後二式聯合進行消元，卷中共有七問，全部使用行列式解答，卷下為演段之術。

《算法發揮》卷中 第四問

今有勾股弦內如圖，方圓空。只云方外餘積加入圓徑若干，又云圓外餘積加入中勾若干；問勾、股、弦、中勾、圓徑、方面各幾何？



設 x 為方面(未知數)，勾股弦為 a、b、c，圓徑為 d，中勾為 w。依題意設立初始條件：

$$\begin{cases} \frac{1}{2}ab - x^2 + d = \alpha \text{ (只云數)} \ldots (1) \\ \frac{1}{2}ab - \frac{\pi}{4}d^2 + w = \beta \text{ (又云數)} \ldots (2) \end{cases}$$

此題共有六個未知數，需要六組方程，分別是勾股定理、勾股容圓、勾股容方、三角形面積公式及式(1), (2)。

套用中算的勾股容圓($a+b=c+d$)及勾股容方($x=\frac{ab}{a+b}$)，有以下結果：

$$4(\frac{1}{2}ab)x = 2abx = ((a+b)^2 - c^2)x = (a+b+c)(a+b-c)x = (a+b+c)dx$$

……(3)

$$4(\frac{1}{2}ab)d = 2abd = 2(a+b)dx \text{ ……(4)}$$

以(4)式減(3)式，得

$$4(\frac{1}{2}ab)(d-x) = 2(a+b)dx - (a+b+c)dx = (a+b-c)dx = d^2x$$

……(5)

考慮三角形的兩種等價面積公式($ab = cw$)，則有

$$2(\frac{1}{2}ab)x = xcw \ldots\ldots(6)$$

再次使用勾股容方($x = \frac{ab}{a+b}$)，得

$$2(\frac{1}{2}ab)w = x(a+b)w \ldots\ldots(7)$$

以(7)式減(6)式，得

$$2(\frac{1}{2}ab)(w-x) = xw(a+b-c) = xwd \cdots\cdots(8)$$

首先計算前式，設立輔助未知數 $y = d$，根據(1)式，

$x^2 + \alpha - y = \frac{1}{2}ab$ ，記 $p = x^2 + \alpha$ ，得

$$p - y = \frac{1}{2}ab \ldots\ldots(9)$$

代入(5)式， $4(\frac{1}{2}ab)(y-x) = y^2 x$ ，得

$$\therefore 4(p-y)(y-x) = y^2 x$$

$$\therefore -4px + (4x+4p)y - (x+4)y^2 = 0$$

再記$q=4x+4p, r=x+4$，得前式

$-4px+qy-ry^2=0$ ……(前式)

現在計算後式，以(2)式 $(\frac{\pi}{4}y^2+\beta=\frac{1}{2}ab+w)$ 配合(9)式

$(p-y=\frac{1}{2}ab)$，得

$w=\frac{\pi}{4}y^2+\beta-\frac{1}{2}ab=\frac{\pi}{4}y^2+\beta-(p-y)=\frac{\pi}{4}y^2+y+(\beta-p)$

……(10)

$\therefore w-x=\frac{\pi}{4}y^2+y+(\beta-p-x)$

倍乘$2(\frac{1}{2}ab)$，再配合(9)式$(p-y=\frac{1}{2}ab)$，得

$2(\frac{1}{2}ab)(w-x)=2(p-y)(\frac{\pi}{4}y^2+y+(\beta-p-x))$

留意到左方等於(8)式左方，得

$\therefore xwy=\frac{-\pi}{2}y^3+(\frac{\pi}{2}p-2)y^2+(2x+4p-2\beta)y+(2p\beta-2p^2-2px)$

代入(10)式 $(w=\frac{\pi}{4}y^2+y+(\beta-p))$，得

$$x(\frac{\pi}{4}y^2+y+\beta-p)y=\frac{-\pi}{2}y^3+(\frac{\pi}{2}p-2)y^2+(2x+4p-2\beta)y+(2p\beta-2p^2-2px)$$

$$\therefore -(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x)y^3+(\frac{\pi}{2}p-x-2)y^2+(2x+4p-2\beta-x\beta+xp)y-2p(-\beta+p+x)=0$$

再記 $s=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x$，$t=\frac{\pi}{2}p-x-2$，
$u=2x+4p-2\beta-x\beta+xp$，$v=-\beta+p+x$，得後式

$-sy^3+ty^2+uy-2pv=0$ ……(後式)

將前後二式並排，使用前式(y 的二次方程式)，設法把後式(三次)降為二次：

$-4px+qy-ry^2=0$ ……(前式)

$-2pv+uy+ty^2-sy^3=0$ ……(後式)

計算第一式：將前式及後式分別乘以 $v, 2x$，得到相同的常數項($-4pvx$)，相減得

$(qv-2ux)y-(rv+2tx)y^2+2sxy^3=0$

約去 y 後，得到第一式

$e-fy+2sxy^2=0$ ……(第一式)

其中 $e=qv-2ux$，$f=rv+2tx$。

計算第二式：將前式及後式分別乘以 u, q，得到相同的 y 項(uqy)，相減得

$$-2pe+(tq+ru)y^2-sqy^3=0$$

代入第一式($e=fy-2sxy^2$)，得

$$-2p(fy-2sxy^2)+(tq+ru)y^2-sqy^3=0$$

$$\therefore -2pfy+(4psx+tq+ru)y^2-sqy^3=0$$

約去 y 後，得到第二式

$$-2pf+gy-sqy^2=0 \text{……(第二式)}$$

其中 $g=4psx+tq+ru$。

第三式即為前式：

$$4px-qy+ry^2=0 \text{……(第三式)}$$

將三式並排，稱為「立陽率」。「平陽率」、「立陽率」、「三陽率」分別代表二、三、四階行列式，「平陰率」、「立陰率」、「三陰率」則為對應的展開式。

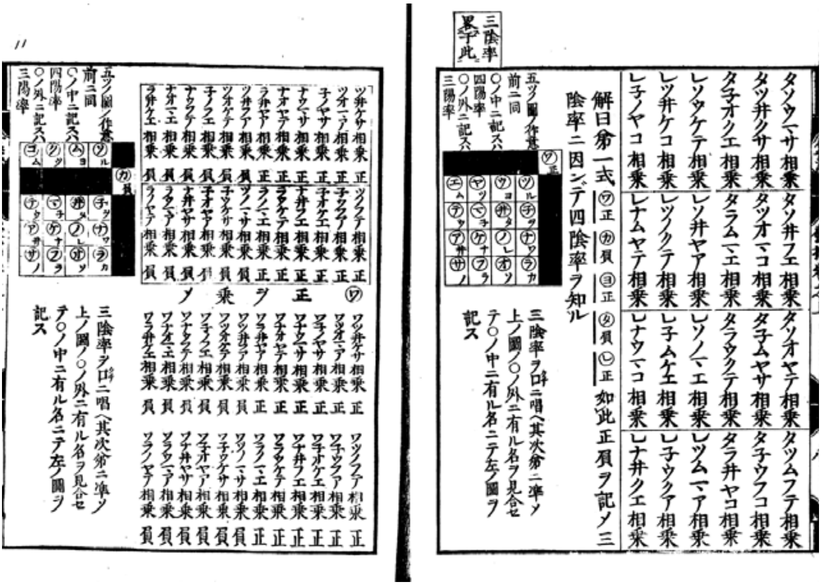
$$\begin{cases} e & - & fy & + & 2sxy^2 & =0 \\ -2pf & + & gy & - & sqy^2 & =0 \\ 4px & - & qy & + & ry^2 & =0 \end{cases}$$

使用「降階展開法」，即范德蒙(Vandermonde)展開法，消去 y 後，得到「立陰率」：

$$\begin{vmatrix} e & -f & 2sx \\ -2pf & g & -sq \\ 4px & -q & r \end{vmatrix} = 0$$

(由於原著是以日文書寫，結式出現上下左右倒置。)

$\therefore 8pgsx^2 + 2prf^2 + esq^2 - 8pqsfx - erg = 0$，展開後得 x 的九次方程式。



三陰率ヲ呼ニ唱ヘ其次第ニ準シ上ノ圖ノ○ノ外ニ有ル名ヲ見合セテ○ノ中ニ有ル名ニテ左ノ圖ヲ記ス

解日第一式 正 負 正 負 正 如此正負ヲ記シ三陰率ニ因ンデ四陰率ヲ知ル

井關知辰在書中最高列出五階行列式，並解釋了如何展開更高階的方法。其實早在關孝和《解伏題之法》(1683)之中已經出現了行列式，書中使用了 Sarrus 展開法，並推廣到一

般情況，然而，這對於四階以上是無效的；其後，關氏與建部兄弟於 1683-1711 年間完成了《大成算經》，書中改用了 Vandermonde 展開法。《算法發揮》與關孝和的《發微算法》風格十分相似，至於兩人是否有何關係，至今仍未可知。

作者電郵：tangkwongyee@yahoo.com.hk

參考文獻

[1] 井關知辰（1690）。算法發揮。摘自
http://www.wasan.jp/archive/sanpohakki.pdf

[2] 徐澤林（2008）。和算選粹。科學出版社。

[3] 林倉億（2014）。和算中的行列式(4)：降階展開法。
摘自 https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=54913

