第29期

SMN

學校數學通訊

School Mathematics Newsletter

Published by
Mathematics Education Section, Innovation Technology Education Division,
Education Bureau, Government of the Hong Kong Special Administrative Region
香港特別行政區政府教育局創新科技教育分部數學教育組出版

ISBN 978-988-8581-32-0

政府物流服務署印

教育局數學教育組

版權

ISBN 978-988-8581-32-0

Foreword

Welcome to the 29th issue of the School Mathematics Newsletter (SMN).

The School Mathematics Newsletter (SMN), published by the Education Bureau of the Hong Kong Special Administrative Region, serves as a platform for mathematics educators to exchange insights on teaching practices, curriculum innovation, and theoretical advancements in mathematics education. Tailored for mathematics teachers, this issue features 11 diverse articles contributed by academics, curriculum officers, and frontline educators, covering topics ranging from foundational pedagogical debates and historical mathematical algorithms to modern applications like mathematical modelling, computational thinking, and inclusive education.

By bridging theoretical frameworks with practical classroom strategies, the SMN aims to support teachers in addressing students' diverse learning needs, strengthening the integration of mathematics with STEAM education, and fostering students' problem-solving abilities.

In today's educational landscape, mathematics teachers face the significant challenge of addressing the varying abilities, motivations, and aspirations of their students. To navigate this complexity, it is essential for mathematics educators to equip themselves with the necessary mathematical skills and teaching strategies tailored to different learning environments. We hope that all readers will find the content of this issue both informative and inspiring.

The Editorial Board of SMN would like to extend its heartfelt gratitude to all contributors and to our colleagues in the Mathematics Education Section, whose dedicated efforts have made the publication of SMN Issue 29 possible.

SMN provides an open forum for mathematics teachers and professionals to share their insights into mathematics learning and teaching. We welcome contributions as articles that explore all facets of mathematics education. However, please note that the views expressed in the articles do not necessarily reflect those of the Education Bureau. For all correspondence, please contact:

The Editor, School Mathematics Newsletter
Mathematics Education Section
Innovation Technology Education Divison
Room 403, Kowloon Government Offices
405 Nathan Road
Yau Ma Tei, Kowloon
email: math@edb.gov.hk

目錄

1. Implementing Mathematical Modelling in Schools: Why and How

ZHANG Qiaoping,

Faculty of Education, The University of Hong Kong

LING Man-ho, Alpha

Department of Mathematics and Information Technology, EdUHK

1. INTRODUCTION

Mathematical modelling has been promoted worldwide for decades, but it is a relatively new topic in Hong Kong's mathematical education. Since mathematical modelling shares the same ideas as STEAM education – nurturing talents to solve real-life problems with innovation and creative thinking – it has become one of the mathematical pedagogies with the most growth in attention and popularity. To empower the 'M' in Hong Kong's STEAM education, in this article, we begin by introducing the definition of mathematical modelling and mathematical modelling competency, which we follow by outlining ways to implement modelling tasks in class with empirically supported examples. We then discuss its compatibility with interdisciplinary learning and inclusiveness. Finally, we provide some teaching and assessment guidelines.

1.1. On the Road to Hong Kong's STEAM Education – Mathematics is Finally Under the Spotlight

STEM education in Hong Kong was mentioned for the first time in the Hong Kong Policy Address 2015. Over the years, schools in Hong Kong implement STEAM education at their own pace and style, mainly via STEAM activities and competitions. STEAM teaching and learning have spawned different pedagogical methods, including enquiry-based, project-based, problem-based and design-based approaches, with the overarching aim of addressing authentic problems in real-world contexts.

Since the Policy Address 2023, the promotion of STEAM education has gained further momentum. Besides this address introducing science subjects in primary schools from the 2025/26 school year, it placed mathematics under the spotlight, leading to the subject receiving unprecedented attention – programmes will be launched to support the mathematics curriculum in the 2023/24 school year to strengthen students' capability in the application of mathematics and identify and nurture local STEAM elites (The Government of HKSAR, 2023). In addition, there will be designated coordinators in schools to holistically plan STEAM education within and beyond the classroom. Furthermore, at least 75% of publicly funded primary and secondary schools will send their teachers for professional STEAM training within two school years (The Government of HKSAR, 2023).

1.2. The Direction of 'M' in STEAM – Mathematical Modelling

To increase the relevance and authenticity of STEAM education, different countries have attempted to demonstrate the application of mathematics in addressing real-life issues and to embed mathematical modelling into classroom learning. Mathematics spans over 12 years of mandatory education in Hong Kong; it deserves to play a leading role in paving students' way to high-level STEAM learning. Indeed, mathematical modelling is an essential component of mathematical literacy (Yang et al., 2022). While it is gaining increasing global attention, some countries, including Australia, the USA and China, are already on their way to unleashing modelling's power to popularise and systematise their STEAM education.

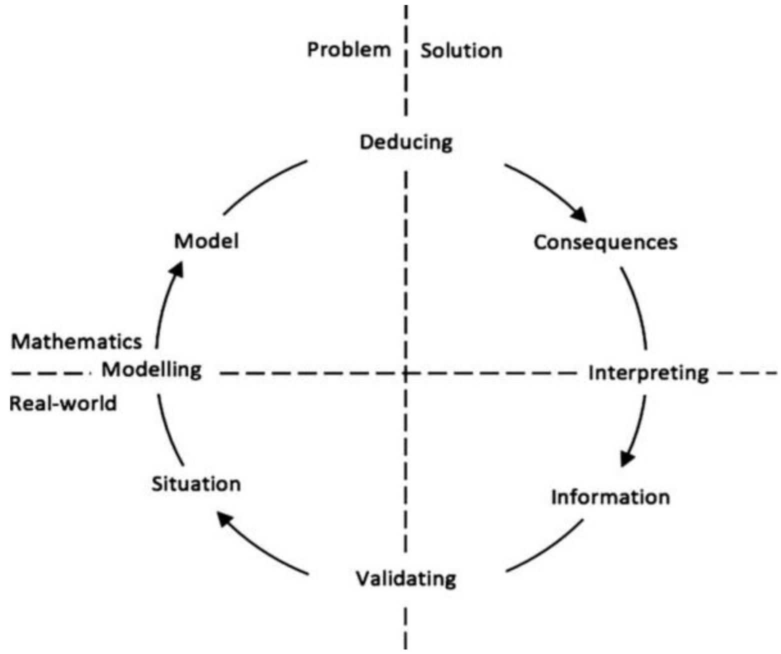
The Hong Kong Education Bureau (EDB) has introduced the Modelling Competition to encourage talented secondary school students to take part (EDB, 2023) and provided online resources related to mathematical modelling for senior primary schools and secondary schools (HK EdCity, 2023). Wiegand and Borromeo Ferri (2023) described mathematical modelling education as an effective way to promote education for sustainable development, which aims to give 'learners of all ages the knowledge, skills, values, and agency to address interconnected global challenges including climate changes, loss of biodiversity, unsustainable use of resources, and inequality' (UNESCO, 2023).

2. MATHEMATICAL MODELLING AND MODELLING COMPETENCIES

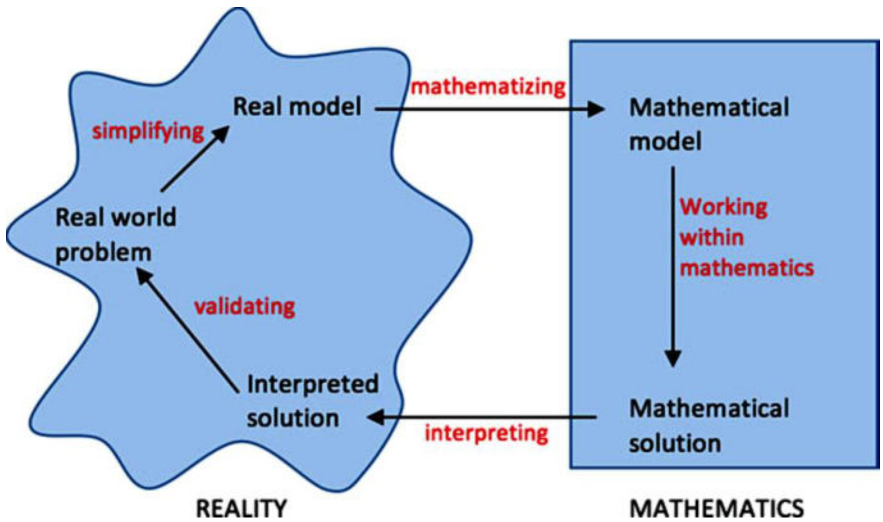
2.1. What is Mathematical Modelling?

Mathematical modelling can be regarded as a mathematical representation (i.e., the process of using mathematical methods) of a real-world scenario or problem (Cuong et al., 2020). It is a process of producing sharable, modifiable and reusable conceptual tools for describing, predicting and controlling real-life situations (Lesh & Doerr, 2003). By devising and reiterating mathematical models, liberty and innovation are accentuated to provide insights and solutions to real-life issues. Mathematical modelling shares the same ideas as STEAM education since both bring a paradigm shift from standardised answers to the valuation of the learning process and open-ended answers. Opportunities are given to students to experience trial and error and to create a knowledge base that is relevant to real life (Cuong et al., 2020). The process of mathematical modelling can be effectively represented as a cycle, which itself serves as a model of the modelling process (Greefrath & Vorhölter, 2016). Different modelling cycles in research focus on different aspects but share many common elements (Blomhøj & Jensen, 2003; Blum & Leiß, 2007; Maaß, 2006; MOE, 2012). Figure 1 shows three different modelling cycles.

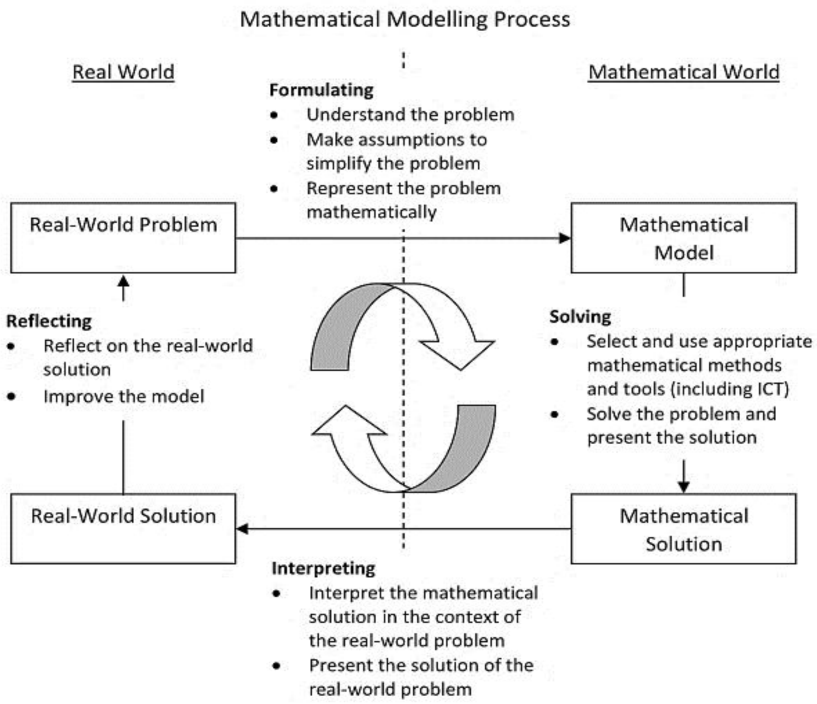
Figure 1. Different mathematical modelling cycles



(a) Modelling cycle by Schupp (1989, p. 43)



(b) Modelling cycle by Maaß (2006, p. 115)



(c) Modelling cycle by Maaß (2006, p. 115)

In summary, combining various descriptions of modelling process, the mathematical modelling process can be summarised into six steps: (a) making assumptions, identifying important variables and creating relations between variables; (b) mathematising quantities and their relations and selecting appropriate representations; (c) using mathematical knowledge to solve problems and utilise heuristics, such as rephrasing; (d) elaborating results and generalising solutions; (e) checking and reflecting on the solution; and (f) reporting on the conclusions.

Below is a quick illustration of how we can apply mathematical modelling quite easily in our daily lives. This example was introduced by Prof. Zalman Usiskin at a Mathematics Education Summit (Usiskin, 2019). Imagine, one day, you would like to take a train to Guangzhou, which will depart at noon. When should you leave home to go to the railway station? To answer this question, we have to consider the following to simplify the real-world problem: (a) how long does it take to get to the station from your home? (b) how long does it take to buy a ticket? (c) how long does it take to walk from the ticket office to the waiting room? and (d) how long would you like to spend in the waiting room before the train arrives? To mathematise our logical thinking, let

- R be the time required to arrive at the station,
- K be the time required to purchase tickets,
- T be the time needed to walk from the ticket office to the waiting room,
- W be the time in the waiting room and
- L be the time that you should leave your home to take the train, which departs at noon.

In this way, L = 12:00 – W – R – K – T. This equation represents the mathematical model. By estimating time for W, R, K and T, assuming 5, 30, 3 and 2 minutes, respectively, the equation can be solved, and we can obtain a mathematical solution as L = 11:20. However, is it enough to leave home at 11:20? Will there be any accidents or delays along the way? By considering the feasibility and validating the equation, we recognise the need to modify the model. We then let S be the extra time reserved, which we estimate to be 20 minutes. Thus, the modified mathematical model is L = 12:00 – W – R – K – T – S and L = 11:00. You may already have discovered that mathematical modelling can be accessed by solving equations when students are young, but it is not necessarily exclusive to senior-form students and gifted children.

2.2. Mathematical Modelling Competency

The process of mathematical modelling involves using mathematics to represent, analyse, make predictions, or provide insights into real-world problems or phenomena (Bliss & Libertini, 2019). It serves as a bridge between mathematics as a tool for making sense of physical and social world and mathematics as a system of formal representations. Consequently, mathematical modelling competency is key feature of the Program for International Students Assessment (PISA) (OECD, 2018), highlighting a symbiotic relationship mathematical modelling competency and overall mathematical competency.

Although the importance and value of mathematics modelling are well established, appropriate methods for assessing students' mathematical modelling competencies remain unclear. Most descriptions of modelling competencies emphasise the ability to mathematise and work effectively with mathematical models throughout the modelling process. For instance, mathematical modelling competency has been defined as a person's ability and readiness to carry out all parts of a mathematical modelling process in a given situation (Blomhøj & Jensen, 2003). Similarly, Maaß (2006) described modelling competencies as "skills and abilities to perform modelling processes appropriately and are goal oriented as well as the willingness to put these into action" (p. 117). These competencies are particularly rooted in the actions involved in transitioning between the real world and the mathematical world.

In a similar vein, Kaiser (2007) identified modelling competencies as encompassing the ability to understand real-world problems, create mathematical models, solve problems within these models, interpret mathematical results in real-world contexts, and critically evaluate solutions. Regarding the mutual relationship between mathematical modelling competencies and mathematical competence, Niss, Blum, and Galbraith (2007) argued that growth in modelling competence is dependent on mathematical competence, while simultaneously contributing to its development. In this sense, the development of students' mathematical competencies can be seen as a continuous and reciprocal process.

3. WAYS TO IMPLEMENT MATHEMATICAL MODELLING

To implement mathematical modelling learning in the classroom, Lesh and Doerr (2003) proposed the principles of model-eliciting activities (MEAs), which emphasise that problems involve diverse and complex information that very few young children can manage. MEAs can be manifested in three ways: data modelling, modelling with cultural and community contexts and STEAM-based modelling. Among them, data modelling and modelling with cultural and community contexts are frequently used in mathematical modelling activities at the primary and secondary levels.

Data modelling involves statistics and requires student engagement. The five steps of data modelling are (a) posing a problem; (b) designing investigations to solve the problem; (c) generating, selecting and measuring attributes; (d) organising, structuring and representing data; and (e) developing a model and drawing informal inferences. Data modelling benefits students by allowing them to draw inferences from generated mathematical models (Lehrer & Schauble, 2004) and make informal inferences, such as recognising uncertainty, identifying variation and making predictions. Hence, an early foundation in data modelling equips new generations with the ability to deal with diverse and complex information more effectively.

Modelling problems that include cultural and community contexts are attractive and motivating to students. Wickstrom and Yates (2021) pointed out that students will be more engaged in modelling activities if they discover a connection between mathematics and the real world. More concretely, the lived experiences of students enrich modelling activities by allowing them to form assumptions, make decisions and apply mathematical operations, analyses and refinements (English, 2021). The modelling of cultural and community contexts requires critical thinking, which is different from data modelling.

3.1. An Example of Mathematical Modelling in the Mathematics Classroom

To implement modelling practices in mathematics lessons, Martínez et al. (2023) experimented with an avocado modelling case study. In a classroom of 11th grade students in Chile, where avocados are close to students' everyday lives, the mathematics teacher set the scene as follows:

Farmers in Chile were struggling over how to decide on their avocado production and sale so as to achieve the greatest yield.

In three 90-minute lessons, the students were guided to walk through the different phases of the modelling cycle. The learning goal of Lesson 1 was to understand and simplify the situation with the following learning milestones:

1. *Context understanding*: Selling as many avocados as possible might not be the most advantageous thing to do.
2. *Identifying variables*: Life situations can be more complicated than students initially think, and several factors might affect the production and sale of avocados.
3. *Simplification*: Realising the infeasibility of considering all factors listed, students were guided to focus on two factors: the price and the number of avocados sold in the case study.
4. *Assumptions*: After understanding the relationship between price and demand, students could mathematicise the relationship into a model and discover that it would be possible to produce a quantity of avocados that maximises revenue.

Throughout the process, the teacher used video, diagrams and fictional characters to smoothen the different teaching steps.

In this study, the students faced challenges mainly during the process of simplification and making assumptions. During the simplification process, they found it difficult to agree on only two consideration factors – price and the number of avocados sold. Moreover, when deciding on their assumptions, some suggestions seemed out of focus, such as 'The price of gasoline decreases' and 'Find a place where there are good sales'. Some confused the assumptions with solution strategies, such as 'Improve the production quality so that demand and price increase'. Throughout the process, the teacher had to guide the students by narrowing down the basket of factors, sifting the most relevant assumptions and, if necessary, turning the discussion into instructions (Martínez et al., 2023).

The learning goal of Lesson 2 was about mathematising. The learning process started with defining and moved to data searching and mathematising. Through a brief discussion, students understood the law of supply and demand, as well as the equation Revenue = (price of avocados) × (no. of avocados sold). In reality, not all data were available in the modelling problem, but due to the introductory nature of the study, the number of avocados produced and their average selling price were provided (see Table 1). Finally, students were guided to mathematicise the model and formulated the functions (Martínez et al., 2023).

Years	**Production (Thousands of tons)**	**Average Price ($/kg)**
2020	190	4000
2019	200	3200
2018	245	2600
2017	220	2900
2016	140	4300

Table 1. Yearly avocado production (Martínez et al., 2023)

The learning goal of Lesson 3 focused on interpretation and validation. The avocado story continued with the farmers being unable to meet the demand for avocados suggested by the model so that the teaching and learning could move on to the stages of interpretation and modification and eventually validation. Given that yearly avocado production was provided, the students were invited to revisit the regression line to identify the data from 2020 as an outliner. After that, the students used the GeoGebra app to identify a line that best fitted the data, excluding the data point of the year 2020. By comparing the two mathematical models and results, the students could understand that anomalous data were a possible source of error and adjusted their models (Martínez et al., 2023). This modelling process does not end with results. Instead, validating the models and results is required, which involves questioning the model's assumptions, reviewing the data and parameters and contrasting the results obtained with a real situation (Martínez et al., 2023). This study revealed that the students might have had difficulty with the algebraic work and were unable to make numerical comparisons between the production and price obtained in both cases.

In a nutshell, this study illustrated not only the implementation of mathematical modelling in class in detail but also the challenges that teachers and students faced throughout the process, as well as some pedagogical tips. Mathematical modelling learning stems from life problems; it is important to leverage 'not well-defined problems' and provide students with room to think about the variables and sift the most relevant ones (Martínez et al., 2023). Through teachers' guidance, group discussion and data searching, mathematical modelling activities aim to strengthen students' data literacy, critical thinking, metacognition, communication and collaboration skills. In sharp contrast to traditional learning with unique answers, there are no definitive solutions to models, including the process of mathematicising and modification.

4. BEYOND MATHEMATICAL KNOWLEDGE: THE INTERDISCIPLINARY POWER OF MATHEMATICAL MODELLING IN STEAM EDUCATION

Mathematical modelling is a versatile tool that is applicable to different STEAM disciplines, not only mathematics. To unleash its interdisciplinary potential, the Compulsory Mathematics Education Curriculum (Ministry of Education in China [MOEC], 2022) has provided several examples. For instance, when students explore a mathematical model of the stopping distance for emergency braking, the mathematical model Stopping distance = Reaction distance + Braking distance will touch on the law of conservation of energy and Newton's second law (MOEC, 2020, pp. 116–119). Students are required to have some basic understanding of force, work done, mass and speed. Hence, the learning of mathematical modelling would allow students to apply and deepen their understanding of physics. To provide a streamlined learning experience, collaboration between disciplines in course design and the sequence of topics is essential.

Another example is related to biology. In a modelling task that requires students to explore the relationship between animals' weight, blood flow and pulse rate (MOEC, 2020, pp. 156–19), students are expected to apply mathematical concepts, such as surface area and volume, and knowledge of biology, such as the definition of a pulse and the correlation between pulse rate and weight. In a modelling task like this, which involves relatively long analysis clues, the intermediate learning outcomes are as valuable as the modelling results. Instead of obtaining a unique and exact answer, mathematical modelling values logical thinking and accurate presentation – including communication skills and the use of visualisation tools, such as histograms and scatter plots. The assessment scheme for these long analysis clues should entail different evaluation dimensions and milestones so as to achieve a more holistic assessment of students' learning performance that welcomes creative thinking and alternative solutions.

In recent years, mathematical modelling learning has expanded from secondary education to primary education. Indeed, it should start earlier to help nurture students' interest in mathematics, show them the relevance of mathematics to our daily life, help them establish a positive learning attitude towards mathematics and mitigate their mathematical anxiety. It is also an important step to paving the way to advanced learning in mathematics and science disciplines, building a talent pool with an entrepreneurial spirit and innovative thinking and providing momentum to our long-term social development.

Mainland China ranked top in the mathematics and science tests conducted by the Organisation for Economic Cooperation and Development in 2018 (Legislative Council, 2023) and has been one of the pioneers in incorporating mathematical modelling into its mathematics curriculum. A framework for the expected learning outcomes on modelling at primary, lower secondary and upper secondary levels has been clearly defined (MOEC, 2022, p. 10). It provides a concrete direction for a spiralling curriculum design, effective teaching and performance assessment.

5. TEACHERS' MATHEMATICAL MODELLING COMPETENCY (MMC)

Regarding the nature of mathematical modelling, and to maximise the learning effect of mathematical modelling, teachers should be able to guide their students to generate mathematical ideas, independently explore mathematical theorems, develop critical thinking and improve their metacognitive and communication skills. Wei et al. (2022) pointed out that teachers lacking pedagogical knowledge about mathematical modelling were less confident when providing feedback or assisting students with learning obstacles. The new pedagogical repertoires could improve teachers' self-efficacy and drive their attitude change from passive to active in discussions during interventions (Wei et al., 2022).

5.1. Ways to enhance teachers' MMC

Mathematical modelling promotes a student-centred and inquiry-based approach, in contrast to the traditional teacher-centred method. This shift requires teachers to adopt roles as motivators, monitors, facilitators, and guides, fostering meaningful engagement with mathematics (Munter, 2014). To support this process, teachers need to cultivate an open-minded attitude towards the mathematical modelling process. Unlike conventional pedagogy, which often emphasises standardised answers and unique solutions, mathematical modelling acknowledges that failures can be integral to the learning experience. By accepting and discussing failures, teachers can help students understand that mistakes are a natural part of problem-solving and critical thinking. This perspective encourages resilience and fosters a growth mindset among students. Moreover, the outcomes of mathematical modelling are often open-ended, classroom activities should be designed to reflect this. Teachers should view in-class activities as ongoing processes rather than finite tasks that must be completed. This approach encourages creativity and sustained inquiry. Teachers can manage time flexibly, designing activities that maintain student engagement while ensuring discussions remain productive and focused.

Unlike traditional mathematical problem solving in the classroom, mathematical modelling involves multiple stages that emphasise a formative assessment approach. Tools such as written reflections, workbooks, and reports are effective for gauging teaching and learning effectiveness in this context (Wei et al., 2022). Although the literature lacks concrete indicators to measure teachers and students' mathematical modelling competency, mathematical modelling thinking (Anhalt et al., 2018) is considered to be the foundation and could serve as a reference indicator. This framework includes five key components: (a) recognising assumptions; (b) approximating and estimating to reason quantitatively; (c) prioritising factors that influence solutions to simplify problems; (d) using multiple representations to express mathematical ideas; and (e) reflecting on the solution, its meaning, and its reasonableness within the original context (Anhalt et al., 2018).

5.2. Identifying model limitations

Regarding the importance of mathematical modelling for students' learning in mathematics, it is crucial for teachers to guide students in recognising the limitations inherent in mathematical models. Every model is based on certain assumptions, and understanding these assumptions is key to critically evaluating the model's effectiveness. Teachers can inspire students to deeply analyse and question assumptions, leading to richer discussions about the applicability and relevance of different models in real-world contexts. Furthermore, teachers need to be sensitive to the potential impact of conclusions drawn from modelling activities. In situations where a model leads to incorrect conclusions, the consequences can vary significantly. For example, missing a bus due to a flawed model may be an inconvenience, but missing a flight could have serious implications. This analogy highlights the importance of context in mathematical modelling; teachers should prepare students to consider the real-world implications of their work and the importance of accuracy in their models.

Epilogue

Many researchers have found mathematical modelling to be a suitable way to facilitate the implementation of the "M" in STEAM starting from primary education to secondary education. On our road to STEAM education, mathematics education spanning the 12 years of free mandatory education deserves more emphasis and should play a more important role. Mathematical modelling has been one of the most widely researched pedagogies in recent decades. Mathematical modelling learning focuses on addressing problems that stem from our lives, which could stimulate students' interest in and motivation for learning. During the problem-solving modelling cycle, students are expected to apply concepts not only from mathematics but also from other STEAM disciplines. Mathematical modelling tasks could reinforce students' prior knowledge and bridge them to something new – both in mathematics and other disciplines. More importantly, problems do not end with a single definitive solution in real life, nor do our mathematical modelling tasks. The gist of mathematical modelling learning is that it embraces multiple plausible solutions and problem-solvers of varying abilities. These are the reasons why mathematical modelling is one of the most effective ways to manifest STEAM education. To equip our next generation with mathematical modelling competency, we first have to arm our teachers. Teachers need more developmental support and a new teaching mindset and pedagogical skills.

Acknowledgement

The work described in this paper was supported by the Dean's Research Fund of the Faculty of Liberal Arts and Social Sciences, The Education University of Hong Kong, Hong Kong Special Administrative Region, China (Project No. FLASS/ICRS-9 0401W).

Corresponding author: zhangqp@hku.hk

Reference List

[1] Anhalt, C.O., Staats, S., Cortez, R., & Civil, M. (2018). Mathematical modelling and culturally relevant pedagogy. In Y. J. Dori, Z. R.Mevarech, & D. R. Baker (Eds.), *Cognition, Metacognition, and Culture in STEM Education* (Vol. 24, pp. 307-330). *Innovations in Science Education and Technology*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66659-4_14

[2] Bliss, K., & Libertini, J. (2019). What is mathematical modeling? In S. Garfunkel & M. Montgometry (Eds.), *GAIMME: Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education* (pp. 7- 21). Consortium for Mathematics and Its Applications and Society for Industrial and Applied Mathematics.

[3] Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications, 22*(3), 123-139. https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123

[4] Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics: Proceedings from the twelfth International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (pp. 222–231). Horwood.

[5] Common Core State Standards Initiative. (2010). Mathematics standards. https://corestandards.org/mathematics-standards/

[6] Cuong, T. V., Quang, L. H., & Tinh, T. T. (2020). Apply mathematical modelling in steam education at high schools. *Open Access Journal of Science, 4*(4), 163-169. https://doi.org/10.15406/oajs.2020.04.00166

[7] Education Bureau (EDB). (2023, August 2). *Mathematical modelling competition for secondary students (MMCSS) 2023*. https://www.edb.gov.hk/en/curriculum-development/kla/ma/res/mmcss.html

[8] English, L. D. (2021). Mathematical and interdisciplinary modelling in optimizing young children's learning. In J. M. Suh, M. H. Wickstrom, & L.D. English (Eds.), *Exploring Mathematical Modelling with Young Learners. Early Mathematics Learning and Development* (pp.3-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63900-6_1

[9] Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and developments from German speaking countries. Springer.

[10] HK EdCity. (2023). *Resources for STEAM Education developed by EDB.* https://stem.edb.hkedcity.net/en/learning-and-teaching-resources-for-steam-education/

[11] Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics. ICTMA 12* (pp. 110-119). Horwood Publishers.

[12] Legislative Council. (2023). Information note – Promotion of STEAM education in selected places. https://app7.legco.gov.hk/rpdb/en/uploads/2023/IN/IN08_2023_20230427_en.pdf

[13] Lehrer, R., & Schauble, L. (2004). Modelling natural variation through distribution. *American Educational Research Journal, 41*(3), 635-679. https://doi.org/10.3102/00028312041003635

[14] Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modelling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-33). Routledge.

[15] Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM – Mathematics Education, 38*(2), 113–142.

[16] Martínez, S., Guiñez, F., & González, D. (2023). Digital learning routes: An example of mathematical modelling. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, *116*(12), 940-949. https://doi.org/10.5951/MTLT.2022.0098

[17] Ministry of Education of Singapore [MOES]. (2012). *Mathematical modelling resource kit*. Author.

[18] Ministry of Education in China (MOEC). (2020). *Mathematics curriculum standards of general high schools (2nd edition) [in Chinese]*. Beijing Normal University Publishing Group. https://etcnew.sdut.edu.cn/meol/common/script/preview/download_preview.jsp?fileid=11229644&resid=1220866&lid=48177&preview=preview

[19] Ministry of Education in China (MOEC). (2022). *Mathematics curriculum standards for compulsory education [in Chinese]*. Beijing Normal University Publishing Group. http://www.moe.gov.cn/srcsite/A26/s8001/202204/W020220420582346895190.pdf

[20] Munter, C. (2014). Developing visions of high-quality mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(5), 584-635. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.5.0584

[21] OECD. (2018). PISA 2022 Mathematics Framework (Draft). OECD Publishing.

[22] Schupp, H. (1989). Applied mathematics instruction in the lower secondary level—Between traditional and new approaches. In W. Blum, et al. (Eds.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics* (pp. 37–46). Ellis Horwood.

[23] The Government of HKSAR. (2023, October). *Policy address*. https://www.policyaddress.gov.hk/2023/en/p162.html

[24] UNESCO. (2023, November 17). *What you need to know about education for sustainable development*. https://www.unesco.org/en/education-sustainable-development/need-know

[25] Usiskin, Z. (2019, October 30). *Mathematical modeling and the operations of arithmetic*. Keynote speech presented at the 10th Primary Mathematics Education Summit, Hangzhou, China.

[26] Wei, Y., Zhang, Q., & Guo, J. (2022). Can mathematical modelling be taught and learned in primary mathematics classrooms: A systematic review of empirical studies. *Education Sciences, 12*, 923. https://doi.org/10.3390/educsci12120923

[27] Wickstrom, M. H., & Yates, A. (2021). Mathematical modelling: analyzing elementary students' perceptions of what it means to know and do mathematics. In J. M. Suh, M. H. Wickstrom, & L. D English (Eds.), *Exploring Mathematical Modelling with Young Learners. Early Mathematics Learning and Development* (pp. 209-233). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63900-6_10

[28] Wiegand, S., & Borromeo Ferri, R. (2023). Promoting pre-service teachers' professionalism in steam education and education for sustainable development through mathematical modelling activities. *ZDM – Mathematics Education, 55*, 1269-1282. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01500-8

[29] Yang, X., Schwarz, B., & Leung, I. K. C. (2022). Pre-service mathematics teachers' professional modelling competencies: a comparative study between Germany, Mainland China, and Hong Kong. *Educational Studies in Mathematics, 109*, 409-429. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10064-x

2. Multiple Approaches on Minimization Problem

SIU Man-keung

University of Hong Kong

CHOI Wai-fung, Brian

Poly Prep Country Day School, New York

I. A Standard Minimization Problem in Calculus

Let us start with a question that is commonly seen in textbooks of differential calculus:

Find the minimum value of $f(x) = \sqrt{x^2-3x+9}+\sqrt{x^2-5x+25}$, where x is a real number.

This problem is a standard application of differentiation to optimize a function. Differentiating both sides with respect to x, we have

$$f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+9}}+\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+25}}.$$

We set $f'(x)=0$ for finding local extremum. So, we obtain

$$\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+9}}=-\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+25}}$$

Solving the equation, we obtain

$$x=0 \qquad \text{or} \qquad x=\frac{15}{8}.$$

We must determine which value of x can give a minimum value of $f(x)$. Although we can choose the First Derivative Test or the Second Derivative Test, in this case the former one is much better, because $f'(x)$ is quite complicated to differentiate one more time!

x	$x<0$	$x=0$	$0<x<\frac{15}{8}$	$x=\frac{15}{8}$	$x>\frac{15}{8}$
$f'(x)$	−	0	−	0	+

Therefore, $f(x)$ is minimum when $x=\frac{15}{8}$

with minimum value $=f\left(\frac{15}{8}\right)=\sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2-3\times\frac{15}{8}+9}+\sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2-5\times\frac{15}{8}+25}=7$.

II. Minimization of the Same Problem by Geometry

Despite the powerful tool that calculus can provide, one should be open-minded and curious about alternative ways to solve the same problem. This may open another door to generate more insight. A purely algebraic problem such as this may possess a geometric meaning beneath it. In particular, the variable *x* guides us to consider it as the *x*-coordinate in a coordinate plane. Here we present a solution using geometry.

To begin with, we complete the square for each term under the radical signs.

$$f(x)=\sqrt{x^2-3x+9}+\sqrt{x^2-5x+25}$$

$$=\sqrt{x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2+9-\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2+25-\left(\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}}+\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{75}{4}}$$

We recognize this form as the distance formula $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. By carefully re-writing the constant terms, we obtain a variable point $(x, 0)$ that can be adjusted appropriately to obtain the minimum value of

$$f(x) = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(0 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

which represents the sum of the length of two straight lines.

The choice between two possible signs in the constant terms is intriguing. It will be evident after considering the geometric setting.

Let $A = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $B = \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$, $P = (x, 0)$.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 9} + \sqrt{x^2 - 5x + 25} = AP + BP$$

(See Figure 1.)

To minimize $AP + BP$, the point P should be chosen so that A, P and B are collinear with minimum value of $\sqrt{x^2 - 3x + 9} + \sqrt{x^2 - 5x + 25} = AB = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left[\frac{5\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2} = 7$

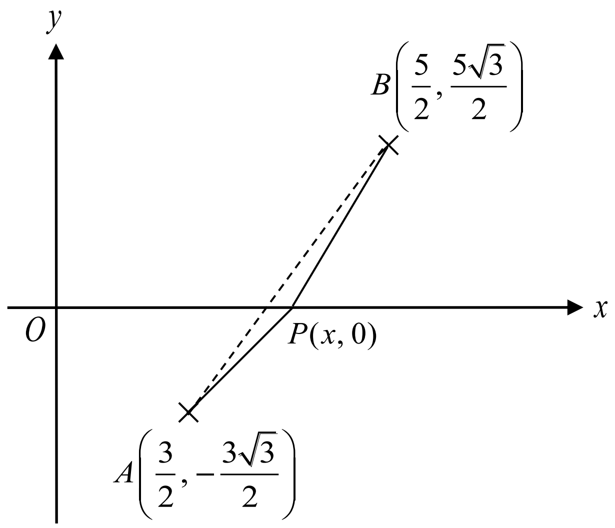


Figure 1

What if we have chosen the same sign in the two constant terms, i.e.

$$f(x)=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(0-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(0-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2}\ ?$$

Instead of $A=\left(\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, we have to consider $A'=\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. In such case, the points A' and B both lie above the x-axis. (See Figure 2.) It is not as direct to obtain the minimum value of $f(x)$. Note that A' is the image of reflection of A about the x–axis, which means that $A'P=AP$. This reminds us of Fermat's Principle in physics, that light path chooses the shortest path, in this case in the reflection of light. The result can be readily proved by synthetic geometry, which is left as an exercise for the reader.

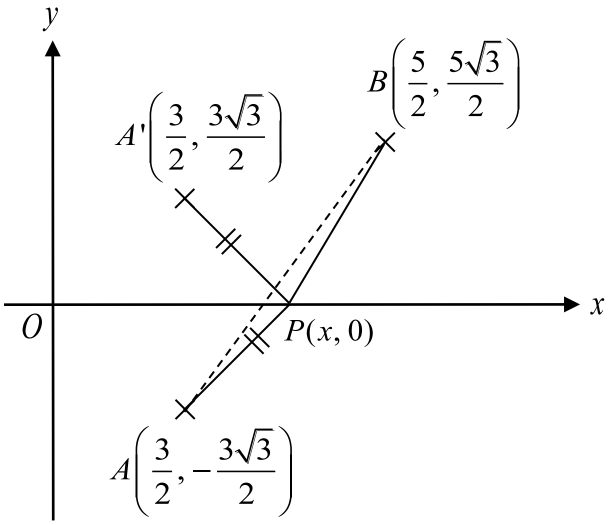


Figure 2

III. Generalization of Minimization by Calculus

It is natural to consider a general case after solving a particular case. In the following sections, we will apply calculus and geometry to minimize the expression $g(x)=\sqrt{x^2+ax+b}+\sqrt{x^2+cx+d}$, where a, b, c and d are real constants for which the square roots make sense. Readers can compare the two approaches.

By completing the square,

$$g(x)=\sqrt{x^2+ax+b}+\sqrt{x^2+cx+d}\text{......(1)}$$

$$=\sqrt{x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left[b-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]}+\sqrt{x^2+cx+\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left[d-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]}$$

$$=\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)}+\sqrt{\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+\left(d-\frac{c^2}{4}\right)}\text{......(2)}$$

Now we differentiate $g(x)$ using equation (2).

$$g'(x)=\frac{2\left(x+\frac{a}{2}\right)}{2\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)}}+\frac{2\left(x+\frac{c}{2}\right)}{2\sqrt{\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+\left(d-\frac{c^2}{4}\right)}}$$

For finding local extremum of $g(x)$, we set $g'(x) = 0$. Hence, we have

$$\frac{2x+a}{\sqrt{(2x+a)^2+(4b-a^2)}}=-\frac{2x+c}{\sqrt{(2x+c)^2+(4d-c^2)}}$$

It takes some effort to obtain the desired general formula for the value of x, not to mention putting it back to find the required minimum value of $g(x)$. We leave the working to a patient reader.

IV. Generalization of Minimization by Geometry

The difficulty in dealing with minimization by calculus can be remedied by geometry in this problem. Following the same line of thought as in Section II, we re-write $g(x)$ in equation (2) as follows.

$$g(x)=\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{4b-a^2}{4}\right)}+\sqrt{\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{4d-c^2}{4}\right)}\text{......(3)},$$

Modify it as the sum of the length of two straight lines.

$$g(x)=\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(0+\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{4d-c^2}}{2}\right)^2}$$

Similarly, let $A=\left(-\frac{a}{2},-\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}\right)$, $B=\left(-\frac{c}{2},\frac{\sqrt{4d-c^2}}{2}\right)$, $P=(x,0)$. (See Figure 3.)

Then $g(x)=AP+BP$. To minimize $AP+BP$, we choose the point *P* such that *A*, *P* and *B* are collinear

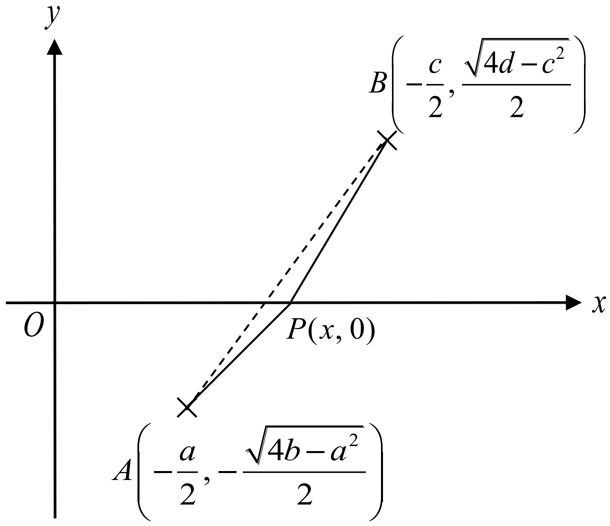


Figure 3

with minimum value of $g(x)=AB=\sqrt{\left(-\frac{c}{2}+\frac{a}{2}\right)^2+\left[\frac{\sqrt{4d-c^2}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}\right)\right]^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+(\sqrt{4b-a^2}+\sqrt{4d-c^2})^2}$$

$$=\sqrt{b+d-\frac{1}{2}ac+\frac{1}{2}\sqrt{(4b-a^2)(4d-c^2)}}\text{......(4)}$$

Although we did not solve the value of *x*, the minimum value of $g(x)$ is obtained already. This is one of the advantages of the geometric approach over calculus.

Now let us evaluate the corresponding value of x. (See Figure 4.)