9. COVID-19 的數學模型

黃曉薇、凌萬豪

香港教育大學數學與資訊科技學系

前言

2019 冠狀病毒病肆虐全球，受感染的個案數目及死亡人數持續上升，世界各地的政府及專家們每日都疲於奔命尋找控制疫情的方法，減慢數字上升的速度，甚至希望疫情可以完全受到控制，市民可以恢復以往正常的生活。即使連續一星期沒有感染個案，政府及專家們都沒有掉以輕心，完全放寬防疫措施，因為他們明白到即使社區內只有極少數的隱形帶菌者存在，感染個案數目都可以在短時間內以幾何級數上升，疫情再度失去控制，政府需要再次投入大量資源來換取得來不易的結果，市民正常的生活在疫情中長時間停擺，引發心理壓力，當中亦可能失去許多寶貴的生命。數學模型可以幫助我們以客觀的角度理解病毒散播速度，我們亦可以透過數學模型作出較合理的決策應對這次前所未有的環球危機。

評定模型（Logit model）

評定模型（Logit model）常用於研究不同傳染病散播速度的數學工具。假設有一種傳染病，接觸後便會即時感染，而感染後便能永久免疫。在一個總人口為N的某地區裡，

已感染人口為I，那麼未被感染人口為$N-I$。如果用函數形式表示時間t內已感染人口和未被感染人口，分別是$I(t)$ 和 $P(t)=N-I(t)$。那麼，時間t的感染率為$i(t)=\frac{I(t)}{N}$，即未被感染率為 $1-i(t)$。假設 μ 是這個地區每人每日接觸的人口數目，$N\times i(t)\times\mu$ 就是已感染人群當天接觸的總人數。因為當中只有部分人口還未被感染，那麼新增感染人數為

$$N\times i(t)\times\mu\ \ \times(1-i(t))$$

另外，每天新增感染速率可以表示為 $\frac{di(t)}{dt}$，乘以總人口 N 亦可得到每天新增感染人數。故此，我們得出

$$\frac{di(t)}{dt}=\ \mu\times\big(1-i(t)\big)\times i(t)\text{。}$$

透過積分我們可以便得出

$$i(t)=\frac{1}{1+e^{-\mu t}}\text{。}$$

這是一個基本的評定模型（Logit model）。

而 Logit 模型用於應用的函數中會考慮加入兩項變量 K 和 P_0，即

$$I(t)=\frac{K}{1+\left(\frac{K-P_0}{P_0}\right)e^{-\mu t}}\ ,$$

其中P_0表示第一天的確診人數。在這個函數中，我們發現$\lim_{t\to\infty} I(t)=K$，那麼可以通過計算 K 的值，去預測某個地區的確診總人數。

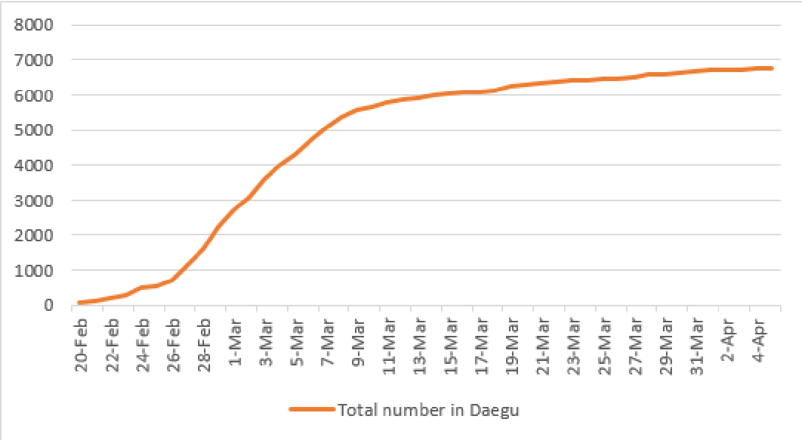


圖 1：大邱市新冠肺炎病毒確診人數

（2020 年 2 月 20 日 – 2020 年 4 月 4 日）

以韓國大邱市 2020 年 2 月 20 號至 2020 年 4 月 4 號的確診數字為例（圖 1），用三項變量的 Logit 模型來模擬當地確診人數增長情況。我們可以發現真實增長數字與模擬數字相似（圖 2）。

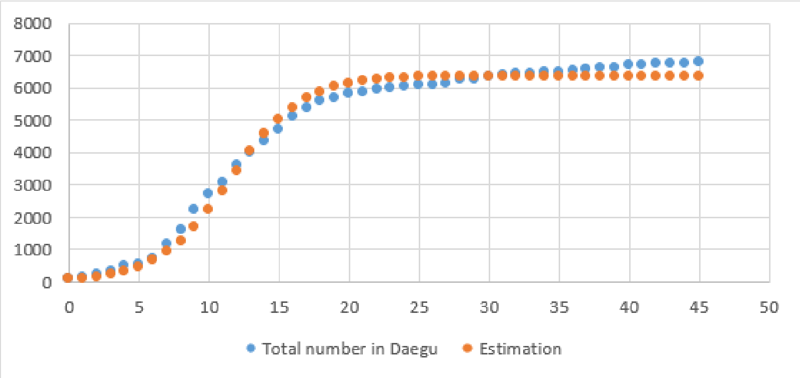


圖 2：用函數三項變量的 Logit 模型模擬大邱市新冠肺炎病毒確診人數

（2020 年 2 月 20 日 - 2020 年 4 月 4 日）

但事實上，現在韓國大邱市的確診總人數已經超過用這個模型預測的 K 值，說明這個模型仍然不足夠預測新冠肺炎病毒確診人數。

這個 Logit 模型將某地區總人口只分為未被傳染和已被感染兩種人群，但事實上，新冠肺炎病毒的傳播途徑比 Logit 模型更加複雜。而在以下的隨機過程模型中，會將人口分成三種或以上，使得這個傳染病數學模型更加精細，預測亦會更加精準。

隨機過程（stochastics process）

隨機過程的目標是調查和量化不確定性（即可變性），以便在實際情況中做出可靠而準確的預測。在隨機過程模型中，一個人從一個狀態到另一個狀態的轉變可視為隨機過程。由於隨機模型能仔細描述每個人由健康到染病，最後到康復的過程，所以未必存在一個簡單的函數來表示每天的感染人數。因此，很多時候我們都需要利用電腦運算出感染人數。

SIR 模型

S. I. R. 分別表示 Susceptible (易感染)、Infected (已感染)、Removal/Recovery (移除感染/康復) 。構建 SIR 模型需要兩個基本假設：首先，不考慮個體的出生、自然死亡與流動的情況，即個體總數是固定的，用N表示。其次，每一個體與其他個體接觸的機會相等。而患者有可能治愈或者死亡，即移除感染/康復。移除感染/康復的人再不會帶有病毒。因為已感染人口會轉變為移除感染/康復人口，所以在人群中的已感染人數會慢慢減少，導致減慢感染率。

圖 3：SIR 模型

假設某地區易感染人數、已感染人數、移除感染人數均是關於時間 t 的函數，分別寫作 $S(t)$，$I(t)$ 和 $R(t)$，那麼

$S(t)+I(t)+R(t)=N$。假設一個易感染者n，在時間t會接觸到$x_n(t)$新冠肺炎患者。假設每次接觸後，患者會將病毒傳染給該易感染者的機率為p，那麼該易感染者當天沒有被感染的機率為 $(1-p)^{x_n(t)}$，即該易感染者當天被感染的機率為

$$p_n(t)=1-(1-p)^{x_n(t)}\text{。}$$

當感染人口足夠大的時候，易感染者被感染的機率亦隨即增大，感染人數更隨即上升，以上的機率說明了感染人數可以在短時間內幾何級數上升。因此，保持社交距離及減少社交活動可以減低受感染的風險，亦會減慢感染人數的增長。

另外，每個人的康復時間都不同，我們亦可以在隨機模型中加入有關康復時間的機率，例如 50%的人的康復時間為三天，30%的人的康復時間為四天，10%的人的康復時間為五天，10%的人的康復時間為六天。在感染者康復前，病毒仍然有傳染性。最後，通過電腦的運算，我們可以觀察到每天的易感染、已感染和康復人口的分佈，還可以得出已感染人口的增長過程。

SEIR 模型

不過新冠肺炎病毒具備潛伏期，病毒攜帶者未必即時具傳染性。Annas, S（2020）和其團隊建構的 SEIR 模型用於形容印尼新冠肺炎傳播情況。他們將總人口分為 4 組，易感人群（S）（容易受到新冠肺炎病毒感染的人），暴露人群（E）

（已被感染但未夠傳播新冠肺炎病毒的人），已感染人群（S）（能夠傳播新冠肺炎病毒的人）和康復人群（R）（對新冠肺炎病毒免疫的人）。這個傳播模型是

圖 4： SEIR 模型

Annas，S 和團隊通過構建這個模型，加入很多變項來仔細地描述病毒對人體的變化及過程。他們預測如果僅僅隔離 3 天，印尼的新冠肺炎確診數目會在 3 天內達到峰值 34,000 人，但如果隔離 7 天，則確診數目的增長會減慢，在第 6 天達到峰值 32,000 人。但如果隔離天數達到 14 天，則會在第 8 天達到峰值 29,000，從而證明隔離天數的重要性。並提出當接種疫苗達到 3%的時候，易感人群還需要很長時間去減少，如果達到 50%，則需要更短時間（Annas,S, et al.,2020）。

結論

隨著越來越多學者對這個病毒模型的建構，整個病毒模型都會變得更加完善。在 Annas, S 和其團隊提出的 SEIR 模型中，加入了一個預測變量表示已接種疫苗的易感人群和每個階段人口的自然死亡率。但新冠肺炎病毒亦出現很多無症狀感染者，因此這個模型的建構還可以不斷優化，使得這個模型更加完善。