Since the slope of $AP =$ the slope of BP, we have

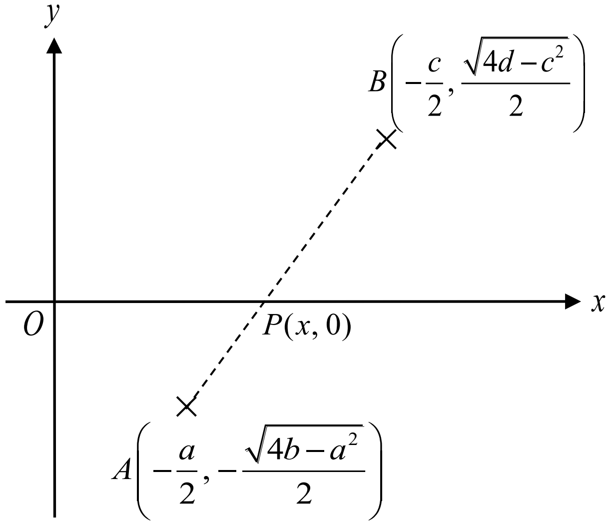


Figure 4

$$\frac{0-\left(-\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}\right)}{x-\left(-\frac{a}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{4d-c^2}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}\right)}{-\frac{c}{2}-\left(-\frac{a}{2}\right)}$$

The simplification is straightforward, yielding

$$\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2x+a} = \frac{\sqrt{4b-a^2}+\sqrt{4d-c^2}}{a-c}, \text{ or}$$

$$x = \frac{-c\sqrt{4b-a^2}-a\sqrt{4d-c^2}}{2(\sqrt{4b-a^2}+\sqrt{4d-c^2})}.$$

V. Generalization of Minimization by Trigonometry

Apart from calculus and geometry, let us consider the use of trigonometry, specifically by applying the Law of Cosines.

Suppose $b, d > 0$ with $b \geq \frac{a^2}{4}$ and $d \geq \frac{c^2}{4}$. From (1),

$$g(x) = \sqrt{x^2 + (\sqrt{b})^2 + ax} + \sqrt{x^2 + (\sqrt{d})^2 + cx}$$

By comparing the expression under the square root with the familiar expression

$$d^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta,$$

we consider ΔABC & ΔADC, where $AB = \sqrt{b}$, $AC = x$, $AD = \sqrt{d}$, $\angle BAC = \alpha$ & $\angle DAC = \beta$. (See Figure 5.)

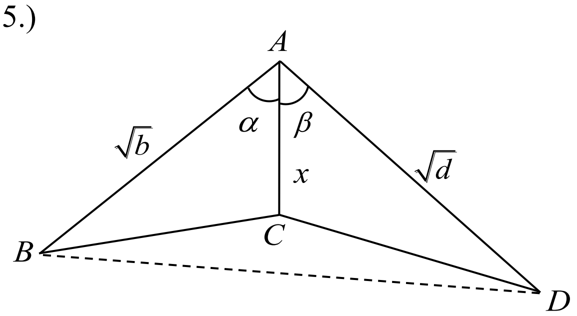


Figure 5

From the law of Cosines, we have

$$BC^2 = x^2 + (\sqrt{b})^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{b}\cos\alpha = x^2 + b - 2x\sqrt{b}\cos\alpha$$

$$CD^2 = x^2 + (\sqrt{d})^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{d} \cdot \cos\beta = x^2 + d - 2x\sqrt{d}\cos\beta$$

Let $-2\sqrt{b}\cos\alpha = a$, i.e. $\cos\alpha = -\frac{a}{2\sqrt{b}}$, then $BC = \sqrt{x^2 + ax + b}$.

Let $-2\sqrt{d}\cos\beta = c$, i.e. $\cos\beta = -\frac{c}{2\sqrt{d}}$, then $CD = \sqrt{x^2 + cx + d}$.

Note that the cosine makes sense, since we assume $b \geq \frac{a^2}{4}$ and $d \geq \frac{c^2}{4}$.

Now $g(x) = \sqrt{x^2 + ax + b} + \sqrt{x^2 + cx + d} = BC + CD$.

To minimize $g(x)$, points B, C and D should be collinear. So, we consider ΔABD.

$$\cos\angle BAD = \cos(\alpha+\beta)$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$= \left(-\frac{a}{2\sqrt{b}}\right)\left(-\frac{c}{2\sqrt{d}}\right) - \left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2\sqrt{b}}\right)\left(\frac{\sqrt{4d-c^2}}{2\sqrt{d}}\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{bd}}\left[ac - \sqrt{(4b-a^2)(4d-c^2)}\right]$$

minimum value of $g(x) = BD$

$$= \sqrt{(\sqrt{b})^2 + (\sqrt{d})^2 - 2\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{d}\cdot\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \sqrt{b + d - 2\sqrt{bd}\cdot\frac{1}{4\sqrt{bd}}\left[ac - \sqrt{(4b-a^2)(4d-c^2)}\right]}$$

$$= \sqrt{b + d - \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}\sqrt{(4b-a^2)(4d-c^2)}}$$

which is the same as equation (4) in Section IV.

Readers can work out for themselves the case where $b = 0$ or $d = 0$.

VI. Solving the Particular Case by Trigonometry and Integer Triangle

The method discussed in Section V involves some tedious calculation in the general case, but in the special case when $a = b^2$ and $c = d^2$, the calculation is considerably simplified, so that it provides a source for questions set for a mathematics contest. Take the problem in Section I as an example.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 9} + \sqrt{x^2 - 5x + 25}$$

$$= \sqrt{x^2 + 3^2 - 2\cdot 3x\cdot\cos 60^\circ} + \sqrt{x^2 + 5^2 - 2\cdot 5x\cdot\cos 60^\circ}$$

Consider ΔABC & ΔADC, where $AB=3$, $AC=x$, $AD=5$, $\angle BAC=\angle CAD=60°$. (See Figure 6.)

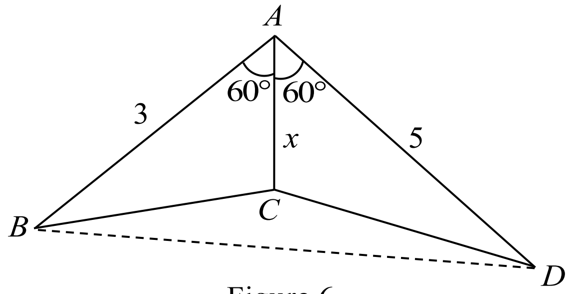


Figure 6

From the Law of Cosines, we have

$$\sqrt{x^2-3x+9}+\sqrt{x^2-5x+25}=BC+CD$$

To minimize $\sqrt{x^2-3x+9}+\sqrt{x^2-5x+25}$, we make *B*, *C*, and *D* collinear.

Hence, minimum value of $\sqrt{x^2-3x+9}+\sqrt{x^2-5x+25}=BD$

$$=\sqrt{3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cdot \cos 120°}$$

$$=7$$

As a by–product, we have constructed a 3–5–7 triangle. Perhaps it is the "second" most famous integer triangle apart from the 3–4–5 right–angled triangle. The reason is that one of the angles is the special angle $120°$, and the lengths of three sides form an arithmetic sequence! Furthermore, the figure contains two more triangles with integral sides, namely, ΔABC and ΔADC. Readers may like to see why this is so.

Let us round up this section by using the trigonometric method on another problem, which will appear again in the next Section.

Consider $h(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-6x+10}$.

Consider ΔABC & ΔADC, where $AB=1$, $AC=x$, $AD=\sqrt{10}$, $\angle BAC=90°$ and $\angle CAD=\theta=\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$. (See Figure 7.)

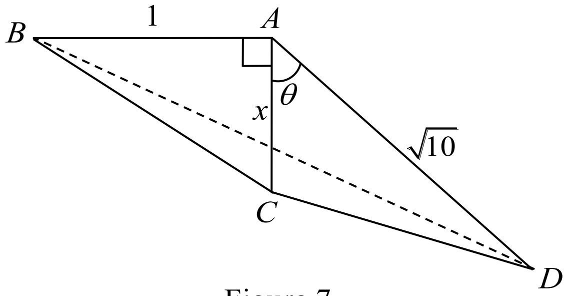


Figure 7

We have

$$BC^2=x^2+1^2$$

$$CD^2=x^2+(\sqrt{10})^2-2\cdot x\cdot\sqrt{10}\cdot\cos\theta$$

$$\sqrt{x^2+1^2}+\sqrt{x^2+(\sqrt{10})^2-2\cdot x\cdot\sqrt{10}\cdot\cos\theta}=BC+CD$$

To minimize $\sqrt{x^2+1^2}+\sqrt{x^2+(\sqrt{10})^2-2\cdot x\cdot\sqrt{10}\cdot\cos\theta}$, we make B, C, and D collinear.

Hence, minimum value $=\sqrt{1^2+(\sqrt{10})^2-2\cdot 1\cdot\sqrt{10}\cdot\cos(90°+\theta)}=\sqrt{11+2\sqrt{10}\sin\theta}$

$$=\sqrt{11+2\sqrt{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}}=\sqrt{13}$$

VII. A Wrong Method Which Yields a Correct Minimum

Imagine you were giving the problem worked out at the end of Section VI in class. $h(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-6x+10}$

Imagine a student came forth and worked it out on the blackboard by writing down just a few lines. By the familiar A.M.– G.M. Inequality the student obtained

$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-6x+10}\geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{x^2-6x+10}}$ with equality when and only when $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2-6x+10}$, i.e. $x=\frac{3}{2}$.

So, $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-6x+10} \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{13}{4}}\cdot\sqrt{\frac{13}{4}}} = \sqrt{13}$.

The required minimum value is $\sqrt{13}$, which is the correct answer. But would you, as a teacher, agree that this is a solution? This is actually a real classroom situation, which a practicing teacher once shared with one of the authors of this paper.

Imagine we were facing another problem, that same one in Section I.

$$f(x) = \sqrt{x^2-3x+9}+\sqrt{x^2-5x+25} \geq 2\sqrt{\sqrt{x^2-3x+9}\cdot\sqrt{x^2-5x+25}}$$

If we applied the same method using the A.M.–G.M. Inequality, we obtained equality when and only when $\sqrt{x^2-3x+9} = \sqrt{x^2-5x+25}$, i.e. $x = 8$.

However, this time we got a wrong answer, because the correct answer is $x = \frac{15}{8}$!

To explain such a discrepancy, we should note that the A.M.–G.M. Inequality only implies that $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ for non–negative a, b, with equality when and only when $a = b$. It tells us that $a+b$ can never get less than twice the square root of ab, but it says absolutely nothing about the minimum value of $a+b$. We are in fact looking at two different problems!

The following provides a direct (but may not be the most illuminating) explanation by actually plotting the two graphs of the functions on the same space.

We will trace the values of different components and see what happens behind the scenes. Let

$A=\sqrt{x^2+1}$, $B=\sqrt{x^2-6x+13}$, $f(x)=A+B=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-6x+13}$ and

$g(x)=2\sqrt{AB}=2\sqrt{\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{x^2-6x+13}}$. The following table shows the values of the 4 expressions for some values of x.

x	$A=\sqrt{x^2+1}$	$B=\sqrt{x^2-6x+13}$	$f(x)=A+B$	$g(x)=2\sqrt{AB}$
-1	1.41421……	4.47213……	5.88634……	5.02897……
0	1	3.60555……	4.60555……	3.79765......
1	1.41421……	2.82842……	**4.24264……**	4
2	2.23606……	2.23606……	**4.47213……**	**4.47213……**
3	3.16227……	2	5.16227……	5.02973……

As predicted by A.M.–G.M. Inequality, the value of $f(x)$ is greater than that of $g(x)$ for all real values of x except $x=2$. (See the green values on the table.) But this value has nothing to do with the minimum value of $f(x)$. (See the blue value on the table.)

If we consider the graphs in Figure 8, it would be more appealing. The red graph $y=f(x)$ and the blue graph $y=g(x)$ intersects at the point $(2, 2\sqrt{5})$. Nevertheless, $y=f(x)$ attains the minimum point $(1, 3\sqrt{2})$ on its own.

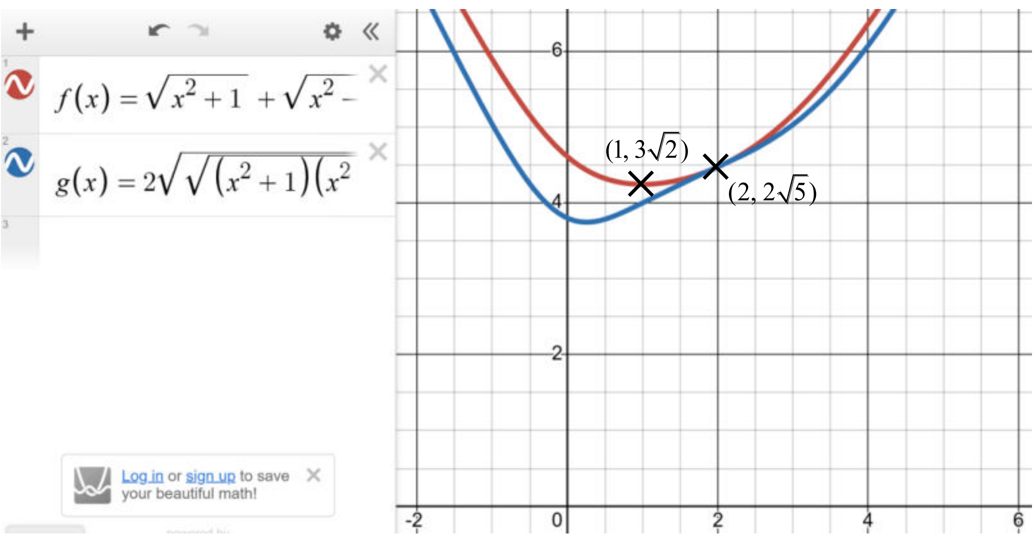


Figure 8

But how does it explain the case for minimizing $h(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-6x+10}$? Let's consider the graphs again. In this case, we let $A = \sqrt{x^2+1}$, $B = \sqrt{x^2-6x+10}$,

$$h(x) = A + B = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-6x+10}$$

and $g(x) = 2\sqrt{AB} = 2\sqrt{\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{x^2-6x+10}}$. (See Figure 9.)

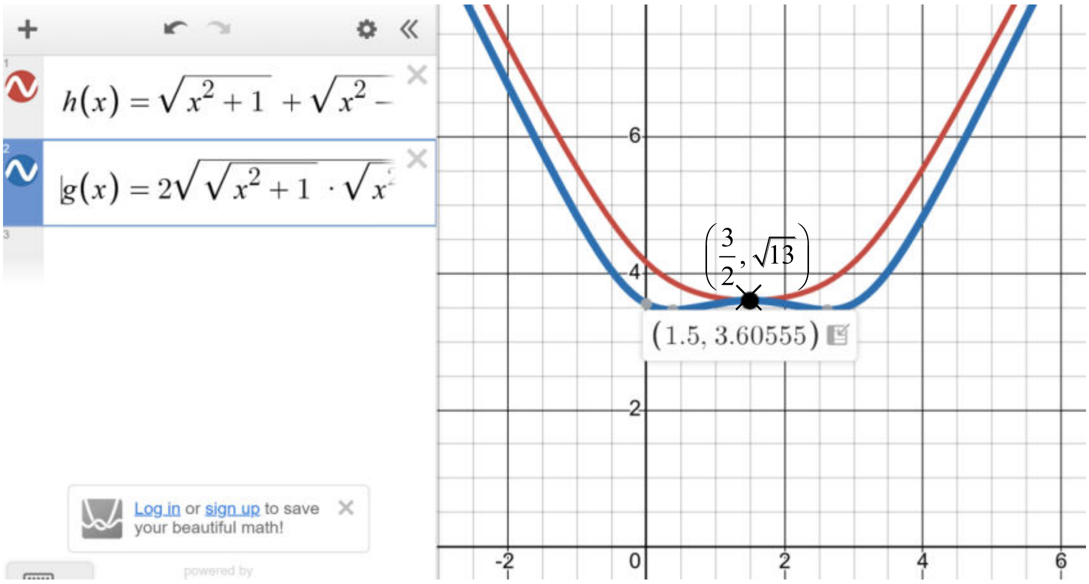


Figure 9

The graphs of $y = h(x)$ and $y = g(x)$ intersect at the minimum point of the graph of $y = h(x)$. This is just a coincidence!

Why would the student make use of the A.M.–G.M. Inequality to work out the minimization problem? Apparently, the student was trying to imitate the working on another familiar example in class before. What immediately comes to mind is the problem: Minimize the perimeter P of a rectangle with fixed area A. (Its dual problem is: Maximize area A of a rectangle with fixed perimeter P.) Can readers pinpoint why the A.M.–G.M. Inequality works beautifully for this problem but fails miserably for the problem on minimizing $g(x) = \sqrt{x^2+ax+b} + \sqrt{x^2+cx+d}$? This will provide another good topic for discussion in class.

Let’s start with the general case $g(x)$ again.

Consider AM–GM Inequality:

$$g(x)=\sqrt{x^2+ax+b}+\sqrt{x^2+cx+d}\geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+ax+b}\cdot\sqrt{x^2+cx+d}}$$

Yet, the wrong method gives the correct answer in some special cases. Can we explain those special cases? For convenience of computation we make a shift of origin and write the function as

$$G(x)=\sqrt{x^2+B^2}+\sqrt{(C-x)^2+D^2}$$

$$=\sqrt{x^2+B^2}+\sqrt{x^2-2Cx+(C^2+D^2)}$$

that is, $a=0$, $b=B^2$, $c=-2C$, $d=C^2+D^2$.

(See Figure 10.)

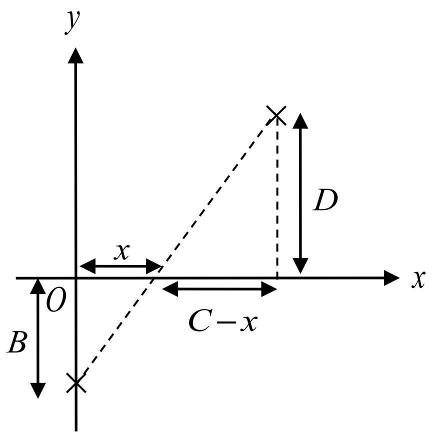


Figure 10

For x to yield a minimum, $\dfrac{x}{B}=\dfrac{C-x}{D}$, so

$$x=\frac{BC}{B+D}.$$

Equality in the A.M.–G.M. Inequality holds when and only when

$$\sqrt{X^2+B^2}=\sqrt{X^2-2CX+(C^2+D^2)}, \quad \text{so}$$

$$X=\frac{C^2+D^2-B^2}{2C}$$

We want to see when x and X are equal.

If $B=D$, then obviously $x=X=\dfrac{C}{2}$.

If $x=X$, then $\dfrac{BC}{B+D}=\dfrac{C^2+D^2-B^2}{2C}$. After simplification, we have

$$B^2-D^2=C^2D-C^2B+D^2B-DB^2,$$

hence, $(B-D)[(B+D)^2+C^2]=0$. But $(B+D)^2+C^2 \neq 0$, so $B-D=0$, that is, $B=D$.

In the case of $h(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-6x+10}$, $a=0$, $b=1$, $c=-6$, $d=10$, that is $B=D=1$, it is merely a coincidence for A.M.–G.M. Inequality to be applicable.

If we view the situation in geometry, the explanation of the coincidence --- correct answer by a wrong method --- will be even more revealing. Let us look at it now as a conclusion to this paper.

In Figure 11, *OA* and *CB* are perpendicular to *OC*. A' is on *AO* produced with $OA=OA'$. Let $A'B$ intersect *OC* at *P*. Let *M* be the midpoint of *AB* and *MQ* is perpendicular to *AB*, intersecting *OC* at *Q*. Hence, $AQ=BQ$. We ask: when will *P* and *Q* coincide?

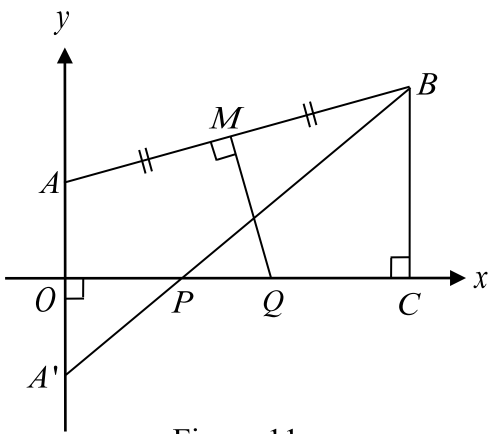


Figure 11

If $OA=CB$, then *OCBA* is a rectangle, so both *P* and *Q* are midpoints of *OC*, that is, *P* and *Q* coincide. The condition that $OA=CB$ is also necessary for *P* and *Q* to coincide. Suppose $P=Q$, then $AP=AQ=BQ=BP$, so $A'P=AP=BP$. By the Midpoint Theorem, *PM* is parallel to *OA* and *CB*. Hence, *OCBA* is a rectangle, so $OA=CB$.

Authors' Contact:

Choi Wai-Fung, Brian

e-mail: wfchoi9981@gmail.com

YouTube Channel: Mathusiasm

https://www.youtube.com/@mathusiasm

Siu Man-Keung

e-mail: mathsiu@hku.hk

Corrigenda

Owing to a technical error concerning Article 2 "*A Scenic Excursion in Geometric Wonderland*—*On Ratio of Area*", in the 28th issue of the School Mathematics Newsletter(SMN), the authors have submitted a revised version, which has been uploaded to the following webpage:

https://www.edb.gov.hk/tc/curriculum-development/kla/ma/res/smn.html

The amended version features a clearer and more streamlined proof of the core result, through which the two classic theorems are derived. Additionally, the authors have included an additional proof that verifies the equivalence of these two classic theorems. Furthermore, the authors have added references to other scholars' work, including a GeoGebra applet relevant to the problem prepared by a Slovenian friend Damjan Kobal.