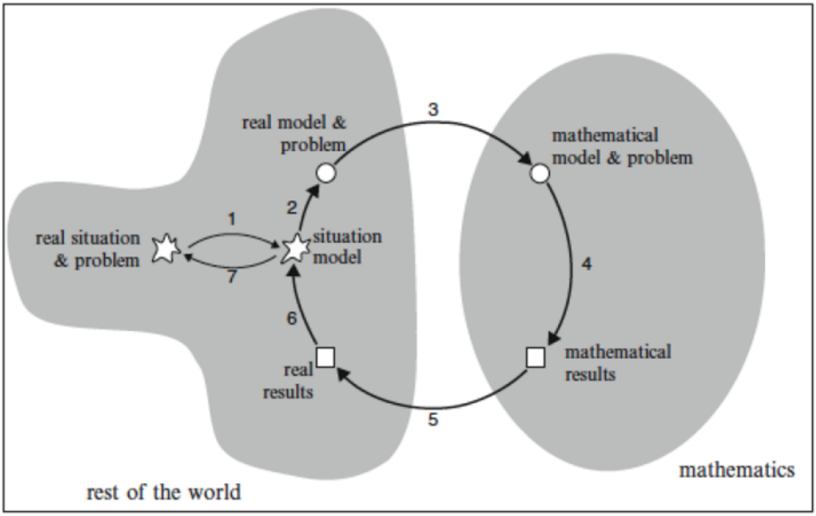


圖 5：Blum 和 LeiB （2007）的建模週期。

傳染病模型是一個跨學科學習的範例。從一個生活問題開始，病毒傳播是生物問題，但提及傳播概率，峰值，可以透過數學模型去進行判斷現時措施是否有效及推斷確診人數的最大值。在選擇合適的數學模型過程中，我們從簡單的模型開始嘗試，通過對比不同模型，逐漸改善模型中存在的不足，最後得出最合適的數學模型。這亦符合 Blum 和 LeiB（2007）提出的建模週期（圖 5）。對於不同程度的學生可以為他們設計不同難度的數學模型進行學習，使他們感受學科之間的關係和學習類似的知識點，從而達到跨學科教學的目的。

參考文獻

[1] Annas, S., Pratama, M. I., Rifandi, M., Sanusi, W., & Side, S. (2020). Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia. *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, 110072.

[2] Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In: Haines, C. et al. (Eds), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood*, 222-231.

[3] He, S., Tang, S., & Rong, L. (2020). A discrete stochastic model of the COVID-19 outbreak: Forecast and control. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 17, 2792-2804.

[4] Ling, M. H., Wong, S. Y., & Tsui, K. L. (2017). Efficient heterogeneous sampling for stochastic simulation with an illustration in health care applications. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 46, 631-639.

[5] 沈朋裕 (2020) “數學建模-流行病的 S.I.R.模型” 教育部高中數學學科中心電子報 2020 年 3 月第 156 期

[6] 翁秉仁。傳染病之擴散模型。
http://episte.math.ntu.edu.tw/applications/ap_epidemic/index.html

10. 淺談總體比例的置信區間估算法

楊良河、陳昊

香港教育大學數學與資訊科技學系

置信區間 (Confidence interval) 是統計學上常用的工具，同時也是高中數學延伸單元一（微積分與統計）的最後一個學習單位。

本文第一部分想探討的是當樣本量小時，我們該如何為總體比例 (Population proportion) 建立比較準確的置信區間。第二部分想探討的是當所收集的數據出現缺失 (Missing) 時，例如電腦出錯導致遺失部分資料，我們該如何為總體比例建立置信區間。筆者們希望透過本文為各位老師及能力較高的同學提供一些統計學上的增潤知識。

樣本量小時總體比例的置信區間

總體比例是指在總體中具有一定特徵的比例，以 p 表示。現從總體中隨機抽取一大小為 n 的樣本，樣本比例 $\hat{p}$ 是指在樣本中具有同樣特徵的比例。對於樣本大時，我們知道樣本比例 $\hat{p}$ 是近似正態分佈，其總體均值為 p ，而總體標準差為 $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p(1-p)/n}$。由於總體比例 p 是未知的，因此我們無法計算 $\sigma_{\hat{p}}$ ，但我們可利用樣本比例來估計 $\sigma_{\hat{p}}$ ：

$$s_{\hat{p}} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}。$$

所以，當樣本大時，總體比例的 $100(1-\alpha)\%$ 置信區間約為

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} s_{\hat{p}} 。$$

這裡使用的 $z_{\alpha/2}$ 值是在給定置信水平上，從標準正態分佈中獲得的。例如對於 95% 置信水平，α 是 0.05，而 $z_{\alpha/2}$ 值為 1.96。

現在我們使用 R 軟件測試這公式，首先設定樣本大小 $n=70$，總體比例 $p=0.2$，然後讓電腦模擬抽樣十萬次，每次以 $p=0.2$ 的伯努利分佈 (Bernoulli distribution) 隨機抽出 70 個數據並建立 95% 置信區間。電腦模擬結果顯示這十萬個置信區間中，有 94.19% 都包含了總體比例，接近我們預期的 95% 置信度。

可是當樣本大小減至 $n=10$，電腦模擬結果顯示這十萬個置信區間中，只有大概 88.55% 包含了總體比例。甚至在這十萬個置信區間中有約一成的區間上限等於區間下限，這些零闊度 (Zero length) 的置信區間其實在統計學上是沒有意義的。而且有 56.97% 的置信區間包含了 [0, 1] 之外的區間。

其實早在 1927 年，學者 Wilson 已提出了一條更準確的公式。他首先指出，當樣本大時，

$$P\left(-z_{\alpha/2} \le \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha,$$

或

$$P\left((\hat{p}-p)^2 \le z_{\alpha/2}^2 \frac{p(1-p)}{n}\right) = 1-\alpha \quad 。$$

解開括號內以 p 表示的二次方程不等式後，我們可得以下置信區間的公式：

$$\left(\frac{1}{1+\frac{z_{\alpha/2}^2}{n}}\right)\left(\hat{p}+\frac{z_{\alpha/2}^2}{2n} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}+\frac{z_{\alpha/2}^2}{4n^2}}\right) \quad 。$$

電腦以此公式模擬出的結果顯示：當樣本大小為 $n = 10$，在十萬個模擬置信區間中，大概 96.73% 包含預設概率 $p = 0.2$。由此可見，新公式比舊公式更準確，而且所有置信區間都 [0, 1] 之內。更多其他情況的結果，可參考 Vollset (1993)。

缺失數據

在數據的收集過程中，數據的缺失是很常見的。一個近期的例子就是新冠狀病毒大流行。由於疫情席捲全球，各國藥廠加緊研發新疫苗，爭先完成第三階段臨床試驗並獲取世界衛生組織緊急批准使用。進行第三期試驗時，其中一個目標是找出疫苗在不同類別人士中的有效率，例如不同年齡層，長

期病患者等等。可是藥廠在收集數據時未必順利，因為參加者未必願意透露自己的敏感資料，例如是否有吸煙等，導致數據不完整，從而製造了一個統計學上的難題「缺失數據 (Missing data)」。解決這個難題的其中一個方法就是使用「多重插補法 (Multiple imputation)」。

在介紹多重插補法前，我們應首先了解「缺失數據」的不同情況。在上一段的例子當中，一些實驗參加者不願意透露自己有否吸煙，可能是因為他們的年齡和性別而將一個預測變量的問題留空（例如，年輕的男性參加者有傾向不作答跟吸煙相關的問題），那麼研究人員則可使用年齡和性別來協助估計缺失值並恢復數據的重要特徵。所以出現這些缺失數據並非完全隨機，在統計學上我們稱這些情況為「隨機缺失 (Missing At Random, MAR)」。另一個情況是電腦損壞或人手錯誤導致遺失部分資料，這樣出現缺失的資料就應該是完全隨機的，所以這個情況我們稱之為「完全隨機缺失 (Missing Completely At Random, MCAR)」。而本文介紹的將會是針對「完全隨機缺失」的處理方法。

假設原本我們以伯努利分佈抽取大小為 n 的樣本，但是有部分數據是完全隨機地遺失了，例如當 $n = 15$，

原始數據： ?, 0, 1, 1, 1, 0, ?, 1, 0, ?, 1, 0, ?, 1, ?

最簡單直接的方法是把遺失的數據刪除，然後只使用餘下的數據進行分析，但這個方法會令可用的數據減少，引致分析結果未必全面。使用「多重插補法」則可妥善地解決這個問題，並幫助我們計算出現「1」的概率（p）的置信區間。根據 Lott 和 Reiter（2020）的實驗，他們發現 MI Wilson 這個方法比較準確，並建議其他研究人員使用。此方法如下：

首先，計算原始數據中有多少個「1」和「0」，並把這兩個數字分別設為 a 和 b。之後使用 $Beta\ (a+1, b+1)$ [3]機選取一概率 p_0。然後使用 p_0 作為參數，以伯努利分佈插補那些遺失的數據，並組成第一組「已修復的完整數據」。重複 m 次插補的步驟後可得出 m 組「已修復的完整數據」。

第 1 組已修復的完整數據：	1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1
第 2 組已修復的完整數據：	0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0
	...
第m組已修復的完整數據：	1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0

[3] *Beta* 函數，為第一類歐拉積分，是一個特殊函數，定義為：

$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

雖然每一組已修復的完整數據均是採用同一個參數 p_0，但以伯努利分佈插補遺失數據時未必每次都完全一樣，故這 m 組已修復的完整數據並非全部一樣。

之後我們為每一組已修復的完整數據計算出對於總體比例的估算 $\hat{p}_i$ 及其方差的估算 U_i：

$$\hat{p}_i = \frac{X_i}{n}, \quad U_i = \frac{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}{n},$$

其中 X_i 是在插補後第 i 組中出現「1」的總數。然後根據以上 m 組數據的 $\hat{p}_i$ 和 U_i 計算出總體比例 p 的點估計 (Point estimation)：

$$\bar{p}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\hat{p}_i \text{ 。}$$

之後計算

$$\bar{U}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}U_i$$

$$B_m = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\hat{p}_i - \bar{p}_m)^2$$

$$r_m = \left(1+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{B_m}{\bar{U}_m}\right)$$

並得出方差的估算

$$T_m = \left(1+\frac{1}{m}\right)B_m + \bar{U}_m \text{ 。}$$

一般而言，置信區間應為

$$\bar{p}_m \pm z_{\alpha/2}\sqrt{T_m} \text{。}$$

不過根據本文上一部分 Wilson 的提出，我們可得出

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{p-\bar{p}_m}{\sqrt{T_m}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha \text{。}$$

由此可得

$$\frac{(p-\bar{p}_m)^2}{T_m} \leq z_{\alpha/2}^2$$

或

$$\frac{(p-\bar{p}_m)^2}{\bar{U}_m(1+r_m)} \leq z_{\alpha/2}^2 \text{。}$$

正如 Rubin (1987) 所論證的，通常在多重插補法，可以合理地假設 $\bar{U}_m \approx U = \frac{p(1-p)}{n}$。我們可得出：

$$\frac{(p-\bar{p}_m)^2}{\left(\frac{p(1-p)}{n}\right)(1+r_m)} \leq z_{\alpha/2}^2 \text{。}$$

解 p 可得 MI Wilson 的公式：

$$\frac{2\bar{p}_m + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n} + \frac{z_{\alpha/2}^2 r_m}{n}}{2\left(1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n} + \frac{z_{\alpha/2}^2 r_m}{n}\right)} \pm \sqrt{\frac{\left(2\bar{p}_m + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n} + \frac{z_{\alpha/2}^2 r_m}{n}\right)^2}{4\left(1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n} + \frac{z_{\alpha/2}^2 r_m}{n}\right)^2} - \frac{\bar{p}_m^2}{1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n} + \frac{z_{\alpha/2}^2 r_m}{n}}} \text{。}$$

我們利用電腦模擬當 $n = 100$ 但遺失了 30% 的數據。如果我們直接把遺失的數據全部刪除，那麼樣本量就會下降至 $n = 70$，電腦結果顯示這十萬個模擬當中有 94.07% 的置信區間包含預先設定的概率 $p = 0.2$。按上述的多重插補法組成 m =10 組已修復的完整數據，然後以 MI Wilson 的公式計算，電腦結果顯示這十萬個模擬當中有 95.10% 的置信區間包含預設概率，非常接近我們預期的 95% 置信度，故比直接刪除的置信區間更加準確。

結語

細心的讀者可能會發現文章第一部分中用 70 個數據組成的實驗覆蓋率為 94.19%，第二部分刪除完全隨機遺失的數據時，樣本量同為 70，但結果實驗覆蓋率卻是 94.07%，兩次實驗覆蓋率相差 0.12%。但其實這個結果是合理的，我們可以想為每一次電腦模擬就是一個採樣，當 $p = 0.2$ 和模擬十萬次時，標準差為

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{100000}} = 0.001265 = 0.1265\%。$$

所以兩次結果相差 0.12% 其實是正常並可以接受的。根據以上公式當我們把電腦模擬次數提升至一百萬時，$\sigma_{\hat{p}} = 0.04\%$。次數越大，標準差就越小，可是電腦模擬的時間就會倍大十倍，所以在平衡標準差和模擬時間後，研究人員（例如 Lott and Reiter, 2020）一般會使用十萬次為電腦模擬次數。

此外，本文均採用從標準正態分佈中獲得的 $z_{\alpha/2}$ 值。但其實亦可使用由「學生t分佈」 (Student's t-distribution)中獲得的分位數 t_v，其自由度 (Degrees of freedom) 為 $v=(m-1)(1+1/r_m)^2$。有興趣的讀者可以閱讀 Lott and Reiter (2020) 的文章，並發掘他們採用學生t分佈的理據。

參考資料

[1] Lott, A., & Reiter, J. P. (2020). Wilson confidence intervals for binomial proportions with multiple imputation for missing data. *The American Statistician*, 74(2), 109-115.

[2] Rubin, D.B. (1987), *Multiple Imputation for Nonresponse in Surveys*, New York: Wiley.

[3] Vollset, S.E. (1993). Confidence intervals for a Binomial proportion. *Statistics in Medicine*. 12(9), 809-824.

[4] Wilson, E. B. (1927). Probable Inference, the Law of Succession, and Statistical Inference. *Journal of the American Statistical Association*, 22, 209–212.

11. John Horton Conway 教授七分半鐘的挑戰

何國斌、張家麟

香港教育大學數學與資訊科技學系

2020 年 4 月 12 日，當全球正為 COVID-19 而惶恐不安之際，在數學工作者的 WhatsApp 群組裏傳來 John Horton Conway 教授因感染病毒去世的消息！

Conway 教授生前是普林斯頓大學 Von Neumann 數學名譽教授。他是十一本數學專著和多篇數學論文的作者，是一位不折不扣的數學天才。他將深刻的組合洞察力與代數技巧相結合，用以構建和研究代數結構，特別是當中的奇特 (off-beat) 結構，這些結構以完全出乎意料的方式，闡明了各種各樣的問題。他對有限群理論、紐結理論、集合論和自動機理論 、博弈論及其實踐，均有傑出的貢獻。他也是一位才華橫溢的業餘魔術師。

Conway 教授在 2017 年 4 月他 79 歲時到訪過香港和澳門，這是他唯一的一次「香港之旅」，有興趣的讀者可參閱 [1] 以了解當中的緣起和經過。筆者們有幸參與 Conway 教授在香港數天，訪問香港教育大學數學與資訊科技學系時的接待工作。除了出席他的兩個精采專題演講: 「自由意志定理 (The Free Will Theorem) 」和「24 維中的遊戲和數字 (Games and Numbers in 24 Dimensions) 」之外，更有機會與

他吃飯、喝茶，「閒聊」數學，親炙這數學天才對數學的種種想法，實在獲益良多！

本文記載了「閒聊」期間的一個適合中學數學教學的討論，內容是有關級數求和的。期望讀者可在當中，體驗天才數學家高超的數學視角及非凡的教學思想。

伯努利的級數求和挑戰！

2017 年 4 月 26 日早上，Conway 教授笑咪咪的扶著手杖，一步一拐的走進我們學系為他專設的辦公室，尚未坐下，便對我們兩人說：「昨天你們問及有些甚麼適合在一、兩個課節裏，與中學生探究的數學課題，我想到了一個，現在和你們分享。」教授沒有坐在靠近特別為他預設的黑板和粉筆的一方，而是要我們幫他坐到辦公桌旁。放好手杖後，他便要我們拿出紙和筆。原來他說要我們兩人動手動腦跟他體驗數學！

John H. Conway 教授七分半鐘的挑戰:

「Jakob Bernoulli（1655-1705）在他的著（遺）作 Ars Conjectandi（1713）中記載他用了 7 分半鐘便算出
$1^{10}+2^{10}+\cdots+1000^{10}$ 的結果，你們能夠嗎？」

當 Conway 教授徐徐道出他的挑戰題時，我們兩人都愕在哪裏！但教授隨即說道：「讓我們一起動手試試！」原來教

授要我們拿紙和筆的用意在此。與此同時，一絲神祕的笑容在數學天才的嘴角浮現，預示著我們這段奇妙「數學探究」的展開!

Faulhaber's 三角和冪級數求和公式

Conway 教授首先提問，你們能否寫出連續數 1 到 x 的

i. 求和公式；
ii. 求平方和公式；與
iii. 求立方和公式?

當他看到我們這三題的「標準答案」：

$\frac{x(x+1)}{2}$ ，$\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$和 $\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2$時，

他旋即追問，對於每個整數 n, $n \geq 0$，可以將 n 次方求和公式，表達成以 x 為變數的多項式 $S_n(x)$ 嗎？它們各項的系數是怎樣的？

$$1^0 + 2^0 + \cdots + x^0 = S_0(x) = x$$

$$1^1 + 2^1 + \cdots + x^1 = S_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + x^2 = S_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + x^3 = S_3(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

於是我們按教授的指示將答案整理成上方的形式，這樣，竟然為我們帶來新發現。

觀察 $S_0(x)$到 $S_4(x)$的表達式，我們猜想：

(1) $S_n(x)$是x 的 n+1 次多項式，

並推斷

(2) 由於$S_n(0) = 0$，它的常數項為 0;

(3) 由於$S_n(1) = 1$，所以多項式各項系數之和為 1。

Conway 教授此時開始邊說邊寫地用紙筆作闡釋：利用多項式 $S_n(x)$ 表示整數 1 到 x 的 n 次方求和公式，歷史上稱為 Faulhaber 公式。居於德國 Ulm (愛因斯坦出生之地) 的數學家 Johann Faulhaber (1580-1635)在他的著作 *Academia Algebrae* 給出了 $n = 13$ 的多項式公式$S_{13}(x)$，他更有 The Great Arithmetician 的美譽。按 n = 0、1、2 … 順序將 Faulhaber 公式 $S_n(x)$的系數列出，便可得到 Faulhaber's 三角：

$n=0$	1			
$n=1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$n=2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	
$n=3$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0

微積分是數學探究的好幫手!