3. 又談先乘除後加減

陳葉祥

香港中文大學課程與教學學系

引言

整數的四則運算是小學數學科數範疇的基礎課題之一[1]，其中「先乘除後加減」的運算次序是這課題的核心內容（參考：[1][2]）。其實已有不少文章討論這內容，例如：[2]，[3]，[4]。上一期的《學校數學通訊》，劉國賢老師亦有一篇關於這內容的文章[5]。不過，劉老師的文章主要是關於幫助那些對這法則（包括代數式）仍感到困難及不明白「何時在運算時要作分配」的中學生。至於這篇文章的重點則在於討論小學老師教授這內容時的處理方法。

用這方法引入「先乘除後加減」恰當嗎？

引發筆者寫這篇文章是源於某些小學數學老師教授「先乘除後加減」的方法。因工作緣故，筆者每年都需要觀不少小學數學課堂[3]。筆者發現偶然（但超過一次）有老師採取以下方法來引介「先乘除後加減」（以「先乘後加」的法則為例）。請讀者先思考這方法是否恰當。

首先，老師提出一道需要先乘後加的文字（情境）題目。舉例：小明原本有 3 元，他每天儲蓄 5 元，7 天後他有多少錢？接著，老師用不同方法（例如：畫圖、實物模擬）與學生一同找出答案，即 38 元。接著就是列式：$3+5\times7$。跟著，老師跟學生討論應該是先計 $3+5$，抑或先計 5×7。答案是後者，否則就計不到 38。最後，老師根據這例子得出「先乘後加」的結論。

---

[1] 另一個基礎課題是分數。

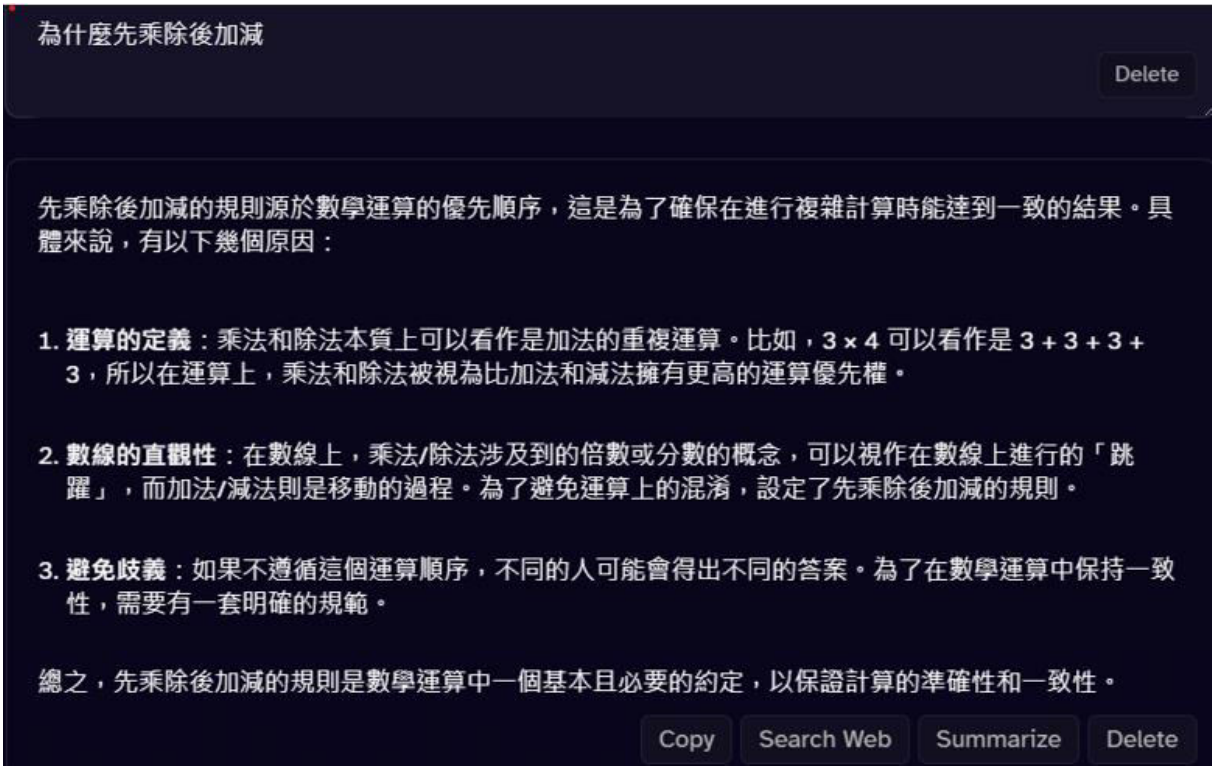
[2] 3N4 及 4N5 分別是「四則運算（一）」及「四則運算（二）」，當中包括「先乘除後加減」。

[3] 主要是仍在受訓的在職或未入職的老師。

這個教學方法恰當嗎？若否，問題在哪裡？讓我們思考另一個情境。小明的爸爸每天給他 3 元零用錢，而他的媽媽每天也給他 5 元零用錢。那麼，小明一星期（7 天）共有多少零用錢？雖然這個情境亦是涉及 3，5，7 的加乘混合計算題，但它是先計 3＋5，**因為這個情境必須先計加！**若果根據這個情境，難道就可以得出「先加後乘」的法則？因此，上面以情境來引入「先乘後加」的法則的教學策略是**誤導**的！一個情境（文字題），應該先乘抑或先加，乃取決於情境本身，而不是運算次序的法則。**因此，試圖以生活情境來引入「先乘除後加減」的法則，根本就邏輯上行不通！**

為什麼「先乘除後加減」？

那麼，我們應如何解釋這個法則？雖然已有不少書本及文章（包括課程文件）都有提及這個問題，但既然現在流行 AI，我們就先看看 AI 如何回答這個問題。以下是筆者於 2024 年 10 月 31 在 https://deepai.org/chat/free-chatgpt 查詢這問題得到的答案[4]。



[4] 不過，在 2025 年 5 月 4 日，筆者在上述網址再次查詢這個問題。它提供的答案已完全不同，基本上只剩下「避免產生歧義」這個理由，而且解釋更為詳盡及仔細。

AI 提出了三個原因。第一個原因是「運算的定義」，認為由於乘法是同數的連加，所以乘法運算有「優先權」。筆者曾聽過不少人以這個理由來解釋先乘除後加減。不過，其實這是似是而非的理由。乘法固然是同數的連加（至少對整數而言），但這只是說，乘法在某意義上是連加法的「簡記」，它無法為優先計算乘法提供必然理由。至於第二個原因「數線的直觀性」，它指出乘法是倍數，是「跳躍」，而加法則是「移動」。其實筆者不明白這跟「先乘除後加減」有何關係。它似乎是說乘法走得快些，所以便需要先計算。不幸地，這只是堆砌出來的所謂理由。第三個理由是「避免歧義」。它指出「為了在數學運算中保持一致性，需要有一套明確的規範。」換句話說，「先乘除後加減」這個法則只是一個「約定」。不少文章（例如：[2]，[3]，[4]，[5]）都指出了這一點。事實上，課程文件亦清楚寫明：「學生須認識以先乘後加減的**約定**運算次序進行不超過四個數的乘加和乘減混合運算。」（粗體的強調為筆者所加）（《小學數學課程闡釋（第一學習階段）》[6]，3N4，頁 39）。筆者甚至認為「約定」是這個法則**唯一的理由**[5]。 話雖如此，筆者發現有不少人（老師和學生）對於這個理由感到不舒服。因此，筆者在下文會對「約定」作進一步的解釋。

「先乘除後加減」是一個約定的法則

上文提到兩個情境。它們都是涉及 3，5，7 的加乘混合計算。第一個是先乘後加，第二個是先加後乘。它們的運算次序取決於題目的實際情境，跟四則運算的次序法則沒有關係。這就是上文提到在教學上以生活情境引入這個法則是行不通的！不過，在文字題的討論上，我們仍有一個問題需要處理，就是算式的表達方法。依照上述兩個情境，算式都是 $3 + 5 \times 7$。那麼，可以怎樣**表達**第一個情境是先乘後加，而第二個情境是先加後乘呢？如果情境（題目）只涉及加和乘，其實問題不大。只要把第一個情境的算式寫成 $5 \times 7 + 3$，第二個情境的算式寫成 $3+5\times7$，然後由左到右運算就可以。不過，若果情境涉及減法或除法，那就行不通了。另一個可行的方法是用括號表示計算的先後次序：第一個情境的算式寫成 $3+(5\times7)$，第二

[5] 以上的 AI 答案分析對我們有重要的提醒。雖然現時的 AI 發展迅速，對老師的教學預備可能有幫助。不過，老師需要有一個慎思明辨及求真的態度，小心分辨 AI 答案的正確性，切勿輕易相信，以免誤導學生。

個情境的算式寫成（3+5）×7。本來這個方案已解決了算式表達的問題。不過，若果算式中有 N 個運算，就需要 N - 1 個括號。數學家想精簡一點。於是，他們「規定」：在一般情況下，先做乘（或除）後做加（或減）。當遇到不依這次序的例外情況，就加括號。於是，上面的算式分別變成：3 + 5 × 7 及（3 + 5）× 7。第一個情境不再需要括號（寫了亦沒有錯），因為計算次序符合「一般情況」。第二個情境是「例外情況」，所以就需要加括號。這就是約定的意思。它是一個約定，因為規定「先做乘（或除）後做加（或減）」**是一個偶然的決定，沒有數學上的必然理由**。不過，既然規定了，就不可以不跟從，否則就會引起混亂和誤解。其實，「約定」在日常生活中是常有發生。例如，有學校規定上落樓梯都需靠右行。（為什麼是靠右而非靠左？其實沒有必然的原因，只是一個約定。）不過，若不依從就（有可能）引致相撞或阻塞了。

總結來說，「先做乘（或除）後做加（或減）」[6]是「**約定俗成**」**的算式表達習慣**。雖然它本質上沒有數學上的必然性原因，但若果不依從就會令到其他人有誤解。在實際教學上，四則運算混合題可分為兩類：文字題和算術題。文字題的運算次序是根據題目的情境而定，而其對應的算式就按照「先乘除後加減」的慣例來表達。至於沒有情境的算術題，則按照上面的慣例來理解及計算。在教學上，這兩類題目是不應混淆的。

一些反思（結語）

文章開首時提過，引發筆者寫這篇文章是由於曾經在觀課時發現有些小學數學老師採用不適當的方法引介「先乘除後加減」的法則[7]。歸根究底，這個方法不恰當，是因為混淆了文字題和算術題，錯誤地以生活情境來解釋數學理論和概念。這種情況尤其值得（小學）數學老師關注。首先，細看課程，無論是 3N4 或 4N5，「混合運算」及「解應用題」都放在同一個學

[6] 說得準確點，還有括號。其作用是在有需要時打破「先乘（或除）後加（或減）」的慣例。

[7] 筆者曾經問過其中一個老師採用這方法的原因。他認為需要解釋這個法則給學生，不希望他們死記硬背。這是一個負責任的（數學）老師應有的態度，是絕對值得嘉許和鼓勵的。

習單位。從課程安排的角度，這是合適的，因為算術的運算確實有不少（生活）應用，而應用題可以令枯燥的運算增添趣味。不過，情境應用通常都不適宜用來**解釋**數學概念和促進理解。老師設計教學時不宜把兩者的關係混亂。「解釋」和「應用」是兩回事！這又引伸到 STEAM、數學建模，與及數學本質的關係。這是一個大題目，不宜在這短文作詳細討論[8]。以下只提出一些觀點讓讀者思考。無可否認，近來香港提倡的 STEAM 及數學建模是有潛質幫助學生留意數學在各方面的應用，以及提升學生的創科意念。不過，應用歸應用。數學是一個歷史悠久的學科（subject discipline），她本身的學科系統是獨立自存的。數學的理論不需要數學以外的知識來解釋。有些小學及中學老師喜歡以生活例子來解釋數學概念。無可否認，有時候這方法可以令抽象的概念具體化。不過，這方法不一定都可以幫助數學的理解。本文就指出生活例子無法幫助理解「先乘除後加減」，甚至可能產生混亂。由此引伸，當數理老師推行 STEAM 及數學建模的時候，不要忘記同時應建立紮實的數理基礎知識。**千萬不要以 STEAM 及數學建模代替堅實的數學理解**[9]。另外，數學的應用固然重要和有價值。不過，「欣賞數學中的美學及文化」（〔7〕，數學課程的宗旨（e））是同樣重要。數學是獨立自存的學科。她的「美學及文化」是內部的，不需要透過它的「用」來展現其「美」。這是對生活在一個強調「有用」的年代的數學老師重要的提醒！

作者電郵：mathchan@cuhk.edu.hk

[8] 由第 20 期開始的《學校數學通訊》，有不少關於 STEAM 及數學建模的文章。有興趣的讀者，可參閱相關的內容。

[9] 在差不多十年前，美國提倡推行 STEM 教育。當時的數學教師協會（NCSM 及 NCTM）曾發表一份立場書[8]，其中有一段話，對現今的香港數學教育工作者仍是一個重要的提醒："In addition to integrative experiences connecting the disciplines of STEM, students need a strong mathematics foundation to succeed in STEM fields and to make sense of STEM-related topics in their daily lives. Thus, any STEM education program (including out-of-school activities) should support and enhance a school's mathematics program, ensuring that instructional time for mathematics is not compromised. In addition, any STEM activity claiming to address mathematics should do so with integrity to the grade level's mathematics content and mathematical practices." 另外，黃家鳴老師於差不多 30 年前曾寫過一篇關於運用生活情境於數學課堂的文章[9]，甚具思考價值。

參考文獻

[1] 課程發展議會（編）（2017）。《數學教育學習領域課程指引補充文件：小學數學科學習內容》。香港：教育局，頁 34-36、47-49。

[2] 蕭文強（1982）。〈先乘除後加減和先加減後乘除〉。《數學教學季刊》3 期，頁 2-3。

[3] 吳作樂、吳秉翰（2010）。〈為什麼規定，要先乘除後加減〉。《想問卻不敢問的數學問題》，台北：台灣英文新聞股份有限公司，頁 5。

[4] 黃毅英（主編）（2013）。〈第一章：數及其運算〉。《數學百子櫃系列（十四）：數學教師不怕被學生難倒了！ — 中小學數學教師所需的數學知識》，香港：教育局課程發展處數學教育組，頁 11。

[5] 劉國賢（2025）。〈談談先乘除後加減〉。《學校數學通訊》28 期，頁 129-137。

[6] 教育局數學教育組（編）（2018）。《小學數學課程闡釋（第一學習階段）》。香港：教育局課程發展處數學教育組，頁 39。

[7] 課程發展議會（編）（2017）。《數學教育學習領域課程指引（小一至中六）》。香港：教育局，頁 9。

[8] The National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM) and the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2018). *Building STEM Education on a Sound Mathematical Foundation: A joint position statement on STEM from the National Council of Supervisors of Mathematics and the National Council of Teachers of Mathematics.* Available online at https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Position-Statements/Building-STEM-Education-on-a-Sound-Mathematical-Foundation/.

[9] Wong, K. M. (1997). Do real-world situations necessarily constitute “authentic” mathematical tasks in the mathematics classroom?. *Curriculum Forum, 6*(2), 1-15

4. 祖沖之《大明曆》算法選釋

陳泳昌博士

香港珠海學院兼任助理教授

前言

祖沖之（429-500）是中國南北朝時期著名數學家，他是史上首人求出圓周率為 3.1415926＜π＜3.1415927，準確至小數點後 7 位，並給出近似值$\pi \approx \frac{355}{113}$，此項圓周率推算的世界紀錄，維持了900 餘年才被打破。祖沖之亦善製器械，曾造日行百里的「千里船」、水力推動的碓磨、依靠機械轉動的指南車等工具；又與兒子祖暅（又稱祖暅之，生卒不詳）合作，給出球體體積公式。祖沖之曾撰《綴術》一書，唐朝年間，被國子監（相當於國家最高學府）選為指定算學課本，可惜內容艱深，後人難以究其奧義，是故該書佚失不傳。

除此之外，祖沖之於天文曆算亦有卓越成就。中國傳統曆法，包括天文推步算法，求出太陽、月亮及五星（土星、木星、火星、金星、水星）在天空的位置，以此編製曆書。祖沖之編撰《大明曆》，提出多項革新，但面對權臣阻撓，直至他去世時，改曆之議仍未落實。後來祖暅多次上奏，直至天監九年（510），《大明曆》才得以頒用。

正史《宋書·律曆志》有《大明曆》的詳盡記載，本文摘要介紹其曆術，闡釋所用的數學方法，兼論中國傳統曆法的一些沿革。

分數記數法、年和月的日數

中國傳統曆法涉及不少天文數據，一般用兩數的比例（即是分數）表示。連續兩次冬至的平均時間，現今稱作回歸年（Tropical Year，今測值 365.242199 日）；而連續兩次新月（又稱「日

月合朔」，完全不見月光，並非一彎新月）的平均時間， 稱作朔望月（Synodic Month，今測值 29.530589 日）。在《大明曆》中，回歸年是$365\frac{9589}{39491}\approx 365.2428$日，朔望月是$\frac{116321}{3939}\approx 29.5306$日，大月有 30 日，小月有 29 日。但在祖沖之的年代，新月可以出現於上月末日、本月初一日或初二日；直至唐朝曆法，才要求新月必定出現於初一日。

如果天文數據有不同分母，難免會令計算繁複。後來從唐朝起，一部曆法內的各種數據，皆使用統一分母，以便計算。元朝郭守敬（1231-1316）的《授時曆》更進一步，所有數據皆以 10000 為分母，1 日為 100 刻，1 刻為 100 分，1 分為 100 秒，幾乎等同現今的十進制小數。分秒百進制很可能早已見用於唐朝民間星占家所用的《符天曆》，但至元朝方為官方曆法採用。

閏周

中國傳統曆法採用閏月，平年有 12 個月，閏年有 13 個月。先秦曆法已安排每 19 年有 7 個閏月，但隨著數據日趨精確，東晉、南北朝的曆家開始探索其他閏周（Intercalary Cycle）。在《大明曆》中，每 391 年有 144 個閏月，即是有以下等式：

年數 $391\times$回歸年日數 $365\frac{9589}{39491}=$ 月數$(391\times 12+144)\times$朔望月日數$\frac{116321}{3939}$。

史籍沒有記載祖沖之如何求出這閏周，但他很可能是用了「調日法」。倘若已知$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$，復設 m, k 為正整數，則有不等式成立：$\frac{a}{b}<\frac{ma+kc}{mb+kd}<\frac{c}{d}$。因此如果曆家已知某天文數值是在 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 之間，則可反覆嘗試不同的 m、k，尋求更精確的數值 $\frac{ma+kc}{mb+kd}$。事實上，南北朝曆家所用的閏周，無一例外地都可以用「每 $19n+11$ 年有 $7n+4$ 個閏月」表示（n 為正整數，《大明曆》取 $n=20$）。

周天度數、歲差

太陽沿黃道（Ecliptic）繞行 1 周天的時間，現稱恒星年（Sidereal Year，今測值 365.256363 日）[1]。由於歲差（Axial Precession）的關係，冬至點每年會以 50” 的速度緩慢西移，在太陽由西向東完整繞行 1 周天之前，會提早少許到達冬至點，因此回歸年比恒星年稍短。

現今定義 1 周天為 360°，但中國傳統曆法，以恒星年日數為周天度數，如此做法，太陽便恰好在天空平均每日行 1 度[2]。《大明曆》恒星年是$\frac{14424664}{39491} \approx 365.2646$日，因此周天度數便是 365.2646 度。《大明曆》是中國首部考慮歲差的曆法，恒星年和回歸年相差$\frac{14424664}{39491} - 365\frac{9589}{39491} = \frac{860}{39491}$日，又因為太陽每日行 1 度，故此《大明曆》歲差值是冬至點每年西移$\frac{860}{39491}$度。

中國傳統曆法，周天度數大致從北方起算，但各部曆法的起算點稍有不同。《大明曆》的度數，是從虛宿 1 度起算[3]。

節氣

二十四節氣，體現一年氣候變化，是中國傳統曆法所獨有。《大明曆》將 1 回歸年平分 24 份，每經過$365\frac{9589}{39491} \div 24 \approx 15.2185$日，便是一個節氣。西漢至明朝的曆家皆用此法，計算曆書上的節氣時刻。自清朝起，改將周天 360°平分 24 份，太陽沿黃道每運行 15°，是為一個節氣。

---

[1] 談論古代天文曆算時，在不致誤解下，可用古人視角，以地球為宇宙中心，太陽在天空運行。事實上，地球繞太陽公轉，因此恒星年即是地球公轉周期。

[2] 在本文，「度」表示中國傳統曆法角度單位，現代角度單位用「°」表示。

[3] 虛宿是中國古天文學二十八宿之一，共有兩顆星：虛宿一（寶瓶座 β）和虛宿二（小馬座 α）。

冬至時刻測算

冬至測算，在中國傳統曆法至為重要。雖然習俗以春節（正月初一日）或立春為一年之始，但曆算則以早一年冬至為計算始點。因此甲子年曆書，實際上是以癸亥年冬至開始推算，這稱「歲前冬至」，又稱「天正冬至」。