對整數$n \geq 0$ ，設 Faulhaber 公式 $S_n(x)$是 x 的 $n+1$次多項式:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k^{(n)} \ x^k$$

當 $n \geq 1$時，要看出 $S_{n-1}(x)$ 與 $S_n(x)$的之間的關係，可考慮

$S_n(x) = 1^n + 2^n + \cdots + x^n$ ，並注意到：

$$S_n(x) - S_n(x-1) = x^n$$

等式兩邊對 x 微分，並除以 n 得

$$\frac{S_n{}'(x) - S_n{}'(x-1)}{n} = x^{n-1}$$

連繫 $S_{n-1}(x)$ 得

$$\frac{S_n{}'(x) - S_n{}'(x-1)}{n} = x^{n-1} = S_{n-1}(x) - S_{n-1}(x-1)$$

即

$$S_n(x) - S_n(x-1) = n \int [S_{n-1}(x) - S_{n-1}(x-1)] \ dx$$

由這關係式，Conway 教授引導我們這樣想：可將 Faulhaber 公式 $S_{n-1}(x)$乘以 n，再對 x 積分後便會得到作為 $n+1$

次多項式的 $S_n(x)$中的 2 到 $n+1$ 次項系數。($S_n{}'(x)$中的常數項，即 $S_n(x)$中 x 項的系數在$S_n{}'(x)-S_n{}'(x-1)$處被消去了。) 這樣剩下 x 項的系數便可從 $n+1$ 個系數之和為 1 這關係去決定。

總結而言，Conway 教授的推斷 (證明參見附錄 I)：
若果對整數$n \geq 0$ ，Faulhaber 公式 $S_n(x)$ 是 x 的 $n+1$ 次多項式:

$$1^n+2^n+\cdots+x^n=S_n(x)=\sum_{k=1}^{n+1} a_k^{(n)}\ x^k$$

對整數$n \geq 1$ ，下列關係成立：

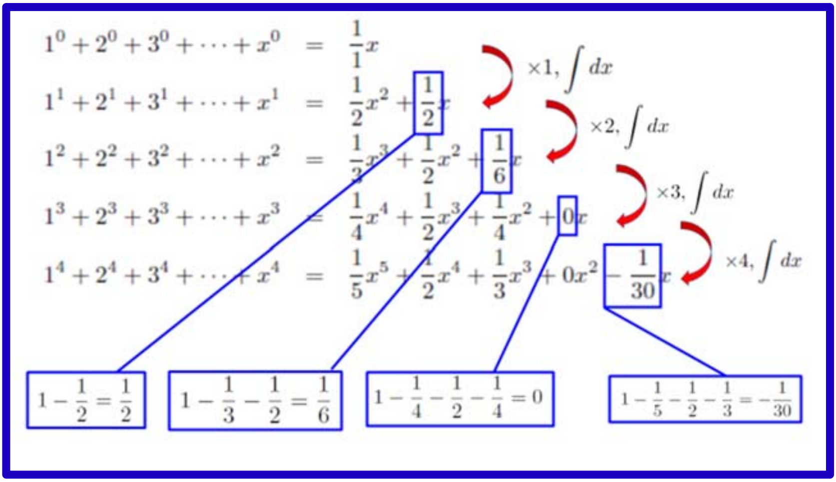
(I) 垂直關係

設 $a_k^{(n)}$是 Faulhaber 公式 $S_n(x)$中 x^k 的系數，其中 $2 \leq k \leq n+1$，則有

$$a_k^{(n)}=\frac{n}{k}a_{k-1}^{(n-1)}$$

(II) 水平關係

$$a_1^{(n)}=1-\left(\sum_{k=2}^{n+1} a_k^{(n)}\right)$$



我們可按$n = 1, 2, \ldots, 10$這順序，利用(I) 垂直關係和 (II) 水平關係，由 $S_0(x)$ 得到 $S_{10}(x)$的 Faulhaber 公式。這一步接一步的計算，如上圖所示，就像玩填字遊戲一般，我們一層接一層的去把 Faulhaber 三角填好。Conway 教授和我們大約花了十多分鐘，便將「填字遊戲」完成。 當然，Conway 教授以首名完成!

$n=0$	1											
$n=1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$										
$n=2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$									
$n=3$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{12}$	0								
$n=4$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{12}$	0	$-\frac{2}{60}$							
$n=5$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	0	$-\frac{1}{12}$	0						
$n=6$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{12}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{42}$					
$n=7$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	0	$-\frac{7}{24}$	0	$\frac{1}{12}$	0				
$n=8$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{12}$	0	$-\frac{7}{15}$	0	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{1}{30}$			
$n=9$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{12}$	0	$-\frac{7}{10}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{20}$	0		
$n=10$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{12}$	0	-1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{66}$	

我們終於得出 $n = 10$ 的 Faulhaber 公式:

$$1^{10} + 2^{10} + \cdots + x^{10} = S_{10}(x)$$

$$= \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{2}x^{10} + \frac{5}{6}x^{9} - x^{7} + x^{5} - \frac{1}{2}x^{3} + \frac{5}{66}x$$

迎接 7 分半鐘的挑戰

(參閱 附錄 II - John Conway 教授的手寫筆記)

萬事俱備，現在我們與 Jakob Bernoulli 一般，手上有 $n = 10$ 的 Faulhaber 公式 $S_{10}(x)$，是時候接受挑戰了，時限七分半鐘。這時的 Conway 教授卻從容不迫，一邊在紙上示範計算，一邊還給我們講解！

在首分鐘，他給出計算提示：以「列表」「利用數字關係」和「尋找規律」等「解難策略」，幫助我們計算。我們先畫出下表，並將 $S_{10}(x)$的各項臚列在左方，而對應的數值計算則會放在右方，最後再計算總和。

$x = 1000$	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^{-1}	x^{-2}
$x^{11}/11$													
$x^{10}/2$													
$5x^9/6$													
$-x^7$													
x^5													
$-x^3/2$													
$5x/66$													
Sum													

接下來，我們便要逐項計算填表。這個過程，可以由大師身上體現甚麼叫做「數字感」！由於 $x = 1000$，故此 Conway 教授提示右方的欄位可以 x 的降冪序排列，而每欄預約可填「三個數字」的欄闊。舉例而言，要計算首項 $x^{11}/11$，$\frac{1}{11} = 0.090909\cdots$ 乘上1000^{11}， 便如下表首列所

示，是一個無限循環小數。但最有趣的計算還是發生在最後的一項$\frac{5}{66}\times 1000$，沒有計算機在手，Conway 教授的計算方法是 $\frac{5}{66}\times 1000=\frac{2.5}{33}\times 1000=\frac{7.5}{99}\times 1000=75.7575\cdots$

$x=1000$	x^{11}	x^{10}	x^{9}	x^{8}	x^{7}	x^{6}	x^{5}	x^{4}	x^{3}	x^{2}	x^{1}	x^{-1}	x^{-2}
$x^{11}/11$	090	909	090	909	090	909	090	909	090	909	090.	909	$090\cdots$
$x^{10}/2$		500	000	000	000	000	000	000	000	000	000.	000	$000\cdots$
$5x^{9}/6$			833	333	333	333	333	333	333	333	333.	333	$333\cdots$
$-x^{7}$				-1	000	000	000	000	000	000	000.	000	$000\cdots$
x^{5}						1	000	000	000	000	000.	000	$000\cdots$
$-x^{3}/2$									-500	000	000.	000	$000\cdots$
$5x/66$											75.	757	$575\cdots$
Sum	91	409	924	241	424	243	424	241	924	242	500.	000	$000\cdots$

我們三人用了五分鐘不到的時間，便把表填好。在最後的分半鐘，我們應用小學的「進位加法」將各項相加，當然這裏要處理的是無限循環小數，從而得出：

$$
\begin{aligned}
1^{10}+2^{10}+\cdots+1000^{10} &= S_{10}(1000)\\
&= 91409924241424243424241924242500
\end{aligned}
$$

讀數學歷史會知道，解有實根的三次方程，往往先要跳進複數域作運算求解，然後再回到實數域的答案中。想不到，這一回計算有限的整數值 $1^{10}+2^{10}+\cdots+1000^{10}$，也要通過無窮小數的運算，真的長了知識！

這樣，我們三人都能「過關」，順利完成桃戰！這時笑容除了燦爛地在 Conway 教授臉上延續外，也開始在我們的臉上浮現了，我們彷彿也能感受到 Jakob Bernoulli 當年的喜悅！

這時，我們打趣的問，為甚麼是七分半鐘（拉丁文： intra semiquadrantem horae, 英文：inside half of a quarter of an hour) 而不是別的時間？本來這只是一條「過場」的問題，誰知 Conway 教授卻一臉正經地說:「我也覺得有趣！ 最近我閱讀了與 Jakob Bernoulli 晚一點的義大利冒險家 Giacomo Casanova（1725-1798）的 Chevelier de Seingault ，發現當中有兩個地方，應用了同樣的表達去形容時間。我想這大概是當時對一個短時間的流行表述方式。確切的來源我不清楚，但我猜可能與當年教堂對某些報時的鐘聲間距有關……」想來天才數學家不單睿智專精，也博學通達！

最後 Conway 教授將 Faulhaber triangle 最右方斜線上的數字圈了出來，並指出這是一個在數論及組合數學中非常有名的序列，名叫伯努利數（Bernoulli Numbers）序列，它有很多奇妙的性質和有趣應用，有興趣的話，可參閱他的書：The book of numbers [2] 。

	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}
$n=0$	$\boxed{1}$										
$n=1$	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$									
$n=2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{2}{12}}$								
$n=3$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{12}$	$\boxed{0}$							
$n=4$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{12}$	0	$\boxed{-\frac{2}{60}}$						
$n=5$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	0	$-\frac{1}{12}$	$\boxed{0}$					
$n=6$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{12}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\boxed{\frac{1}{42}}$				
$n=7$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	0	$-\frac{7}{24}$	0	$\frac{1}{12}$	$\boxed{0}$			
$n=8$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{12}$	0	$-\frac{7}{15}$	0	$\frac{2}{9}$	0	$\boxed{-\frac{1}{30}}$		
$n=9$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{12}$	0	$-\frac{7}{10}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{20}$	$\boxed{0}$	
$n=10$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{12}$	0	-1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\boxed{\frac{5}{66}}$

結語

對數學天才的成就，人們往往會讚嘆：「高山仰止，景行行止」，雖不能至，然心嚮往之。但是 Conway 教授卻不像高山般孤寂而不可即，相反，七十九歲曾經中風的他，飄洋過海，來到陌生的香港，用紙、筆和黑板，向著陌生的我們，闡釋他鑽研數學的心得，分享他探究數學的喜悅，這不正是一個數學家又還是數學教育家的無私奉獻嗎？

Conway 教授在 2017 年 4 月訪港返美後，同年 11 月第二度中風，直至 2020 年 4 月離世，中間他應該都在美國渡過，香港之行是他人生最後的一次外遊。謹以此小文章向這位一生貢獻數學的天才致敬！

參考文獻

[1] Roberts, P. (2020 April). John Horton Conway Remembered (4-pages online article) https://www.academia.edu/44687953/John_Horton_Conway_Remembered

[2] Conway, J. H. & Guy, R. K. (1996). The Book of Nunbers, New York: Copernicus.

附錄 I

我們證明，對於每個正整數 n ，存在多項式 $S_n(k)$ 使得

$S_n(k) = 1^n + 2^n + \cdots + k^n$ (1)

對於每個正整數 k 成立。

假設對於每個正整數 n ，$S_n(k)$ 是對每個正整數 k 滿足 (1) 的多項式。則對於每個正整數 k，我們有

$$S_n(k+1) = S_n(k) + (k+1)^n$$

由於這些多項式在無限集上一致，因此

$S_n(x+1) = S_n(x) + (x+1)^n$ (2)

對於每個實數 x 成立。這裏，我們應用了如下事實：若兩多項式在一無限集上相等，則兩者各項的系數相等，從而兩者在實數域中也相等。

對等式 (2) 的兩邊取 x的微分，得

$S_n{}'(x+1) = S_n{}'(x) + n(x+1)^{n-1}$,
特別地，有

$S_n{}'(1) = S_n{}'(0) + n.1^{n-1}$,

$S_n{}'(2) = S_n{}'(1) + n.2^{n-1}$,

.

.

.

$S_n{}'(k) = S_n{}'(k-1) + n.k^{n-1}$;

結合這些我們得到

$S_n{}'(k) = S_n{}'(0) + n(1^{n-1} + 2^{n-1} + \cdots + k^{n-1})$.

因此，如果 n 和 k 是正整數， $k > 1$，我們有

$$S_n{}'(k) = S_n{}'(0) + n\ S_{n-1}(k).$$

從而，對於每個實數 x,

$$S_n{}'(x) = S_n{}'(0) + n\ S_{n-1}(x).$$

故此有一個數 c 使得

$$S_n(x) = S_n{}'(0)x + n\int_0^x S_{n-1}(t)dt + c. \qquad (3)$$

由(1)和(2)可知$S_n(1) = 1$且$S_n(0) = 0$由此依次得出$c = 0$和

$S_n{}'(0) = 1 - n\int_0^1 S_{n-1}(t)dt$.

積分得

$$S_n(x) = n\int_0^x S_{n-1}(t)dt + \left(1 - n\int_0^1 S_{n-1}(t)dt\right)x \qquad (4)$$

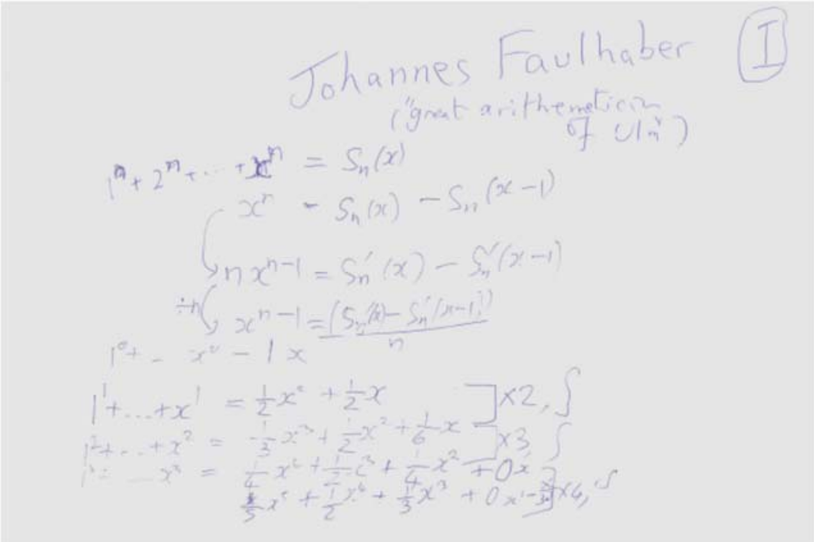
它根據 $S_{n-1}(x)$ 完全地確定了 $S_n(x)$。結合上述的推導，我們證明了以下的定理：

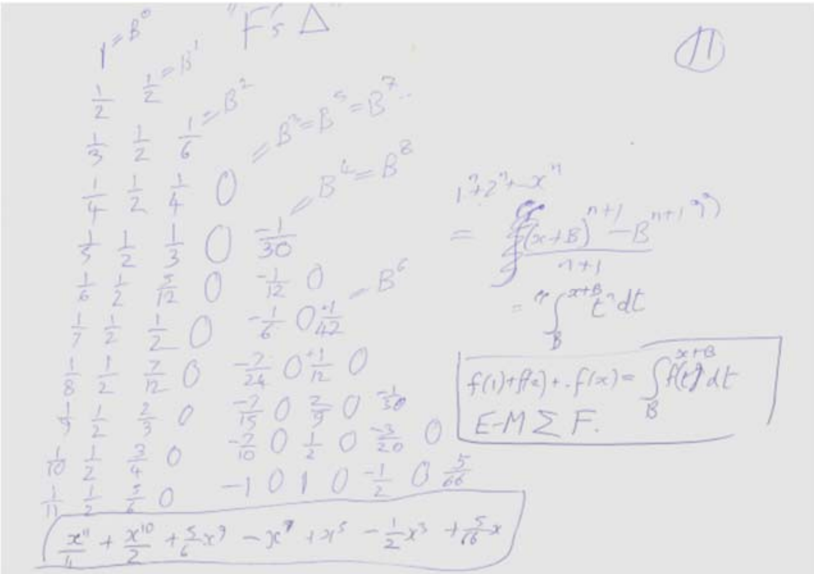
定理．設$S_0(x) = x$ 為多項式，它對於每個正整數 r 的值為 $1^0 + 2^0 + \cdots + r^0 = r$。對於每個大於 0 的整數 n，根據 $S_{n-1}(x)$通過 (4) 定義 $S_n(x)$。然後，對於每個正整數n 和 k，$S_n(k)$滿足(1)。

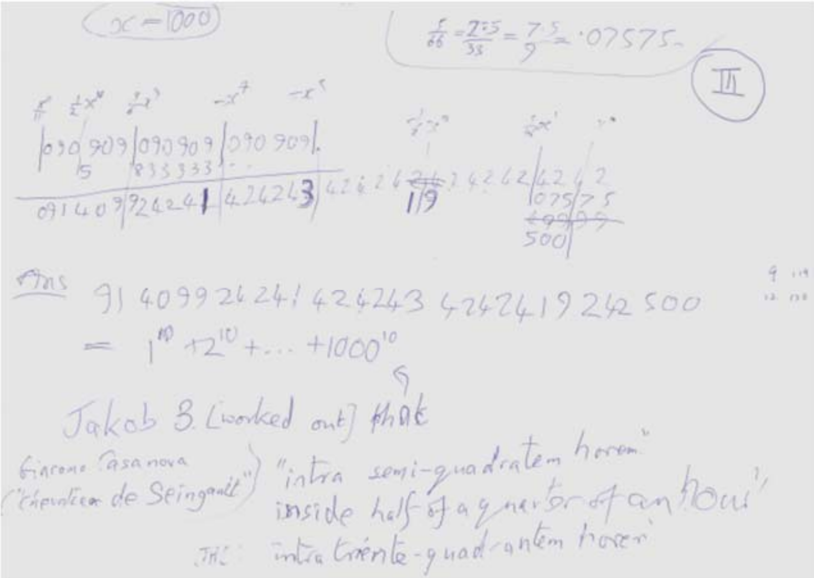
由 (4) 及 $S_n(1) = 1$，我們推出：

推論．正文中的 (I) **垂直關係**和 (II) **水平關係** 成立。

附錄 II - John Conway 教授的手寫筆記







按：由於 Conway 教授要邊書寫、邊講解，筆記中存在了明顯而無傷大雅的小筆誤，例如在上方 III 中，他將 7.5/99 寫作 7.5/9，又或是在抄寫

$$91409924241424243424241924242500$$
$$= 1^{10} + 2^{10} + \cdots + 1000^{10}$$

中將

$$91409924241424243424241924242500$$

寫成

$$914099242414242434242419242500$$

漏了一個”42”，相信這些都會被讀者所理解和明白的！

12. 全校性 STEM 教育計劃

黃諾詩

天主教聖安德肋小學

STEM 教育 培養創新探究精神

本校多年來致力推動科學與科技教育，除了配合課程外，亦設計了一個別具一格的校本 STEM 課程，分別在常識科、電腦科和資優小組中為學生帶來各種科學與科技的學習體驗。