在中原地區，冬至時日影最長。曆家豎立圭表（一般是 8 尺高），觀測日影變化，即可測得冬至時刻。《宋書．律曆志》記載，祖沖之在大明五年十月十日（461 年 11 月 27 日）正午，測得日影 1 丈 7 寸 7 分半；在大明五年十一月二十五日（462 年 1 月 11 日）正午，測得日影 1 丈 8 寸 1 分太；在大明五年十一月二十六日（462 年 1 月 12 日）正午，測得日影 1 丈 7 寸 5 分強[4]。祖沖之由此測得冬至，是大明五年十一月初三日（461 年 12 月 20 日）夜半後 31 刻[5]。

祖沖之的冬至時刻算法，用現代數學闡釋，是構造線性模型，如圖 1 所示。設 $x_0=0$，代表大明五年十月十日夜半，則 $x_1=0.5$，代表第一次觀測是同日正午；$x_2=45.5$ 和 $x_3=46.5$，代表第二次及第三次觀測距離 x_0 的日數。再設 $y_1=1.0775$，$y_2=1.08175$，$y_3=1.0750833$，代表各次觀測的日影長度。作直線通過(x_2, y_2)和(x_3, y_3)，求出斜率 m，復以斜率$-m$，作直線通過(x_1, y_1)，兩直線相交於(x, y)，x 便是冬至時刻，該時日影最長，長度為 y。計算可知：

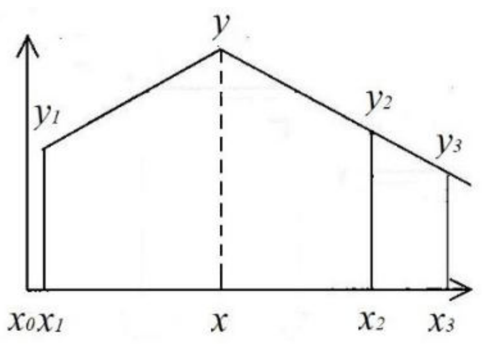


圖 1：祖沖之的冬至測算

$$x=\frac{(y_2-y_3)x_1+(y_1-y_3)x_2+(y_2-y_1)x_3}{2(y_2-y_3)}=23.31\ldots$$

[4] 按《宋書．律曆志》，長度用 10 進制，1 丈等於 10 尺，1 尺等於 10 寸，如此類推。奇零部份，「太」等於 $\frac{3}{4}$，「半」等於$\frac{2}{4}$，「少」等於$\frac{1}{4}$，「強」等於$+\frac{1}{12}$、「弱」等於$-\frac{1}{12}$。

[5] 中國古代用漏刻計時，傳統定義 1 日為 100 刻。

因此冬至時刻是大明五年十月十日之後 23 日，即大明五年十一月初三日，夜半後 31 刻，與史載相合。以上算式又可寫成：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}+(x_3-x_2)\frac{y_2-y_1}{2(y_2-y_3)}$$

注意到$\frac{x_1+x_2}{2}$給出冬至日期，$(x_3-x_2)\frac{y_2-y_1}{2(y_2-y_3)}$給出冬至時刻，又因為$x_3-x_2=1$，冬至時刻可寫成$\frac{y_2-y_1}{2(y_2-y_3)}$。在《宋書・律曆志》，祖沖之集中討論冬至時刻，因此原文只簡單列出 $\frac{y_2-y_1}{2(y_2-y_3)}$的計算。

月亮中心差算法

月亮繞行 1 周天的時間，現稱恒星月（Sidereal Month，今測值 27.321661 日）。《大明曆》沒有直接列出恒星月數值，但根據公式$\frac{1}{\text{恒星月}}-\frac{1}{\text{恒星年}}=\frac{1}{\text{朔望月}}$，可算出恒星月是 27.3217 日[6]。《大明曆》給出月亮平均每日運行$13+\frac{14573}{39491}+\frac{14231}{39491\times 116321}\approx 13.3690$ 度，此數等於$\frac{\text{周天度數}}{\text{恒星月}}$。

上文只論述月亮的平均運動，但按開普勒行星運動定律（Kepler’s Laws of Planetary Motion），月亮以橢圓形軌道繞地球公轉，行經近地點（Perigee）時，運行最快；行經遠地點（Apogee）時，運行最慢。古代曆家先假設月亮以均速運行，稱為「平行」（Mean Anomaly），然後計算修正值，稱為「中心差」（Equation of Center）。平行加上中心差，便是「實行」（True Anomaly），即月亮的實際位置。

[6] $\frac{\text{周天度數}}{\text{恒星月}}$是月亮平均每日運行度數，$\frac{\text{周天度數}}{\text{恒星年}}$是太陽平均每日運行度數，二者之差，便是日月在天空彼此分開的速率，等於$\frac{\text{周天度數}}{\text{朔望月}}$。

月亮連續兩次通過近地點的平均時間，現稱近點月（Anomalistic Month，今測值 27.554550 日）。早於東漢末年，中國曆家已引入月亮中心差算法。《大明曆》的近點月是$\frac{726810}{26377} \approx 27.5547$日，並有表格，列出月亮通過近地點後，每日的運行度數（見表 1）。《大明曆》亦給出線性插值（Linear Interpolation）算法，依照表格，求出任意時刻的月亮中心差。

過近地點後日數（單位：日）	該日運行度數（單位：度）	過近地點後日數（單位：日）	該日運行度數（單位：度）
1	$14\frac{13}{23}$	15	$12\frac{5}{23}$
2	$14\frac{11}{23}$	16	$12\frac{7}{23}$
3	$14\frac{8}{23}$	17	$12\frac{10}{23}$
4	$14\frac{4}{23}$	18	$12\frac{14}{23}$
5	$13\frac{22}{23}$	19	$12\frac{19}{23}$
6	$13\frac{17}{23}$	20	$13\frac{1}{23}$
7	$13\frac{11}{23}$	21	$13\frac{7}{23}$
8	$13\frac{5}{23}$	22	$13\frac{13}{23}$
9	$12\frac{22}{23}$	23	$13\frac{19}{23}$
10	$12\frac{16}{23}$	24	$14\frac{1}{23}$
11	$12\frac{11}{23}$	25	$14\frac{6}{23}$
12	$12\frac{8}{23}$	26	$14\frac{10}{23}$
13	$12\frac{6}{23}$	27	$14\frac{12}{23}$
14	$12\frac{4}{23}$	28	$14\frac{14}{23}$

表 1：《大明曆》月亮中心差表

另一方面，地球以橢圓形軌道繞太陽公轉，因此太陽在天空的運行，亦有快慢之別。在祖沖之去世後約 50 年，中國曆家發現太陽運行速度不均；隋朝的曆法，乃開始引入太陽中心差算法。

上元之推算

中國傳統曆法，認為遠古曾有一次冬至，發生時刻恰好是甲子年[7]、十一月[8]初一甲子日夜半，而當時日、月、五星又剛好在天空會聚，是為「上元」。實際上此等天象幾乎不可能出現，然而中國曆家致力計算上元於何時發生，並以此為整部曆法的推算始點。直至元朝郭守敬《授時曆》，才停止上元推算。

《大明曆》首句曰：「上元甲子至宋大明七年癸卯，五萬一千九百三十九年，算外。」我們設干支序數，甲子=0，乙丑=1，如此類推，直至癸亥=59，以此驗證《大明曆》的上元推算：

1. 《大明曆》上元定於甲子年（干支序數是 0），由此下推 51939 年，$51939 \bmod 60 = 39$，得到癸卯年（干支序數是 39），正是大明七年（463）歲次干支。

2. 史籍沒有祖沖之在大明七年的冬至測算紀錄，但他測得大明六年（462）歲前冬至，是大明五年十一月初三日（461 年 12 月 20 日）夜半後 31 刻。該日是乙酉日，干支序數是 21。《大明曆》上元定於甲子日（干支序數是 0），由此下推 51938 年（早 1 年），即 $51938 \times 365\frac{9589}{39491} \approx 18969981.31$日，除以 60 再取餘數，得 21.31 日，正是乙酉日夜半後 31 刻。

[7] 甲子年歲前冬至，即實際上是癸亥年冬至。

[8] 中國傳統曆法規則，冬至所在的月份必為十一月。其他節氣無此規定，例如立春可以在十二月或正月出現。

3. 《大明曆》上元定於初一日，新月（日月合朔）發生於夜半，由此下推 51938 年（早 1 年），相當於$51938 \times 365\frac{9589}{39491} \div \frac{116321}{3939} \approx 642384.06$月。截取整數，由上元開始下推 642384 月，即$642384 \times \frac{116321}{3939} \approx 18969979.50$日。因此由上元開始下推 18969979 日，是初一日，該日夜半後 50 刻出現新月（日月合朔）；由上元開始下推 18969981 日，是初三日，該日夜半後 31 刻出現冬至。

結語

除了太陽和月亮的運行外，《大明曆》亦有五星運行、日月交食和晝夜漏刻的計算，由於篇幅有限，就不詳述。謹此希望本文，讓讀者認識祖沖之及其他中國曆家所用的數學方法。

作者電郵：jsphchan@connect.hku.hk

參考文獻

[1] 沈約（441-513）等：《宋書》（北京：中華書局，1974 年）。

[2] 曲安京：《中國曆法與數學》（北京：科學出版社，2005 年）。

[3] 曲安京：《中國數理天文學》（北京：科學出版社，2008 年）。

[4] 譚冰（陳泳昌）：《古今曆術考》（香港：三聯書店，2013 年）。

5. 在估算教學中發展小學生數學思維的實踐探索

張曉芸

上海市靜安區教育學院

估算是指大致推算。內地與香港小學階段估算的學習內容基本一致，貫穿於各學習範疇，主要是對數量和四則運算結果、測量結果及統計數量的估算。本文僅探討估算在四則運算中的教學實踐。

與四則運算的精確計算相比，估算內容佔比非常小。傳統的估算通常是對四則運算結果、範圍的估計，較少與實際問題相聯繫；估算的方法也僅限於“四捨五入”法，將數值取整後轉化為整十、整百數的運算；教學評估很少考查估算，即使考也往往只關注最終結果是否接近標準答案，而忽略對估算策略合理性的評價。基於課程內容與評估的導向，造成了估算既簡單又不重要的假像。很多教師低估了估算的教學價值，只是把它當成一種技巧傳授。因此，學生也很難體會到估算的現實意義，激發學習興趣。

《義務教育數學課程標準（2022 年）》強調“估算的重點是解決實際問題”。在學業要求中明確提出：能結合具體情境，選擇合適的方法進行估算，並能描述估算的過程，體會估算在生活中的作用。[1]更多教師已經認識到估算不僅是一種基本技能，還是培養數感、邏輯思維及解決問題能力的重要載體。依託現有的教科書，適度開發估算教學的資源，並將其融入課堂教學實踐，能夠有效促進學生數學思維的發展。

[1] 中華人民共和國教育部.《義務教育數學課程標準》. [S]. 北京：北京師範大學出版社，2022：23-25.

一、需求導向，識別估算的應用場景

學生通常依賴是否出現“≈”、“大約”等符號或字眼，或者被動等待教師的指令，機械地選擇用精確計算或估算。而現實情境中的問題往往沒有明確提示。如何解決，需回歸需求分析：理解問題目標，評估數據特徵，主動選擇適切的方法。

全美數學教師理事會(NCTM)早在 1986 年制定的《美國學校數學課程與評價標準》提出：當某人為了求得一個問題的答案而需要進行計算時，他應該意識到選擇方法。[2]也就是從實際需要出發，如果需要近似值選擇估算，如果需要精確值則可以通過口算、筆算或計算器計算。這種廣義的算法選擇包含了計算方式的選擇，計算工具的使用以及計算方法、策略的優化。

為了幫助學生能夠主動思考，整體把握精確計算與估算的應用場景，培養算法選擇意識，可以設計以下練習：

例 1：

博物館兒童票的單價是 24 元，王老師需要購買 198 張兒童票。他帶了 5000 元夠嗎？應找回（或再付）多少錢？5000 元最多可以買多少張？還剩多少錢？

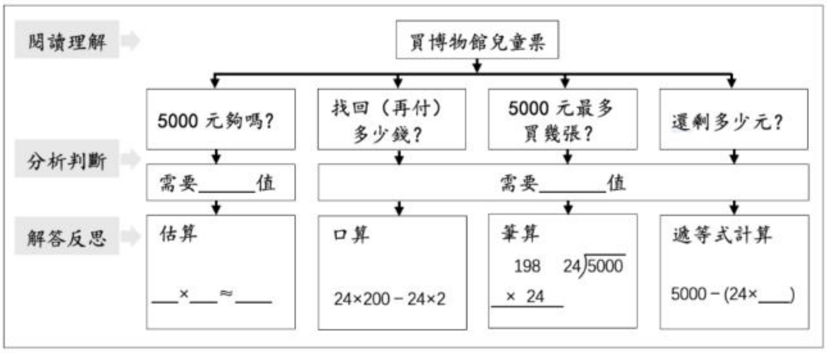


圖 1

[2] 全美數學教師理事會.《美國學校數學課程與評價標準》. [S].人民教育出版社數學室譯.北京：人民教育出版社，1994：7.

傳統運算教學缺失的是對運算思路整體思考與決策的培養。以例 1 為例，輔以結構化的學習支架（圖 1），促進學生理解不同場景對計算差異化的需求，自主探究估算、精確計算，簡便運算的適用場合。通過這樣的學習活動，幫助學生擺脫機械套用算法的慣性，從而逐漸形成依據實際問題的需求，決策何種計算的意識。

二、數形結合，理解估算的算理算法

越來越多的教師在運算教學中重視學生對四則運算算理、算法的理解與掌握。但是在估算的教學中，教科書所呈現的和教師關注的重點，往往都是估算的方法。上海教科書中，兩位數與兩位數相乘的估算，如 11×32 的估算：$10 \times 32 = 320$，僅呈現了把一個因數取整後，轉化為整十、整百數乘法的估算過程和方法，而香港教科書也有類似的例題，這些例題都較少關注估算與精確計算結果的大小關係，及其背後的道理。

以兩位數與兩位數相乘為例，在一個乘法算式中，當一個因數或兩個因數都用“五入”估大，或者都用“四捨”估小取整，根據積的變化規律，比較容易判斷估算結果與精確計算結果的大小關係。

例如估算 18×12，這個乘法算式中，一個因數 18，用“五入”估大為 20；另一個因數 12，用“四捨”估小為 10，再相乘。學生能知道估算結果與精確計算結果比較接近。估算到底比精確計算結果大了，還是小了，很難較快辨別。

為了幫助學生更直觀地理解估算結果與精確計算結果之間的大小關係，可以通過數形結合，以形助數。為使圖示更簡捷，以上述 18×12 的估算為例：

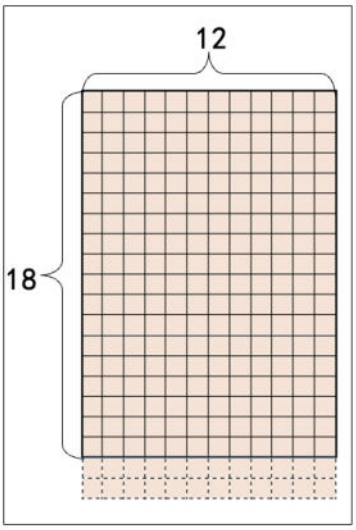


圖 3-1 方法①

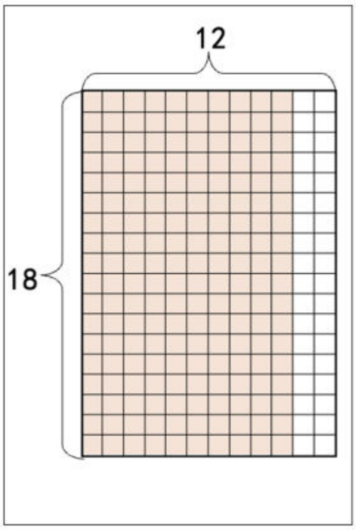


圖 3-2 方法②

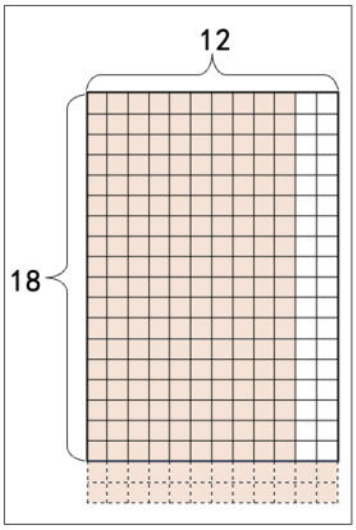


圖 3-3 方法③

方法①（圖 3-1）

一個因數“五入”估大：把 18 取整為 20，20 × 12＝240，估算比精確計算的結果多 2 個 12。圖中 24 個著色虛線方格即為估大的部分。

方法②（圖 3-2）

一個因數“四捨”估小：把 12 取整為 10，18 × 10＝180，估算比精確計算的結果少 2 個 18。圖中 36 個白色方格即為估小的部分。

方法③（圖 3-3）

一個因數“五入”估大，一個因數“四捨”估小：18 取整為 20，12 取整為 10，20 × 10＝200，多算了 2 個 12，少算了 2 個 18，估算比精確計算結果少 2 個 6。這一推理過程並不是每個三、四年級的學生都能深入理解。如果配上方格圖，並輔以動畫演示，把多算的 24 個著色虛線處方格移至少算的 36 個白色方格內填補，還剩下 12 個白色方格沒有估算進去。較為複雜的推理過程變得直觀清晰，易於理解了。

判斷估算與精確計算結果的大小關係，可以運用與鞏固四則運算中和、差、積、商的變化規律，判斷計算結果的合理範圍；也可以通過數形結合，進一步釐清估算及比較的過程，是發展幾何直觀及數學思維的重要題材；它適合面對不同類型的學生因材施教，讓學有餘力的學生自己直接推理或畫圖解釋，“跳一跳摘到果子”；讓有困難的學生也能看圖或動畫演示理解，助力思考。

三、情境驅動，建構估算策略的邏輯

估算是否一定要有現實背景？要看估算的作用，作為檢驗數值計算的結果，或估算運算結果的取值範圍，完全可以脫離背景，思維力度不大；而聯繫現實背景解決問題的估算，對老師和學生來說都是一種挑戰。

1. 借助生活經驗理解“估大”與“估小”的含義

用估算解決實際問題，通常是在運算前用“估大”或“估小”的方法簡化數據，轉化為口算或簡便運算得到近似結果。這裡的“估大”“估小”又和“四捨”“五入”不同。“估大”是無論捨去尾數的大小都向前一位進 1。“估小”則是無論捨去尾數的大小都捨去。

這種對數據取整的處理方式對小學生而言並不陌生，在平時問題解決中也常用到。例如“多邊形面積”單元中“製作圍裙需要多少布料？”的活動：學生算出一條圍裙的布料面積後，需根據尺碼、款式及數量等條件用程式設計軟體計算批量製作的成本，計算結果要求手工取近似值至整數記錄在工作紙上。有一定的生活經驗，就知道製作衣服的布料如果少了是沒有辦法按要求完成的。聯繫這樣的現實背景，合適的取整方式應該是，無論小數部分十分位上的數是否小於 5，都向個位進 1，取較大的整數，也就是需要估大。

估小的方法，在除法問題解決中經常會碰到。如例 1 中“5000 元最多能買幾張單價 24 元的兒童票？”，5000÷24＝208.3，因為商的十分位是 3，無論有沒有情境都用“四捨”，估小取整到個位即可，沒有問題。如果是“5000 元最多能買幾張單價 28 元的成人票？”，5000÷28＝178.571428，因為商的十分位是 5，沒有情境，按“五入”取整到個位是 179。而實際用 5000 元買 179 張是不夠的。因此，聯繫實際情況，無論小數部分十分位上的數是否大於或等於 5，都捨去，取較小的整數，也就是需要估小，最多買 178 張票。正如二年級有餘數的除法應用題中對商的處理，需要借助生活經驗，根據具體情況分析是否需要把商估大。

2. 依託實際情境構建“估大”還是“估小”的邏輯

“估大”還是“估小”除了在對計算結果估計時，需要依靠一些生活經驗以外，有時需根據具體的情境，靈活處理數值再計算結果，以保證“夠”，或足以說明“不夠”。這就需要教師創設一些數據較為合適的情境，引導學生在探究活動中關注推斷的邏輯關係。

把例 1 擴展成下面 2 題，並附上對比的解答方案（如表 1）：

博物館兒童票單價是 24 元，王老師帶了 5000 元。

(1) 買 198 張夠嗎？

(2) 買 250 張夠嗎？

	方向	取整	計算	比較	說理
(1)	估大	198→200	24×200＝4800	4800＜5000	估大夠，肯定夠
(2)	估小	24→20	20×250＝5000	5000＝5000	估小相等，肯定不夠

表 1

(1) 購買數量估大了，198 張估大成 200 張，總價比 5000 元少，實際購買的張數更少，肯定夠。

(2) 單價估小了，把 24 元估小成 20 元，總價正好是 5000 元，實際單價更貴，相同數量總價肯定也更貴，因此不夠買 250 張。

在這兩道例子中，什麼時候估大，什麼時候估小，怎麼比較，內涵著推斷及數據對比適用性的邏輯[3]。學生只有真正弄懂了為什麼估大才能保證“夠”，估小才能足以說明“不夠”的道理以及它們適用範圍的邏輯，才能將估算應用於問題解決中。

此外，這兩道例子中，一道是把“數量”估大，一道是把“單價”估小，哪個因數取整更方便、合理，依靠數感。要在解決問題中做到靈活應用估算，也不是幾道例題就能教會，需要在實踐中不斷積累經驗。可見，聯繫實際問題的估算要比脫離情境的估算更難把握，但它確實是訓練學生邏輯思維的有效途徑。

四、方法多樣，拓寬估算的解決路徑

現代的小學數學課程都強調培養學生的高階思維，鼓勵學生跳出固定的思維框架，創造性地解決問題。估算教學同樣可以引導學生自主探索不同的方法來解決問題。

[3] 劉夢.小學數學 2-3 年級估算教學現狀調查研究.[D].吉林：東北師範大學，2024：25.