配合課程

在數學科中，教師於低小著重培養學生的基礎運算能力，配合活動，例如一年級製作紙圈飛機後需數腳步以記錄飛機所飛行的距離，培養數數的能力。而於高小，教師則著重培養學生在邏輯思維方面的能力，例如五、六年級教師會為學生安排校園數學遊蹤，讓學生在熟悉的環境入手，從而發現校園內處處有數學！另一方面，每年數學科各級設數學挑戰站七次，讓學生嘗試做一些數學解難題及開放題，培養學生從多角度思考問題，

同時亦能訓練學生邏輯思維及解難能力，以提高學生對數學的興趣。

在常識課中，教師為學生設計與課程相關的實驗活動，讓學生深入了解有關課題。例如三年級教師會為學生安排保溫盒製作活動，讓學生動手做，能了解其原理之餘，有趣又好玩！又例如六年級學習槓桿原理後教師讓學生自製大炮台，除了量度距離外，亦需計算多次實驗的平均數。

在電腦課中，本校於 2020-2021 年度參與「賽馬會運算思維教育」計劃下的 CoolThink@JC Programme，於四至六年級發展校本程式編寫及運算思維課程，發展學生的邏輯思維能力。本校亦於各級引入機械人編程課程，一至六年級學生均有機會學習機械人編程語言，透過程式控制機械人活動，藉此訓練學生的創意、設計與解難能力。近年，本校更引入 3D 打印

技術，於六年級推行 3D 打印設計課程，學生可發揮創意，以 3D 設計軟件及 3D 打印機印製自創的立體作品。

數學週

本校每年於數學週設小息攤位遊戲，讓學生透過遊戲複習及鞏固在課堂中所學到的數學知識。同時，學生可以從遊戲中培養自學能力，提高學生對數學的興趣，並增加學生之間的互動性。

在數學週內，數學科教師亦會細心挑選數學圖書推介給學生，讓學生透過閱讀課外書，學到課本以外的數學知識，同時培養學生的閱讀興趣，提高學生自學數學的能力。

常識週

每年四月均設常識週，以提升學生對科學的興趣，以及培養學生的探究精神。教師日常會教導資優小組「小小科學家」成員進行各式各樣的科學實驗，在常識週期間，便由「小小科學家」成員於小息時段教導全校學生動手做實驗，在豐富同學的學習經歷之餘，亦提供很好的機會讓資優小組成員大顯身手，增強自信。

常識週內亦設科學圖書展覽，本校每年向中央圖書館借用 STEM 圖書於校內作展覽，此舉不但能讓學生有機會閱覽更多科學圖書，亦能善用政府資源。

下午特色 STEM 課程

本校在循環週 DAY 6 下午設立 SMART 時段，為一至六年級學生安排校本 STEM 課程，為學生提供進行科學活動以及實驗活動的機會，並加入資訊素養提升課程和天文課，讓學生有機會涉獵不同範疇的知識，從而培養創新探究的精神。

特別要提到本校 SMART 時段由所有教師輪流上課，即無論教師有否任教數學或常識科，均需入課室教授 STEM 課。因此，清晰的教案及教師指引極其重要！各教師會提前收到課堂資料，如有不明白的地方可盡快尋求協助，以減低教師的擔憂。同時，對於較難掌握的內容，本校特設教師負責拍攝短片，讓教師能加深認識。另一方面，本校設專家教師計劃，即每年盡量安排同一位教師任教同一個課題，希望教師能教授自己熟悉的課題，提升信心。

由於學校不一定有足夠的教具讓一級五班同時學習同一個課題，而禮堂的運用亦需妥善安排，因此本校 SMART 時段採取循環課模式進行，讓教具及場地資源得以充分利用。

2020-2021 年度各級 STEM 學習課題		
一年級		
健康使用電腦	幻影	我們的星空
聖誕叮叮噹	紙圈飛機	簡易紙飛機
兜蟲與鍬型蟲	資訊素養講座	磁力車
如何運用常識科電子學習材料	不同的物料 + 透明體/不透明體	護園兵團(防水指示牌)
二年級		
我們的月球	植物的生長	聖誕叮叮噹
簡易紙飛機	我們的太陽	登月夢
資訊素養講座	空氣炮	紙盒船
如何運用常識科電子學習材料	聖安德肋玩具大賞	健康使用互聯網
三年級		
竹蜻蜓	火星任務	資訊素養講座
STEM 聖誕樹	水的張力	星空的故事
震子機械人	風向儀	隔熱屋頂
資訊處理與網上私隱	冷縮熱脹+冷暖	顯微世界

四年級		
資訊科技課	過濾器	我們的太陽系
STEM 聖誕樹	資訊科技講座	浮沉子
風車設計	機關王	火星任務
齊來認識知識產權	食物脂肪測試	針孔照相機
五年級		
資訊科技課	雙動力風車	電能風力船
電路聖誕卡	天文講座：極光	資訊科技講座
天文講座：恆星	朱古力的科學	閉合電路
隔音盒	太陽系模型活動	機械車比賽
六年級		
移動迷宮	雙動力風車	馬蹄蟹講座
天文講座：極光	震子畫圓	大炮台
斜面	槓桿	滾子及摩擦力
天文講座：星際旅行者	小發明大賞	機械車比賽

資優小組

除此之外，本校亦開設了多個與 STEM 相關的資優培訓小組，如「小小科學家」、「天文智多星」、「數學小博士」、「 電腦特攻隊」、「機械人設計小組」、「四驅車小組」等，以提供多元化的學習機會，讓學生能發揮所長，提升創意和應用能力，達致 STEM 教育的目標。

13. Experiences on Nurturing Students' Computational Thinking in Mathematics Lessons of a primary STEM Seed Project

Dr LEUNG King-man, Ms AU Wing-mei, Mr CHAN Man-to
Mathematics Education Section

Ms LEE Ka-li
S.K.H. Kei Fook Primary School

In order to meet the increasing challenges of the 21st Century, Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM) education with focusing on computational thinking (CT) can be an innovative way of learning and teaching mathematics, particularly on using coding activities to implement in the primary Mathematics classrooms. This paper reports the experiences of teachers and students at different Hong Kong primary levels in the course of using interactive coding activities for these purposes to develop students' CT skill and mathematical ability. In particular, the findings may serve as examples for teachers to generalise them to apply for the other mathematics contents or topics in their lessons to nurture students' CT skill.

INTRODUCTION

Computational thinking (CT) and coding are problem-solving methods that can be adopted at different stages of learning, particularly in the subject of Mathematics. Integrative approaches among Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM) subjects have positive effects on student attainment, with better results in elementary schools (Becker & Park, 2011). In recent years, a growing number of studies and reports, all over the world, refer to the importance of integrating STEM in order to meet the increasing challenges of the 21st Century (Baker & Galanti, 2017; Rocard et al., 2007). It is noted that mathematics lessons with STEM elements can provide students with the context in which they can make meaningful connections between mathematics and STEM subjects (Becker & Park, 2011) and by using dedicated activities with coding elements, students' CT skill can be developed. The computational thinking is defined by Wing (2006) as a thought process involved in programming. And in this Study, the term "coding" is generally used instead of "programming" as in primary level, the requirement on programming may be a bit technical, structural and advance. On the other way, computational thinking is also considered as an essential skill for 21st century students. Brennan & Resnick (2012) have presented three major dimensions of computational thinking: 1) concepts:

e.g. sequences and loops; 2) practices: e.g. testing and debugging; and 3) perspectives: expressing or questioning. They illustrate their framework with practical examples with Scratch - a programming environment which engages users to creative problem-solving activities by programming, like those STEM activities designed in this Study. In addition, many organisations/regions/countries such as the reports of UNESCO/IFIP TC3 Meeting at OCCE (UNESCO, 2018), UK (Miles, 2013), Singapore (MoE, 2020), Hong Kong (EDB, 2020) and Australia (NSW, 2019), etc. put coding into their curriculum, especially in elementary levels to nurture students' CT, logical and problem-solving skills.

BACKGROUND AND AIM OF THE STUDY

In order to enhance students' computational thinking and coding through activities in mathematics lessons, schools generally provide mathematical problems e.g. inputting data to the formula to calculate the numerical values during the first stage of learning to help enlighten students in the future of computational thinking and coding. Many of these activities have their own rules and steps, involving sequence and looping conditions, which are already the preliminary concepts of computational thinking. Besides, the relationship between mathematics and coding is that the focus of coding education is to enable students to master coding skills, and to apply them to different situations to complete set tasks/work. Based on the investigation and findings of the previous Study (Leung & Tang, 2021), this Study tries to further explore on how students' CT skill can be developed through coding activities implemented in mathematics lessons and how teachers can select an appropriate coding tool for their students. Before reporting the experiences gained in this Study, the following table is the extraction and highlights of the aforesaid different countries/regions on how they put Coding education into their school curriculum, especially in elementary levels to nurture students' computational thinking.