例 2：

出版社要用快遞箱寄出 48 本《科學畫報》。一個中號快遞箱，放入物品的重量不能超過 5000 克。一本《科學畫報》重 92 克，這些《科學畫報》能否一次寄出？

上述例 2，通過審題可知要解決的是，能否一次寄出所有畫報的問題。這個問題只需要近似值，估算就能解決。估算要用到的數量關係是每本重量、數量和總重量之間的乘法模型。

通常教師會引導學生用乘法估算總重量，更容易理解。把每本重量 92 克估大成 100 克，把數量 48 本估大成 50 本，100 × 50＝5000，兩個因數都估大正好等於 5000 克，說明精確計算結果肯定小於 5000 克，所以可以一次寄出。

根據乘除的逆運算關係，除法估算有兩種情況（如表 2），若估大單本重量為 100 克，則允許寄的本數為 50 本，超過實際本數，所以可以一次寄出；若估大本數為 50 本，則每本允許的重量為 100 克。實際每本 92 克＜100 克，所以也足以說明可以一次寄出。基於除法中被除數不變，除數變大，商變小的規律，學生需逆向思維理解 “估大一個量會導致另一個量的估算值（允許值）變小”，用變小的估算值（允許值）再與實際相比較。相較乘法的順向、直接思考，除法估算對部分學生來講更抽象，難以理解。

	方向	取整	計算	比較	說理
估算本數	估大	92→100	5000÷100＝50	50＞48	估大夠，肯定夠
估算一本的重量	估大	48→50	5000÷50＝100	100＞98	估大夠，肯定夠

表 2

當然，並不是要每個學生都用多種方法估算每一道題，不同類型的學生可以適用不同的方法。通過各種方法的分享，激發更多學生從不同角度思考問題，開拓思路，靈活應用。即使碰到數據比較特殊，一種方法難以解決時，也可以另闢蹊徑，從其他角度出發解決問題。

五、合理追問，挖掘估算的思維深度

儘管新課標把估算的要求放至第二、三學段，但是實踐表明，小學數學課程在二年級學習三位數加法的完成階段，引進融入情境的估算，便於選擇小學生容易看出“夠”或“不夠”的典型數據，涵蓋多種情況，也有利於學生一開始就獲得估算解決實際問題的整體概貌[4]。

例如在三位數加法學習完成後，結合現實情境，設計這樣的探究活動：

活動一：精確計算，複習三位數加、減法算理與算法。

討論：

1. 這是往、返上海和北京的 2 張機票，提出關於價格計算的問題。
2. 用什麼方法計算，為什麼？
3. 列豎式計算，完成後與同桌說一說計算過程。
4. 關於機票你有什麼建議？（價格便宜，時間不方便）

活動二：估算往返機票總價

上海往返北京機票預算是 1000 元以內，你可以在媽媽提供的航班中任意選擇，搭配成一張往返機票。

---

[4] 張曉芸　曹培英.《小學數學運算教學研究》.[M].上海：上海教育出版社，2024：322.

討論：

1. 思考解決這個問題一定要列豎式計算嗎？（估算）

2. 四人小組合作，每人搭配一張往返機票估算，並在小組交流。

3. 有沒有更便捷的方法找出符合要求的機票？

4. 在這組機票估算中還有什麼和大家分享的？

全班分享時，教師可以有意識地選取估算①＋⑥的情況，先請學生交流（簡報只留①②③和⑥展示相關數據組）。

課堂實錄片段 1：

生：300＋700＝1000（元），兩個加數都估小正好是 1000 元，那麼實際肯定是不夠的。

師板書：300＋700＝1000，估小正好，肯定不夠。

師：⑥除了跟①搭配，還可以跟……

生：跟②③都可以組成往返機票。

師：②和③跟⑥搭配還需要估算嗎？為什麼？（追問 1）

生：①②③中①最便宜，跟⑥搭配超過預算，②③跟⑥搭配肯定也超過。

師：看來⑥太貴不能選，誰選擇便宜的④估算的？（簡報留①②③和④）

不急著交流，想一想需要都估一遍嗎？先估哪一組？（追問 2）

生 1：先估算③＋④，因為上海飛北京的機票③最貴，如果③夠的話，其他 2 張也肯定夠。

生 2：我把③和④都估大，400＋600＝1000（元），估大了正好，說明實際肯定是夠的。

老師兩次追問，第一次，引導學生通過觀察發現，估算最便宜的機票組合正好 1000 元，根據不等式性質即可知道其他兩種組合 1000 元亦不夠。第二次追問，鞏固通過推理，減少估算次數的邏輯。

課堂實錄片段 2：

師：小巧把②估成 400 元，⑤估成 700 元，400+700=1100 不夠，同意嗎？

生 1：不同意，每張機票都估大了，估計的總價一定會比實際總價高，估計總價 1000 元不夠，實際總價可能夠，也可能不夠。

生 2：把機票價格估大成整十數就可以證明夠了，330＋660＝990（元），估大了夠，那實際肯定夠。

老師舉了反例，用作對比。同樣是把價格估大了，這次實際價格和 1000 元之間的大小仍然無法確定，不足以證明總價不夠。讓學生體會到這樣的估算是沒有意義的。

令人驚喜的是，個別數感很好的學生，分享了估大取整到十位，仍然可以確定估大值小於 1000 元，實際價格肯定也小於 1000 元。估算中，單位的選擇也很重要。

在這個課例中，聯繫同一情境提供了一組數據，內容更豐富、複雜了。教師不滿足於逐一估算，而是在與學生的對話中不斷地有意追問，激發學生觀察數據，深入思考，尋找規律，從中體會估算以及解決問題方法的靈活、多樣。

估算是連接程序化的精確計算與策略性思維的認知樞紐，是在一定的理論和實際背景下，綜合推理、猜想、判斷的一種思維活動[5]。因此在保證精確計算的基礎上，適度加強估算教學，特別是融入情境的估算問題解決，能切實發展學生的數感和數學思維，提高問題解決的能力。

[5] 鮑建生.估計——數學教育面臨的新課題[J].《教育研究》，1997，（10）：71.

6. 特殊數學障礙 (Dyscalculia) —「雖屬小眾，但總有一個在附近！」

陳詩韻

特殊教育工作者

前言

一般來說，兒童於成長階段會循序漸進地發展出各種數學、語文及社交等能力。個人的自然成長與及周遭學習環境所帶來的刺激，都對兒童發展造成莫大的影響。隨著融合教育的推展，一個看似普通的數學課堂早已混雜著各類學習需要的學生[1]，當中可能包括資優、自閉症譜系障礙、過度活躍症、整體發展遲緩、智力障礙、特殊學習困難[2]（數學、讀寫、發展性協調、特殊語言、視覺空間感知）或屬於非華語學生等等。教師不但要掌握各類學生的學習特質及需要，而數學教師更需進一步了解特殊數學障礙 (Dyscalculia) 的學生的學習需要，以配合有效而適切的教學策略及技巧教授知識和技能。

特殊學習困難中的小眾：特殊數學障礙 (Dyscalculia)

在特殊學習困難 (SpLD) 的類別中，讀寫障礙已被廣泛認識，而較少人認識特殊數學障礙。患有特殊數學障礙的學生，其學習難點主要集中在特定的數學範圍內，以致成績表現強差人意。普遍情況下，這些學生容易被誤認為是運算大意或個人慵懶所致。根據一些外國調查研究指出，以總體在學人口計算，患有讀寫障礙的學生人數約佔 10 – 15% （香港介乎 9.7 –

1 資優(Gifted)、自閉症譜系障礙(Autism Spectrum Disorder (ASD))、過度活躍症(Attention Deficit / Hyperactivity Disorder (ADHD))、整體發展遲緩(Global Developmental Delay)、智力障礙(Intellectual Disability (ID)) 、特殊學習困難(Specific Learning Difficulties (SpLD))或非華語(Non-Chinese speaking (NCS))

2 特殊學習困難(Specific Learning Difficulties (SpLD))：特殊數學障礙 (Dyscalculia)、讀寫障礙(Dyslexia, Dysgraphia)、發展性協調障礙(Developmental Coordination Disorder (DCD) / 動作協調障礙 Dyspraxia)、特殊語言障礙(Specific Language Impairment (SLI), Dysphasia) 、視覺空間感知障礙(Visual Spatial Perceptual Disorder)

12.6%[3]），而患有特殊數學障礙的學生則約佔 7%[4567]。由於香港沒有評估特殊數學障礙學童的資料，因此，若按照外國資料進行推算，估計香港現時有不少於 5% 學生面對著不同程度之數學學習困難。

要了解有特殊數學學習困難的學生，單憑外表是難於分辨的。特殊數學障礙成因為腦部結構及功能異常，亦有研究認為是與家族遺傳有關。此類學生在校的一般學習能力跟同齡朋輩無異，智力發展亦符合預期，部分甚至達資優程度（英國有一例子是獲獎數學家本身患有特殊數學障礙[89]）。對於掌握非數學類學科知識時，他們甚少出現明顯困難，唯獨在數學技能方面，包括：數字感覺、數字記憶、準確計算、流暢計算或準確數學推理[10]等範疇上，成績長期遠低於標準。與朋輩相比，有特殊數學障礙的學生即使投放大量時間進行反覆操練，改善幅度亦不似預期，加上長期經歷學習上的失敗，容易對數學產生焦慮及抗拒感。在學期間若果得不到適切的評估及早期介入，學生所面對的學習困難將不會隨年齡增長而消失，嚴重者更直接影響到日常生活中應用數學技能的表現。

特殊數學障礙學生的常見特徵

學習數學需要學生運用各種認知能力[11]，當中包括長期和短期記憶、專注力、訊息處理速度與及決策和組織能力。但對於有特殊數學障礙的學生，其學習情況卻與一般兒童有分別。

---

[3] 香港特別行政區政府衞生署兒童體能智力測驗服務 https://www.dhcas.gov.hk/tc/dyslexia.html

[4] Developmental dyscalculia: prevalence and prognosis. https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/11138905/

[5] The British Dyslexia Association. https://www.bdadyslexia.org.uk/dyscalculia/how-can-i-identify-dyscalculia

[6] National Numeracy https://www.nationalnumeracy.org.uk/what-numeracy/what-dyscalculia

[7] 柯華葳(2005)。數學學習障礙學生的診斷與確認 。特殊教育研究學刊，29 期，113-126 頁。

[8] The Mathematician Who Can`t Add Up - Emma J King. https://www.youtube.com/watch?v=SfSz3D5CCSQ

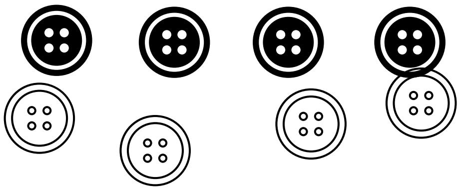
[9] https://icd.who.int/browse/2024-01/mms/en#771231188

[10] https://icd.who.int/browse/2024-01/mms/zh#771231188

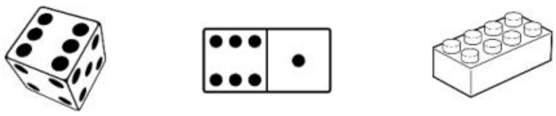
[11] 認知能力是指與生俱來用以思考、學習及處理訊息的大腦能力。

以下是一些較為常見的特徵：

- 數字感非常弱，例如對於一個數字可以代表著不同的身份（數量、次序、等級、座標）
- 難於目測量少的物件（5 件以內），即便量少仍會用手指數點
- 數點物件時手口不一致或出現跳數，未能按簡單節奏拍打身體
- 當進行一一對應物件時，容易出現移位情況



- 長期依賴數手指計算
- 閱讀骰子、骨牌點數或 Lego 有困難



- 難於辨別數的大小（例: 8 比 6 大、2 比 5 小），即感覺不到數字所代表的量
- 未能在初小階段全面掌握數學事實（arithmetic facts），例：7 + 2 = 9
- 容易混淆數字的讀音和形，同時亦引申出未能真正掌握各數字背後所蘊含的意義，錯誤地使用出來。

  例：31，學生有機會寫成或選出「13」、「3101」、「81」、「3」「1」

  例：31，學生取出錯誤的數咭「3」、「10」和「1」，而非單一張「31」

- 持續出現運算和邏輯上的錯誤。

  例： $22 - 8 = 26$（大數減細數）

  例： $22 - 8 = 30$（當成了加法計算）

  例： $22 - 8 = 12$（當成了加法，把所有數字加了起來）

  例： $22 - 8 = 24$（忘記做退位）

- 估算、四則運算、貨幣換算、閱讀統計圖、閱讀鐘面及時間等能力弱
- 列序能力弱，無法使用多重步驟或運算策略，將數學事實（例: $3 + 6 = 9$、$4 \times 5 = 20$）的答案由長期記憶中直接提取出來
- 難以理解抽象數學語言及符號，例如：不大明白「＋」和「×」的分別

不易被發現的一群「另類」學生

為何特殊數學障礙的學生不易被發現？筆者嘗試歸納出下列幾點：

1. 香港家庭普遍重視兒童的語文發展，當兒童的口語表達或口肌控制未達發展水平時，照顧者或教師會較易發現有關情況並尋求協助。然而，數學概念本身較為抽象，加上照顧者一般把數數、基本加減等技巧視為生活必備及自然習得的能力，不自覺地用了成人慣用的數數、運算思維等模式，套用到教導兒童學習數學之上；當兒童未能理解有關數學內容時，便以為只是他們思想未夠成熟，未為意兒童或存在特殊數學障礙。

2. 在幼兒階段學習數學的過程中，部分患有特殊數學障礙的兒童，被要求死記數學事實或過早催谷做與年齡不相稱的數學練習。雖然以死記或重覆操練的方式學習數學，患者的學習成果表面上與其他同齡兒童無誤，但實際上會掩蓋了他們本身的特殊學習需要，未能掌握好基礎的數學概念，令他們長遠的學習出現問題。

3. 與較成熟的本地讀寫障礙研究相比，特殊數學障礙的本地研究較少，對應的評估資料及訓練手冊亦有所缺乏，前線教師（尤其是幼稚園教師）或未意識到特殊數學障礙的存在，即使有所意識，教師在識別及支援有特殊數學障礙的學生時也感到吃力。

4. 香港幼稚園教育課程架構是以生活化的學習主題，貫通六個學習範疇的內容 (包括體能與健康、語文、幼兒數學、大自然與生活、個人與群體和藝術與創意)，例如教師會以生日會為主題，讓幼兒在有關情境中學習衛生、語文、數學等範疇的知識，並在學習過程中對學習數學產生興趣、留意數學與生活的聯繫、能以數學思考和解決生活問題、以及主動觀察和關心身邊與數學有關的事情的態度。雖然綜合學習的模式有其優點，但融合多個範疇進行學習活動時，難免較容易忽略幼兒在學習數學概念或技巧時所出現的障礙。至於小學階段，雖然數學已獨立成為一個科目，惟課時緊迫，教師支援學生的時間有限，具有特殊數學障礙的學生亦較容易被錯過。建議先加強注意在測驗考試中加時或需提供讀卷服務的學生，識別他們對學習數學是否感到困難，並提供支援。數學概念環環緊扣，基礎知識掌握不好直接影響後續的學習。

5. 特殊數學障礙在英美國家已討論多年，惟本地的討論仍相當有限，特殊數學障礙的學童往往未受關注。建議教育界提高對特殊數學障礙學童的關注，借鏡其他地區的經驗，引入合適的發現和支援機制，讓有需要的學童得到適當的援助，改善他們學習數學的情況。

總結

香港近年一直鼓勵照顧學生的多樣性，讓所有學生能得到適切而優質的教育，盼各方亦能看見這群有特殊學習需要的小眾 — 特殊數學障礙學生，讓他們得到適切的支援服務。

參考網頁

[1] 協康會。取自 https://www.heephong.org/child-development-and-training/useful-advice

[2] 融合教育及特殊教育資訊網站。取自 https://sense.edb.gov.hk/tc/

[3] 香港動作協調障礙基金會。取自 https://www.dyspraxia.com.hk/

[4] What are the signs of Dyscalculia? (The Dyslexia Association, UK). https://www.dyslexia.uk.net/specific-learning-difficulties/dyscalculia/the-signs-of-dyscalculia/

[5] Dyscalculia (Learning Disabilities Association of America). https://ldaamerica.org/types-of-learning-disabilities/dyscalculia/

[6] Dyslexia and Dyscalculia. https://www.dyslexicadvantage.org/dyslexia-and-dyscalculia/

[7] Dyscalculia. https://www.youtube.com/watch?v=p_Hqdqe84Uc

[8] Dyscalculia — A Parent's Guide. https://www.youtube.com/watch?v=GstqJ5sEEoo&t=607s

[9] My world without numbers | Line Rothmann | TEDxVennelystBlvd. https://www.youtube.com/watch?v=rlPFv_EDnvY

參考文獻

[1] 楊坤堂（2007）。《數學學習障礙》。五南圖書出版股份有限公司。

[2] 詹士宜、楊淑蘭（2017）。《突破數學學習困難：理論與實務》。心理出版社。

[3] Berch, Daniel. B. & Mazzocco, Michele M.M. (2007). *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities*. Paul H. Brookes Publishing Co.

[4] Bley, N.S. & Thornton, C.A. (2001). *Teaching mathematics to students with learning disabilities.* PRO-ED Inc.

[5] Bird, R. (2009). *Overcoming Difficulties with Number: Supporting Dyscalculia and Students who Struggle with Maths.* Sage Publications Ltd.

[6] Butterworth, B. (2003). *Dyscalculia screener*. London : nferNelson Pub Co.

[7] Butterworth, B. & Yeo, D. (2004). *Dyscalculia guidance: helping pupils with specific learning difficulties in maths*. London : NferNelson Pub. Co.

[8] Butterworth, B., Varma, S., & Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: From brain to education. *Science, 332*(6033), 1049-1053. doi: http://dx.doi.org/10.1126/science.1201536

[9] Butterworth, B. (2018). *Dyscalculia: from Science to Education: From Science to Education*. Routledge.

[10] Chinn, S. & Ashcroft, R. (2007). *Mathematics for Dyslexics: Including dyscalculia*, 3rd. John Wilwy & Sons Ltd.

[11] Chinn, S. (2018). *Maths Learning Difficulties, Dyslexia and Dyscalculia (Dyslexia Essentials)*.Jessica Kingsley Publishers; Illustrated edition.

[12] Emerson, J., Babtie, P. (2014). *The Dyscalculia Solution: Teaching number sense*. Bloomsbury Education.

[13] Faber, H. (2017). *The Math Handbook for Students with Math Difficulties, Dyscalculia, Dyslexia or ADHD: (Grades 1-7)*. Universal Publishers.

[14] Faramarzi, S., & Sadri, S. (2014). The effect of basic neuropsychological interventions on performance of students with dyscalculia. *Neuropsychiatria i Neuropsychologia, 9*(2), 48-54.

[15] Fiqa Azureen, A. H., Mazeyanti, M. A., & Sugathan, S. K. (2018). *Towards the development of mobile app design model for dyscalculia children in Malaysia*. Les Ulis: EDP Sciences. doi: http://dx.doi.org/10.1051/matecconf/201815005016

[16] Hornigold, J. (2023). All About Dyscalculia: *A Practical Guide for Primary Teachers*. Routledge.

7. Measuring a tree's diameter simply by a stick?

The story of Biltmore Stick

TAI Hiu-fung, Ken

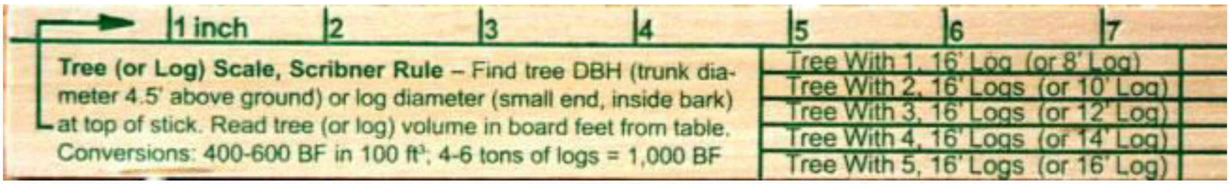
Teacher of Mathematics

A person using a Biltmore Stick to measure the diameter of a tree

(Source: https://www.wineenthusiast.com/culture/spirits/whiskey-wood-white-oak/?srsltid=AfmBOooxKFAX5mLp0HRMSuLx7aNYbQWPUAdcOTkR9yq13Nc0Xv_BxJSW)

A close-up of the markings on the stick used for measurement

(Source: https://news.delaware.gov/2019/06/20/middletown-ffa-wins-forestry-career-event/)



(Source: https://extension.usu.edu/forestry/rural-forests/forest-management/measuring-stick)

The Biltmore Stick is a simple yet ingenious tool in forestry. Resembling a wooden stick with specialised markings, this instrument enables users to quickly estimate the diameter of a tree — a piece of important information for forest management and timber harvesting.

Historical Background

The name “Biltmore” is related to Biltmore Estate in Asheville, North Carolina. This grand estate was established by George Vanderbilt in 1895 as a retreat reminiscent of the grand castles and estates of France and Britain. The Biltmore Stick was developed by Dr. Carl Schenck, who was the Chief Forester there, in order to make work of measuring trees easier and more efficient.

In the following investigation into the design of Biltmore Stick, student will experience making arguments using geometry, deriving the underlying formula, as well as using the formula itself to reproduce and construct their own Biltmore Stick from scratch.

How Can a Straight Stick Measure a Circle?

At first glance, this quest seems implausible: how can a simple straight stick be used to determine the diameter of a cylindrical tree trunk, without cutting it open? Actually, there is one important element that you might have missed here: **the user’s eye**.

Let's follow and examine the procedure of using the Biltmore Stick first:

Step 1: Hold the stick horizontally against the tree trunk at breast height.

Step 2: Position the stick approximately 25 inches from the eye — roughly the length of a fully extended arm.

Step 3: From the user's perspective, align the end of the zero mark with the edge of the tree trunk.

Step 4: Lastly look at the other edge of the truck and read the marking there; this value is the corresponding diameter of the tree.

That could lead us to understand and construct the below diagram:

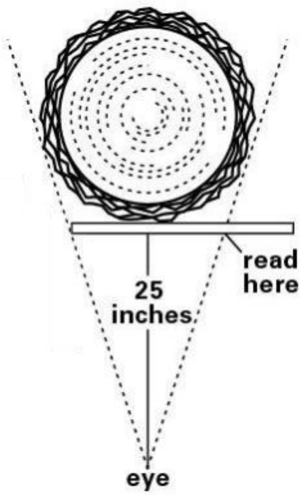


Fig a) Top view diagram

(Source: https://content.ces.ncsu.edu/woodscaping-your-woodlands)

Fig b) Demonstrating Step 1 and Step 2

Fig c) The user's perspective (Step 3 and Step 4)

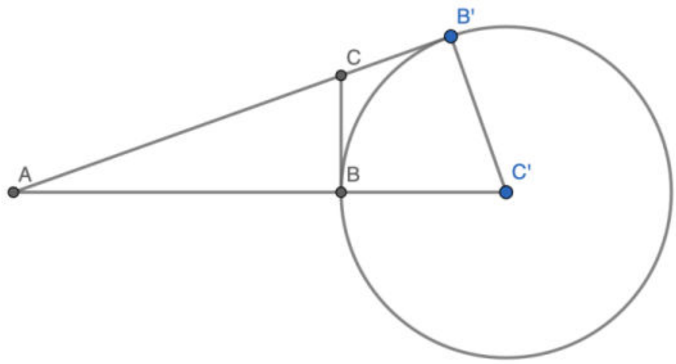
(Source: https://extension.usu.edu/forestry/rural-forests/forest-management/measuring-stick)

Why the Biltmore Stick can find the diameter as simple as that? As illustrated in Figure a), the tree trunk is represented by a circle which has three special points: two are touching the lines of sight, one is touching the stick. As we know, for given three non-collinear points, they can define a unique circle. Consequently, the diameter is unique as well.

In other words, if the line of sight remains going through the same marking location on the stick, it is impossible to replace this circle with a larger nor smaller one. This guarantees a one-to-one correspondence between the tree's diameter and the position of the marking on the stick. We could then confidently carry on to look for the underlying formula that links these two variables.

Finding the formula

Let's now explore the mathematics that make the Biltmore Stick work. Indeed in the diagram, there is a pair of similar right-angled triangles that could help us. Length $BC'$and $B'C'$ are the radii of the circle, which we here denote as d/2 (half of the tree's diameter: d).



Since ΔABC ~ ΔAB'C', we have

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'}$$

By Pythagoras' theorem,

$$\frac{25}{\sqrt{(AC')^2 - (d/2)^2}} = \frac{BC}{d/2}$$

$$\frac{25}{\sqrt{(25 + d/2)^2 - (d/2)^2}} = \frac{BC}{d/2}$$

$$\frac{25d}{\sqrt{25^2 + 25d}} = 2BC$$

$$\frac{5d}{\sqrt{25 + d}} = 2BC$$

Notably, the length BC represents half of the distance to the corresponding marking on the stick. Therefore, the full distance to the marking is 2BC, where we just found to be $\frac{5d}{\sqrt{25+d}}$. As expected, we successfully derived the formula which relates the diameter of the tree to the markings' position on the sticks.

Theory to Practice: Reproducing the Biltmore Stick

Next, with the help of spreadsheet software such as Microsoft Excel, we could compute the values of position of the markings "$\frac{5d}{\sqrt{25+d}}$" by substituting whole numbers into d:

B2 fx =(25*A2)/SQRT(25^2+(25*A2))

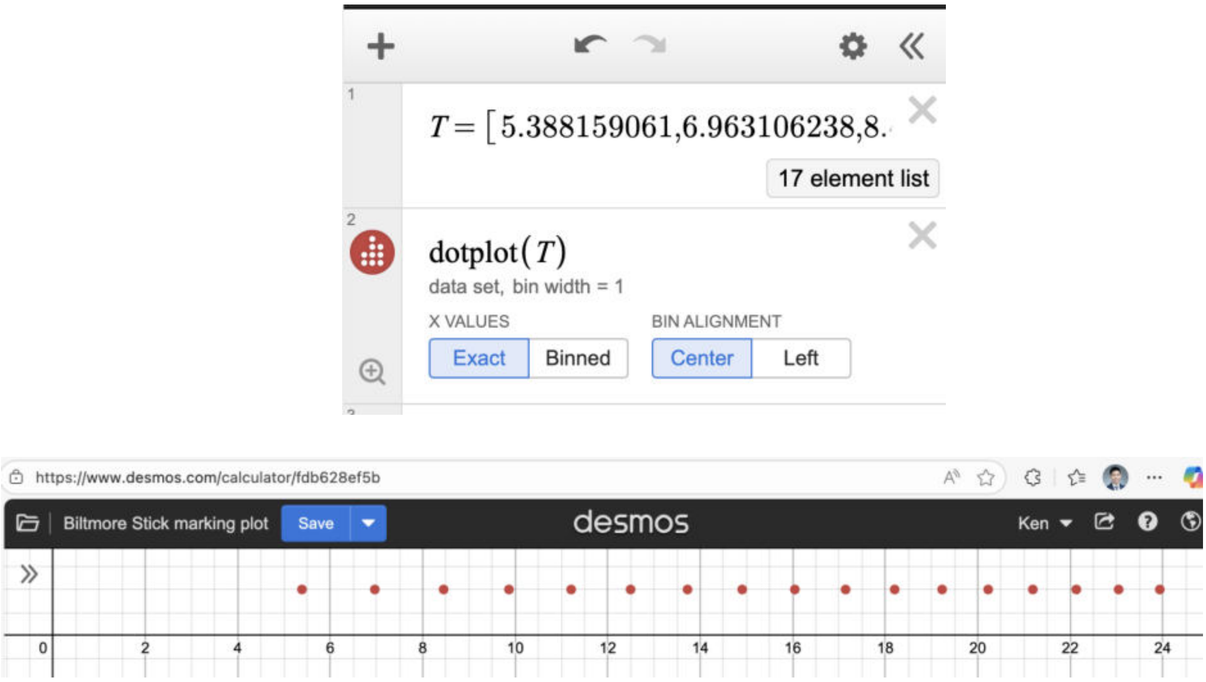
	A	B
1	d (tree's diameter, inch)	2BC (marking of tree's diameter on the stick, inch)
2	6	5.388159061
3	8	6.963106238
4	10	8.451542547
5	12	9.863939238
6	14	11.20897077
7	16	12.49390095
8	18	13.72487133
9	20	14.90711985
10	22	16.04514906
11	24	17.14285714
12	26	18.20364109
13	28	19.23047895
14	30	20.22599587
15	32	21.19251771
16	34	22.13211487
17	36	23.04663839
18	38	23.93774996

B2 f_x =(5*A2)/SQRT(25+A2)

	A	B
1	Tree's actual diameters (d, inch)	Markings' locations on the stick (inch)
2	6	5.388159061
3	8	6.963106238
4	10	8.451542547
5	12	9.863939238
6	14	11.20897077
7	16	12.49390095
8	18	13.72487133
9	20	14.90711985
10	22	16.04514906
11	24	17.14285714
12	26	18.20364109
13	28	19.23047895
14	30	20.22599587
15	32	21.19251771
16	34	22.13211487
17	36	23.04663839
18	38	23.93774996

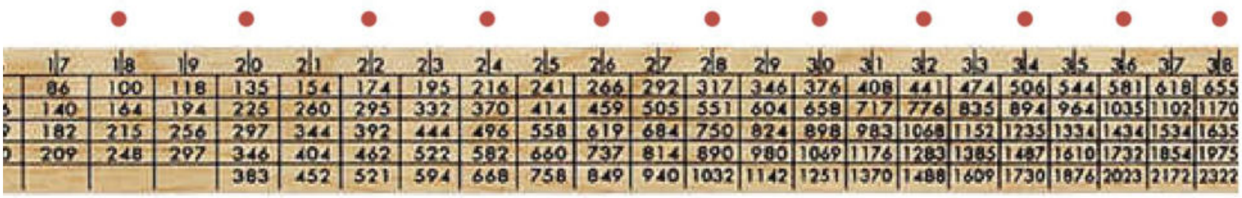
Lastly, in order to reproduce the Biltmore Stick from a plain stick, technically we will need to make measurements and mark the locations on the stick one by one using the above data in the table. But instead of doing this tedious and repetitive work, can we devise a tangible "stencil" tool for all the points, so that we can mark them all in one go easily?

Yes we can, simply import the results in the second column to make a plot, such as "dotplot" function in Desmos; this allows us to visualise all the marks and spacings. Now students have the hands-on reference (teachers can print out if needed) and could use that to create their own functional Biltmore Sticks, allowing them to measure the diameter of cylindrical objects swiftly!



"dotplot" in Desmos

(note: the spacing of the marks decreases as the diameter of the tree increases)



Comparison between the plot (red dots on the top) and the actual markings in the Biltmore Stick product(bottom), for d = 18 to 38 inches

Author's Contact:

Hiu Fung TAI (Ken)

e-mail: taihiufung@icloud.com

Facebook page: https://www.facebook.com/mathsandlife

Reference List

[1] Top view diagram. https://www.geogebra.org/calculator/mawhter9

[2] Plot of the markings. https://www.desmos.com/calculator/fdb628ef5b

[3] https://www.biltmore.com/wp-content/uploads/2020/05/Biltmore_Forestry_HomeschoolWorkbook_Sustainability_FINAL_2019-5.pdf

[4] https://www.youtube.com/watch?v=2T1_xkE-zEc

8. 開發數學建模的學與教資源套 2023/24：設計理念與實踐成果

盧頌鈞、梁景信、SINGH Manpreet、黃曉薇、許鍶敏

香港教育大學數學與資訊科技學系

巫志雄、潘文禮、鄧清嵐、張顥懷

天主教慈幼會伍少梅中學

楊柳青、林麗珍

孔教學院大成何郭佩珍中學

謝子龍

東華三院張明添中學

前言

隨著現今科技的進步和對數據分析的重視，數學建模已成為解決複雜問題的重要工具。它使我們能夠將現實世界中的現象轉化為數學語言，從而進行分析、預測和決策。無論是在 STEAM 領域，還是日常生活中，數學建模都扮演著不可或缺的角色。因此，將數學建模注入數學課堂，不僅能提升學生的建模素養，還能培養他們解決問題的能力和明辨性思維，讓他們有更多機會去處理探究式問題，為社會培育具備應用數學實力的新一代人才。

為了推動數學建模的教學，教育局積極開展多項工作。自 2019/20 學年起，教育局與學校合作進行與數學建模相關的「種籽」計劃，支援教師和學生進行數學建模的教學活動。此外，教育局亦重視教師的專業發展，定期舉辦培訓工作坊和講座，旨在幫助教師掌握數學建模的教學策略和技巧。為了提升學生的學習興趣和目標，教育局亦舉辦數學建模比賽，讓學生在比賽中學習和應用數學建模知識。同時，教育局致力開發學與教資源，為教師提供實用的教材。

Manouchehri（2017）指出，缺乏實質的數學建模學與教資源是教師進行建模教學的主要障礙。這問題延伸了系統化地開發相關教材的必要性，這不僅使數學建模的教學變得具體，讓教師更容易在課堂上實踐，也能提升教學的成效。

開發數學建模的學與教資源套項目 2023/24

早在 2022 年，我們已分析了教育局當時提供的數學建模教學資源，例如「傳染病的建模」（課程發展議會，2017），這為設計高質量的教材奠定了堅實的基礎（詳見 Lo et al., 2022）。在 2023/24 學年，教育局委託香港教育大學的團隊開發了三個完整的數學建模學與教資源套。這些資源套專為初中數學課堂或活動而設，每個資源套均在至少一所中學進行了試用和觀課，以確保其實用性和教學效果。根據寶貴的實踐經驗，我們再對教材進行優化，最終上載至教育局的網站[1]。

我們所開發的三個資源套分別為「創建建築物的 3D 虛擬模型」（資源套一）、「尋找公司總部和倉庫的最佳位置」（資源套二），以及「設定物業的標價」（資源套三）。這些資源套的數學知識主要涉及三角學、三角形的心，以及二元一次方程。每個資源套均包含三至四個子活動，適合在雙課節或 STEAM 活動日進行。配套方面有：教案、學生版和教師版工作紙、簡報，以及其他電子資源，各有英文、繁體和簡體中文版本。

這三個資源套依次從相對傳統的數學活動，逐漸趨向更具建模導向的內容。項目的成果發布會已於 2025 年 1 月順利舉行，會上參與試用的學校教師分享了他們在使用資源套過程中的心得與體會。以下的部分將重點介紹這些資源套背後的設計理念，並總結教師的實踐經驗，旨在讓更多教育界的同工了解和運用這些教材，進一步推廣數學建模教學的普及與深化。

[1] 讀者可瀏覽教育局「透過『探索與研究』推行數學建模的學與教資源套」的網頁。網址：
https://www.edb.gov.hk/tc/curriculum-development/kla/ma/res/mmres.html

資源套一：創建建築物的 3D 虛擬模型

設計理念

這個資源套屬於較為傳統的教學資源，旨在讓教師感受到這些教材在內容上並沒有大幅偏離常見的 STEAM 活動，從而鼓勵教師在課堂上實踐。因此，其主要內容是採用了許多學校在教授三角學時所進行的實測活動，例如量度校內旗杆的高度。然而，我們在資源套中加入對測量過程中所涉及的假設與限制的討論，以提升學生的建模素養。教師和學生可以選擇測量他們感興趣的建築物，例如他們的校舍，並以此作為基礎展開活動。然後，學生將利用所獲得的高度數據，使用 GeoGebra 創建建築物的 3D 虛擬模型。在學習過程中，他們嘗試在創建模型時作出假設，例如建築物是一個角柱體。這不僅讓學生體驗數學建模的元素，還為他們提供了使用數學軟件進行數學活動的機會。

實踐經驗

參與教師表示，他們過去曾舉辦量度旗杆高度的比賽，這些經驗使執行這個資源套的過程十分順暢。此外，學校推行學生自攜裝置（BYOD）政策，他們能夠使用個人平板電腦的應用程式來測量校舍頂層的仰角。教師們還將整個建模活動與學校 60 周年校慶相結合，使活動更具校本元素。他們與電腦科同工合作，利用 3D 打印技術將 GeoGebra 中校舍的虛擬模型製作成 3D 立體模型（圖 1），並將其作為學生的 60 周年校慶紀念品。這樣的活動設計不僅讓學生有機會在現實情境中應用三角學來解決問題，還大大提升了活動與學校的相關性，激發學生的學習興趣。

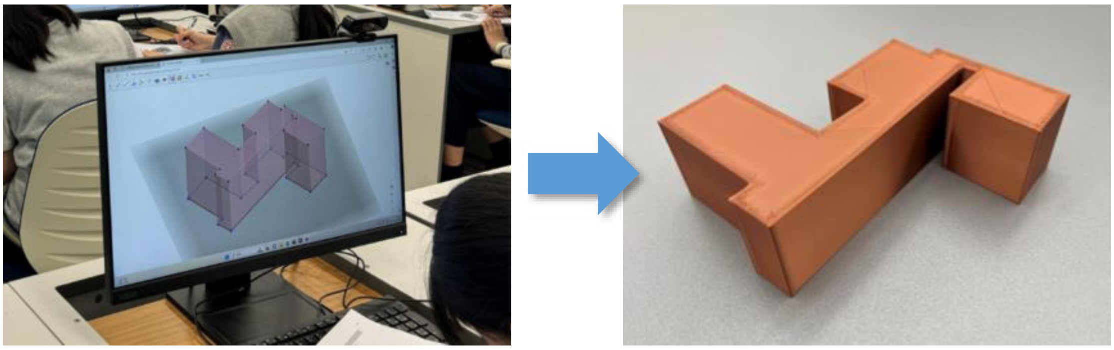


圖 1：將 GeoGebra 中校舍的虛擬模型製作成 3D 立體模型。

資源套二：尋找公司總部和倉庫的最佳位置

設計理念

這資源套緊扣課程中三角形的心的內容，旨在讓教師感受到這些教材強調幾何知識的實際應用。這活動透過探究尋找公司總部和倉庫的最佳位置，突顯了規劃性建模的核心理念。具體而言，學生運用他們對三角形四心的知識，提出問題的「最佳」解決方案。活動從尋找兩點的中點開始，接著使用資源套內的 GeoGebra 教件探索三角形的四心，讓學生深刻認識三角形外心和內心的性質，並將其應用於實際情境中（圖 2）。除了數學概念之外，這活動還培養學生的建模能力，使他們能夠提出合理的假設，並認識到解決方案的局限性。在活動的後續部分，學生利用 GeoGebra 創建公司總部和倉庫最佳位置的虛擬模型，這不僅加深了他們對數學知識的理解，還為他們提供了使用數學軟件進行幾何探究活動的機會。

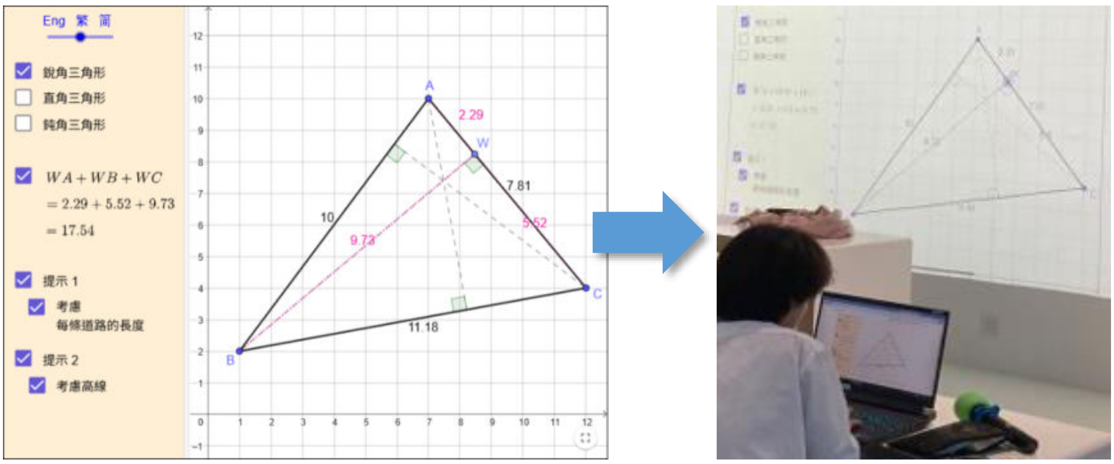


圖 2：應用資源套內的其中一個 GeoGebra 教件。

實踐經驗

這資源套進行過兩次實踐和修訂。在第二次的實踐中，參與的教師不僅任教數學科，還兼教化學科。他的體會是，這個建模活動與化學實驗有著許多相似之處。兩者都要求學生動手操作、收集數據，並探索變數之間的關係，同時也需要分析探究過程中的假設。教師透過與學生生活相關的例子作為引入，例如學校與鄰校的中點和波鞋街的店舖位置等。考慮到初中數學課程中三角形的心屬於非基礎部分，教師對教材內容進行了調適，將重點放在外心和內心