Country / Region / Organisation	Characteristics / Action
Report of UNESCO/ IFIP TC3 Meeting at OCCE	• The renewed focus on "coding" or programming and a stronger Computer Science content is stated. • Key Needs to be addressed: support countries in developing their curricula in relation to programming/coding (for example, in Denmark, development of digital literacy including coding skill for students in 4th grade). (UNESCO, 2018)

Country / Region / Organisation	Characteristics / Action
Singapore	• Singapore makes coding classes mandatory for primary school students, starting 2020. • All upper primary school students in Singapore have to undergo a mandatory 10-hour coding program. • This initiative is aimed at helping young students develop an appreciation of computational thinking and coding concepts. (MoE, 2020)
Hong Kong	• The focus of coding education is to equip students with coding/programming skills. • To teach coding in Primary 4 to Primary 6 is to develop students' knowledge, skills and attitudes to face the future of the growing digital economy. • Computational thinking and coding are a problem- solving method that can be used at different stages of learning and in various disciplines. (EDB, 2020)

Country / Region / Organisation	Characteristics / Action
Australia	• For students, application of coding and computational thinking is set already in the existing subjects, including biology, physics, mathematics. • For teachers, teaching coding and computational thinking in the classroom have to be implemented. (Department of Education, NSW, 2019)

The above international perspectives totally support why the essence of this Study is and what the research direction of this Study is. With reference to the design and development of the coding activities gained before (Leung & Tang, 2021) and the coding tool "Scratch" is selected for this Study, similar lesson try-out arrangement is adopted. That is during the lesson students are arranged in groups and discuss how to write codes to solve the mathematical problems, for examples, by using the Scratch to write codes (a) to test and find out the divisibility of a 3-digit number by 3 in Number Strand; and (b) to draw symmetrical figures in Shape and Space Strand. Based on the above, the research questions of the Study are set to investigate and explore: (a) how to nurture students' CT skill by applying their mathematical knowledge to solve the coding activities in mathematics lessons, especially in the Strands "Number" & "Shape and Space"; and (b) how to be effectively disseminated and transferred to the gained experiences to other schools with focusing on promoting CT skill in mathematics lessons.

METHODOLOGY AND DATA COLLECTION

Data are collected from a longitudinal study of the Seed project conducted by Education Bureau for the past few years and in the school year 2020/21, the teacher researcher's own school joined this STEM project. She was a seconded teacher, and one of her major tasks was to prepare, conduct and collect the data from the try-out lessons. The teacher researcher also served as the key person of the project and conducted school visits for the other 3 participating primary schools and her school serving as the leading school. She collaborated with teachers to design, develop and try run the coding activities in the Mathematics lessons. For the Number Strand, as the topic "4N2 Division (II)" was identified and selected, a class in P.4 level was invited to join the try-run of the coding mathematical activities. Besides, after a coding activity had developed and tried in a certain school, the coding activity would be re-run in the other Project schools later so as to further modify and polish the activity. Different school experiences could be gained so as to nurture and enhance students' learning in coding and CT skills, and the activity would be uploaded to the Internet for other schools' reference and use.

For another trial presented in this paper, the topic "6S1 Symmetry" of the Shape & Space Strand was involved. Almost the same arrangement was scheduled for the tryout schools, and the coding activity using Scratch to solve the mathematical problem to nurture students' CT skill was developed by the teacher researcher and the teachers of the tryout schools collaboratively. Apart from the above, data from classroom observation, document analysis, teachers' and student's discussion and students' annotated work were collected. The qualitative data analysis was performed. Towards the end of the project, a number of well-developed coding activities were uploaded to the internet for schools' use and reference.

DATA ANALYSIS, DISCUSSION AND FINDINGS

As teachers knew the coding activities as a means to provide opportunities for developing students' CT skill and mathematical ability, different Mathematics topics in different Strands in the curriculum were selected to develop appropriate coding activities for students at different primary levels.

Student's Coding Activity in Mathematics Lessons

For the trial conducted in the teacher researcher's school, teachers identified a Mathematics topic in P.4 related to test the divisibility of a 3-digit number by 3 in Number Strand. Scratch was chosen because students could drag and drop the pre-set codes to easily form the required instructions to complete the coding activity by inputting parameters. For example, to test the number "354", students only needed to input the digits "3", "5" & "4" into the place as shown below (Figure 1).

Figure 1

During the lessons, teachers distributed the coding worksheet to students. After answering teacher's guiding questions to know how to do the test of the divisibility of a 3-digit number by 3, students discussed among themselves and attempted to write and run their codes to do the worksheet. Below (Figure 2) were some of the snapshots of students doing the coding activity in the lesson captured.

Figure 2: Scratch scripts and student learning in the class

Actually, students felt easy in completing the coding activity to test the divisibility of a 3- digit number by 3 as the Mathematics teacher guided them to build the blocks. Students then inserted the parameters into the blanks and filled the outcomes into the worksheet to complete the coding activity successfully.

For another coding trial selected from the STEM project, teachers identified a Mathematics topic in P.6 related to symmetric figures in Shape & Space Strand so as to see whether students' CT skill could be nurtured in a different Strand, say "Shape and Space", by using the same IT tool "Scratch". Similar lesson arrangement as the first trial was adopted. During the lessons, teachers distributed the coding worksheet to students, and discussed with them how to perform the coding activities and what the coding exercises were required. Then, students tried to write and run their codes. Below (Figure 3) was the teacher's sample scripts for the students with the axis of symmetry and the two pens (red and blue in color) for drawing (Figure 4).

Figure 3

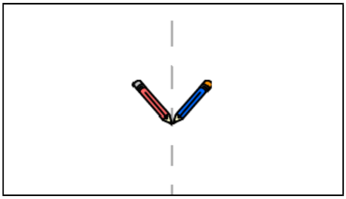


Figure 4

Students followed the teacher's instructions to complete the scripts for other three directions of moving (Figure 5).

Figure 5

Students completed the coding activities and showed their learning outcomes successfully and satisfactorily. The classroom situation at that time and students' learning outcomes were captured (Figure 6).

Figure 6: Students' sample scripts & outcomes and classroom situation

In sum, teachers' reflection on the above trials was that (1) students showed interested in learning coding; (2) students could apply their mathematical knowledge and CT skill to complete the coding activities; (3) students needed time to familiarise themselves with the IT platform/tool as some "building block" techniques and parameters/syntaxes were new to them; and (4) the selection of an appropriate IT tool was a bit difficult as per their cognitive development. On the other hand, students' feedback was positive and consistent that (1) they were glad to learn Mathematics in such environment; (2) through doing the coding activities, they could connect the abstract mathematical knowledge to the practical problems/situations; and (3) writing codes to solve mathematical problems was very interesting and it made the lessons more attractive and dynamic.

Development of Resources to Nurturing Students' Computational Thinking

During the collaborative lesson preparation, the teacher researcher and teachers involved in the trial planed, inquired, discussed, reflected and improved on the trial topics that were related to students' learning in a group. Discussion focused on an in-depth understanding of the expected learning outcomes, the type of learning experiences to be promoted, the problems and difficulties students might encounter, the learning and teaching strategies to be used, and the resources to be designed, etc. During the lesson, it was well observed that students could complete the tasks under teacher's guidance and student-teacher interaction in the lessons. Most of the students could solve and complete the coding activities successfully. Through collaborative lesson preparation on the trial topics to design and develop the coding activities, students' computational skill and mathematical ability could be well nurtured and strengthened. For the concrete deliverables, a learning package for each trial could be figured out for school's use and reference, which included teaching plan, worksheets, PowerPoint, Scratch coding file, etc. And, those L&T resources could be well transferred to other schools and already uploaded to the web for schools' use and reference (https://www.edb.gov.hk/en/curriculum-development/kla/ma/res/index.html).

CONCLUDING REMARKS

This paper aims to contribute to issues on coding in primary Mathematics lessons by presenting a Study about the development of coding activities with the elements of STEM integration and nurturing computational thinking. To face the recent challenges, it is recommended to develop adequate learning and teaching resources for teachers to implement and use in the lessons for teachers' use and reference. Thus, for the direction of future research to investigate on how to enhance the learning and teaching of mathematics with STEM/coding elements to nurturing computational thinking, the following areas are suggested: (a) to provide opportunities for developing coding activities so as to enhance students' computational skills; and (b) the generated school's good practice and experiences needed to be shared and transferable among schools.

References

[1] Baker C K, Galanti T M. (2017). Integrating STEM in elementary classrooms using model-eliciting activities: responsive professional development for mathematics coaches and teachers. International Journal of STEM Education. 4(1), 1-15.

[2] Becker, K., & Park, K. (2011). Effects of integrative approaches among science, technology, engineering, and mathematics (STEM) subjects on students' learning: A preliminary meta-analysis. Journal of STEM Education, 12(5 & 6), 23-37.

[3] Brennan, K., & Resnick, M. (2012). New Frameworks for Studying and Assessing the Development of Computational Thinking. In Proceedings of the 2012 Annual Meeting of the American Educational Research Association. Vancouver, Canada, 1-25.

[4] Education Bureau (2020). Computational Thinking-Coding Education: Supplement to the Primary Curriculum, Hong Kong.

[5] Leung, K.M. & Tang P.Y. (2021). Experiences Sharing on Primary Mathematics Lessons with Coding, School Mathematics Newsletter, Issue 24, 33-45. Education Bureau, Hong Kong.

[6] Miles, B. (2013). Computing in the national curriculum : A guide for primary teachers, Newnorth Print, Ltd. Bedford.

[7] Ministry of Education (2020). LEARN FOR LIFE: Ready for the Future. Singapore.

[8] Department of Education (2019). CODING AND COMPUTATIONAL THINKING: What is the Evidence? NSW, Department of Education, Australia.

[9] Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., & Hemmo, V. (2007). Science education now: A renewed pedagogy for the future of Europe. Bruxelas: Comissão Europeia.

[10] UNESCO (2018). Report of UNESCO/IFIP TC3 Meeting at OCCE : Coding, Programming and the Changing Curriculum for Computing in Schools, https://www.ifip-tc3.org

[11] Wing, J. M. (2006). Computational Thinking. Communications of the ACM, 49(3), 33- 35.