之上。在活動的過程中，教師認為資源套中提供了數學概念的回顧，並結合 GeoGebra 教件的使用，讓數學和運算能力較弱的學生都能夠跟上進度。在整體表現上，大部分學生展現出積極的態度，並能夠提出合理的答案。即使是平日在課堂上不太投入的學生，在這活動中也表現良好和積極回答問題，顯示這種數學活動能夠吸引一些未必對數學感興趣的學生。

資源套三：設定物業的標價

設計理念

在三個資源套中，這個資源套的建模導向最為突出，當中涉及的建模技巧亦能廣泛應用在處理其他 STEAM 相關問題。學生需要利用數據來建立最佳擬合線，並以其方程作為物業定價的數學模型。為了避免與初中學生展開過於艱深的數學討論，我們借助資訊科技，使學生能夠輕鬆制定線性模型。活動首先以簡單的情境和數據作為起點，教導學生使用 MS Excel 尋找最佳擬合線，讓他們在學習資訊科技技巧的同時，逐步掌握數據分析的基本概念。隨後，學生轉向真實的物業標價和樓面面積數據來建立數學模型。同樣地，他們亦會根據物業標價和樓齡進行類似的建模過程，進一步鞏固他們所學到的建模知識。在整個活動中，學生不僅建立數學模型，並將其應用於決策，還會討論模型的參數、假設及其局限性。

實踐經驗

參與學校的教師表示，資源套中關於如何利用 MS Excel 求得最佳擬合線的指引非常詳盡。但為了提升活動的流暢度，教師們特意制作了另一個 MS Excel 檔案，學生只需輸入數據便能自動生成相應的最佳擬合線（見圖 3）。這項調適體現了教師們背後的理念，即聚焦於建模的概念及其結果的詮釋和應用。通過這種方式，即使能力較弱的學生也能參與設定物業的標價。值得一提的是，參與學校的教師利用 STEAM 週的時間來進行這次建模活動，涉及整個年級的學生，並需要處理大量的行政工作。然而，他們整個數學科團隊都參與其中，這樣的協作和努力確保了活動的順利進行。

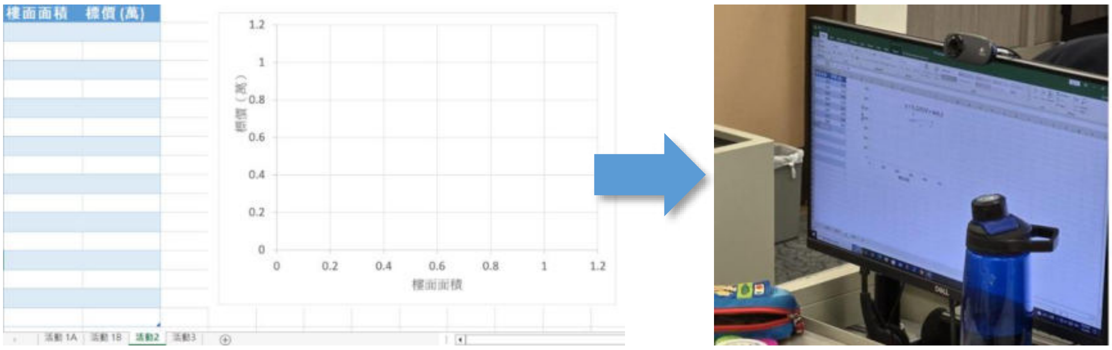


圖 3：學生以教師們制作的 MS Excel 檔案生成最佳擬合線。

結語和建議

本項目的三個資源套從相對傳統的數學活動，逐漸趨向更具建模導向的內容，旨在滿足不同教師的需求和取向。隨著數學建模在香港中學教育裡日益普及，這趨勢將能促進更多與數學建模相關的教學活動。當師生對數學建模的接受程度提升，未來的教材設計將能更具建模導向，進一步提升學生的學習體驗和建模素養。總的來說，三個資源套旨在拋磚引玉，激發教育界的同工開發出更優質的數學建模學與教資源。要令資源套能夠有效執行，教師仍需要按校本情況進行修訂。這次項目得以順利完成，有賴於參與學校的教師們對資源套的專業調適、學生積極投入，以及教育局同工的寶貴意見。

因此，對於教師如何運用這些資源套，我們建議教師能以此作為參考，設計校本教材。以「創建建築物的 3D 虛擬模型」資源套為例，教師可創作與校情相關的 3D 立體模型，以引起學生的學習動機。同時，由於這活動涉及戶外測量，我們應提前準備後備方案，例如使用資源套內的 GeoGebra 教件進行模擬測量，以應對活動當天可能出現的惡劣天氣。此外，為了更有效地協助學生解決在活動過程中遇到的數學和技術問題，我們建議邀請多位教師共同協作，確保活動能順利進行並達到預期效果。希望這些經驗能為未來的數學建模教學提供一些啟示，推動更多創新的資源開發和教學實踐。

參考文獻

[1] 課程發展議會（2017）。《數學教育：學習領域課程指引（小一至中六）》。香港：課程發展議會。

[2] Lo, C. K., Huang, X., & Cheung, K. L. (2022). Toward a design framework for mathematical modeling activities: An analysis of official exemplars in Hong Kong mathematics education. *Sustainability, 14*, 9757. https://doi.org/10.3390/su14159757

[3] Manouchehri, A. (2017). Implementing mathematical modelling: The challenge of teacher educating. In G. Stillman, W. Blum, & G. Kaiser, G. (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 421–432). Cham, Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_35

9. 以桌上遊戲在小學推行數學遊戲化

朱耀彬

聖公會聖多馬小學

前言

筆者與家長交流過程中不難察覺，有些小學生存在數學學習的困擾。他們覺得數學與生活無關，除了四則運算和百分數外，其他數學課堂知識難以與生活連結，因此，他們學習數學的動力不足。另一方面，部分學生背誦乘數表倍感壓力，基礎概念掌握不穩，加上從具體數字向抽象符號轉換時並不適應，逐漸對數學學習失卻了信心與興趣。

與此同時，在當今社會中，學生沉迷電子遊戲是一個普遍現象。電子遊戲的吸引力在於其遊戲性，但其「電子」屬性可能導致過度依賴屏幕，影響學生的社交能力和專注力。相比之下，桌上遊戲作為一種實體遊戲形式，既保留了遊戲的趣味性，又能避免電子產品的負面影響。桌上遊戲的設計靈活多變，既有純粹的遊戲，也有模擬不同生活情境的類型。它們讓學生在遊戲過程中自然地使用數學技能，如基礎的數數、四則運算、圖形拼砌、量感，以及更進深的邏輯推理、計算思維等數學技能。此外，桌上遊戲還能根據主題加入其他元素，透過遊戲過程和後續的解說，學生能感受到數學的實用性。桌上遊戲的主題多樣，遊戲機制通常需要玩家進行運算、估量、制定行動先後次序的策略並修正方案，這些過程與數學的邏輯思維高度契合。

桌上遊戲不僅能提升學生對數學的興趣，還能以「實體」的方式幫助他們減少對「電子」設備的過度依賴。本文旨在探討如何在小學實施遊戲式學習，特別是透過桌上遊戲來增強學生的數學能力和學習興趣。此文章將解釋遊戲式學習、桌上遊戲與數學技巧之間的關係，並附上兩個桌上遊戲設計的例子。

遊戲式學習的定義

遊戲式學習（Game-based Learning）是利用遊戲技術與設計原理（如角色扮演、玩家間的合作競爭、獎勵系統）促進學習的教育方法，旨在轉變傳統教科書學習文化。它透過真實問題解決情境與引導參與，培養高階思維和社交技能。Jan & Gaydos （2016）提出遊戲式學習可分為四種類型（動機、練習、內容掌握、21 世紀技能遊戲）與三種模式（技術驅動、技術與教學結合、遊戲設計啟發的教學），強調創建有意義的學習環境以適應現代教育需求。

與傳統課堂相比，遊戲式學習讓學生不再只是靜靜地坐著聽講，而是親自透過自己的選擇參與活動。即使失敗，也不會有強烈的挫敗感，反而因為是遊戲而更願意再次嘗試。這種參與模式增加了學生的主動性，讓他們在不知不覺中應用了一些數學能力，配合遊戲後的講解，減少對數學學習的憂慮。

數學與桌上遊戲的關係

數學與桌上遊戲的關係在於兩者的核心特質高度契合。數學的邏輯性、量化性以及結構化特徵使其特別適合融入桌上遊戲的設計。許多桌上遊戲的運作機制需要玩家進行計算、邏輯推理、計算思維以及簡單的機率分析，這些都與數學的基本能力直接相關。例如，數學課程中的數數、基本運算、邏輯推理（遊戲中各元素的關聯與轉換）、計算思維（行動順序的影響）以及數據素養（根據公開和隱藏資訊分析最佳策略）都可以在桌上遊戲中得到實踐。Gee（2009）指出遊戲能成為一種體驗數學建模的工具，使具體的知識化成抽象的分析和思考，一些經典的桌上遊戲如《大富翁》、《卡坦島》，有相關的策略研究文章，其中包含了數學化的分析。（Szita et al., 2010、Shrestha et al., 2016）。Esma（2022）在其研究中指出，不少學生存在數學焦慮，這影響了他們在學習數學時的表現。遊戲的應用，能提升學生的學習動力、參與度和表現，因遊戲提供了練習的機會，降低了他們的焦慮。

桌上遊戲相較於電子遊戲的優勢在於其社交性和實作性。桌上遊戲要求玩家面對面互動，涉及大量的討論、協商和社交技巧。例如，學生在玩棋盤遊戲時，可能會討論如何分配資源或選擇最佳策略，這種討論有助於他們練習邏輯推理，並加深對數學概念的理解。相比之下，電子遊戲通常是個人對著屏幕操作，缺乏實體互動和社交層面。此外，桌上遊戲的實體配件（如棋子、卡牌）讓學生有更多實作機會，例如移動棋子或整理卡牌時進行數數或計算。這些互動不僅提升了與數學技巧相關的討論，還能促進課堂管理，因為教師可以通過小組合作和遊戲結構維持秩序。例如，教師可以將學生分組，讓他們在遊戲中輪流討論策略，從而培養合作精神和數學思維。

桌上遊戲的另一優勢是教師可以通過觀察玩家的行動或提問，了解學生的思考過程和數學技能掌握程度。例如，在一個需要計算行動順序的遊戲中，教師可以問學生為什麼選擇某個行動，進而判斷他們是否理解相關的數學概念。這種即時反饋機制使桌上遊戲成為數學教學的理想工具，幫助教師更有針對性地指導學生。

然而，遊戲式學習也面臨一些挑戰。教師需要對遊戲有一定的熟悉程度，包括遊戲的基本操作、策略、涉及的學習點以及規則調整。這需要教師投入一定時間學習不同遊戲的機制，並根據課堂需求選擇或設計適合的遊戲。此外，桌上遊戲的時間長短不一，教師需確保遊戲時長與課堂時間匹配。同時，若要讓整班或整年級學生同時參與遊戲，學校需添置多套遊戲設備，並考慮存放空間。為克服這些挑戰，教師可以從簡單的遊戲開始，根據自身興趣認識遊戲機制，然後結合教學內容設計適合的遊戲。例如，教師可以設計一個簡單的棋盤遊戲，讓學生練習加減法，通過反覆試玩來熟悉規則並調整難度。透過這種方式，教師能逐步掌握遊戲化教學的技巧，確保遊戲與課程目標一致。

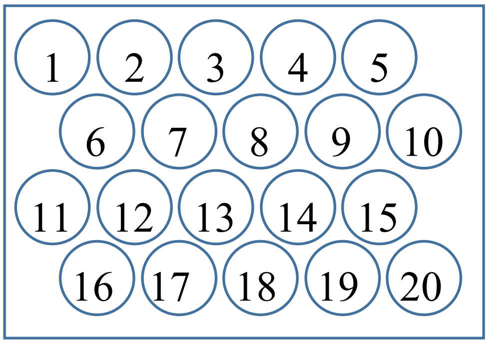
使用數學概念與桌上遊戲的例子

除了上述提過的研究，亦有一些學者研究其他桌上遊戲對學生掌握某些數學能力的影響，例如 Rizqiyani（2024）試驗了 Ludo（一款類似飛行棋的遊戲）提升學生空間感的有效性、Fidrayani（2020）試驗了蛇梯棋是否能幫助學生熟習簡單加減法，亦有學者（王筱妮、梁淑坤，2018）選擇自行設計遊戲，提升學生對九九乘數表的熟練度。

在我的學校中，也有訓練及帶領學生參與數個桌上遊戲比賽，但為免牽涉宣傳成分，本人參考了一些坊間遊戲的機制，設計了以兩個可幫助學習數學的遊戲例子。這兩個例子分別需要學生應用數範疇和圖形與空間範疇的知識，同時加入了一點隨機性，使遊戲不致一面倒，總是由能力較佳的學生獲勝。

<u>遊戲一</u>

用具：數字板塊 2 - 4 塊（可過膠使再重用）、六面骰 3 顆、水性箱頭筆 2 - 4 枝

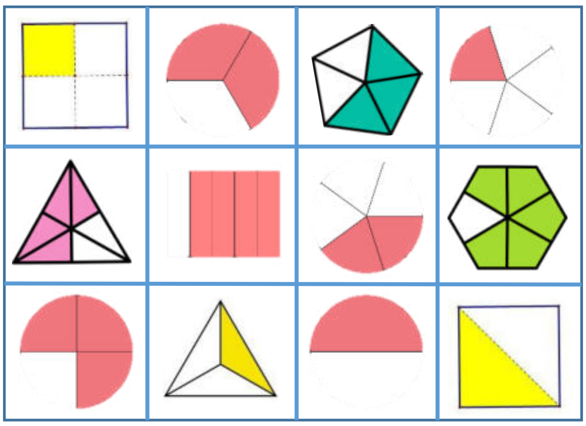


數字版塊樣式

玩法：學生輪流投擲骰子，然後按擲出的點數在板圖相應的數字上打杈。學生也可用加、減、乘、除把點數組合點數，生成新的數字，以下為擲出 1、4、5 時的示例：

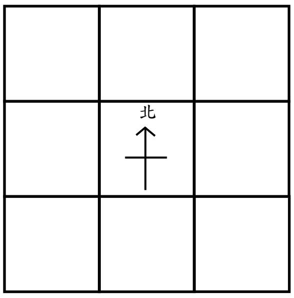
可畫掉的數字組合	原因
1、4、5	分別擲出了 1、4、5
3、5	4–1=3，另外有剩下未使用的 5
4、6	5+1=6，另外有剩下未使用的 4
1、20	4×5=20，另外有剩下未使用的 1
2	5–4+1=2
15	5 × (4–1)=15
16	(5–1) ×4=16
19	4×5–1=19

在遊戲中，學生最終的目標是盡快將所有數字打杈。為此，他們需要運用四則運算進行組合，從而在過程中自然增強對四則運算的應用能力。由於投擲骰子結果通常能組合出多種數字，學生需分析哪些數字較難生成，並在擲骰結果符合時優先完成這些數字。教師可在此引入討論，引導學生思考、相互解釋並評估彼此的理由，例如：偶數是否比奇數更容易組合？大數字是否比小數字更容易生成？合成數是否比質數更容易得出？這些討論都能引發學生對各類數字的特性的討論。教師亦能就課題和學生的能力調整遊戲設定和規則，例如數字板塊的數字範圍改成 1-15、骰子的數量改為 4 顆、將骰子點數組合時只能使用加法和減法等，甚至可將數字板塊改為分數板塊，讓學生利用骰子點數組合分數，並在板塊上的等值分數處打杈：



<u>遊戲二</u>

用具：九宮板方向板塊 2-4 塊（可過膠並重用）、不同顏色的圓柱、四角柱和三角柱若干個（20 個或以上更佳）、不透明袋 1 個、得分任務卡若干張（見下圖例子）

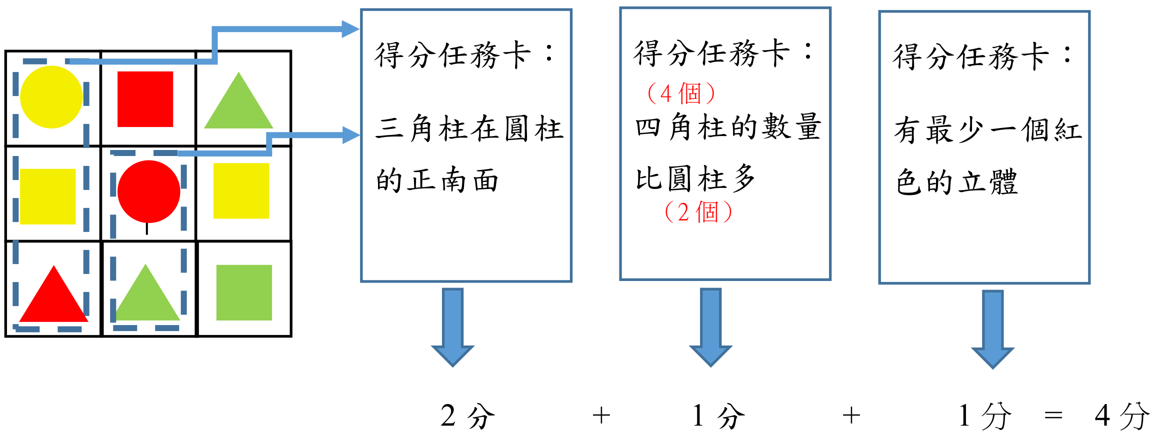


九宮板方向板塊樣式

得分任務卡：三角柱在圓柱的正南方	得分任務卡：四角柱的數量比圓柱多	得分任務卡：有最少一個紅色的立體	得分任務卡：四角柱在三角柱的正東方

（教師可自行設計更多的得分任務卡）

玩法：學生在遊戲開始時先抽三張得分任務卡，然後學生輪流在袋中抽出立體，並放在九宮板板塊上，板塊上九格都放滿立體圖形時遊戲完結。學生再點算板圖上的立體所擺放的位置，看看能否滿足得分任務卡上的要求，滿足一次可獲一分，數算每張卡得分次數的總和，最高分的學生勝出。以下是計分的例子：



在遊戲中，學生為滿足得分任務卡的條件，需要應用 2S1 立體圖形（二）和 2S3 方向和位置（二）的知識。學生在袋中抽出立體時並非完全隨機，他能透過觸摸分析手中圖形是否所需立體。將立體圖形抽出後，亦需按得分條件指定的位置和方向擺放才能得分。由於擺放的位置只有九格，得分條件之間或許會有矛盾的地方，學生需組合並選擇各立體圖形「最佳」的擺放位置。教師能多提問學生作選擇的理由，或在遊戲完結後提問學生同樣情況他會如何修訂擺放方式。在此過程中，學生不知不覺地進行了「建模」，包括：列出考慮因素、提出假設、實施行動以求解模型、檢視模型結果並加以修改。教師亦能就課題和學生的能力調整遊戲設定和規則，例如使袋子的立體圖形數量剛好等於遊戲中需要的數量，讓學生能透過觀察和數算其他參與者已抽出的立體圖形數量，來計劃每回合的行動方式；或使袋子的立體圖形數量遠遠超出遊戲中需要的數量，增加隨機性。教師亦可將九宮板板塊和得分任務卡的內容改成 1S3 方向和位置（一）（前、後、左、右、之間）或 4S3 方向和位置（三）（加入東南、東北、西南、西北）的描述，配合不同年級學生的程度。

總結

桌上遊戲在小學數學教育中具有顯著的潛力。它不僅能吸引學生主動參與，還能幫助他們在遊戲中發現不足並找到改進方向。通過遊戲的趣味性和互動性，學生在不知不覺中應用了數學技能，透過遊戲減少對數學的憂慮，並逐漸改變對數學的態度。長遠來看，這種積極的學習體驗有助提高學生的數學成績、增強自信心，並可能影響他們對數學的終身興趣。遊戲式學習還能培養學生的邏輯思維、計算思維和明辨思考能力，這些技能對他們未來的學業和生活都有深遠影響。

將桌上遊戲滲入到數學課程中需一系列先備工作，包括提升教師對桌上遊戲的認識、選擇合適的數學課題、設計或挑選適宜的遊戲、評估遊戲的吸引力、以及學校採購和存放安排，這些步驟需逐步完善。學校可先在教師發展活動中舉行桌上遊戲體驗，或與家長教師會合作舉

辦親子桌上遊戲活動，讓教師、家長和學生認識並體驗桌上遊戲，進而逐步幫助各持分者理解桌上遊戲與數學的聯繫及其對學習的助益。

透過桌上遊戲的應用，小學數學教育可以變得更具吸引力，讓學生在快樂中學習，在實踐中成長。我相信遊戲式學習不僅能提升學生的數學能力，還能點燃他們對數學的熱情，為未來的學習奠定堅實基礎。

參考文獻

[1] Jan, M., & Gaydos, M. (2016). Educational Technology Publications, Inc. What Is Game-Based Learning? Past, Present, and Future. *Technology*, *56*(3), 6–11. https://www.dsu.univr.it/documenti/Avviso/all/all589587.pdf

[2] Szita, I., Chaslot, G., & Spronck, P. (2010). Monte-Carlo Tree Search in Settlers of Catan. *Lecture Notes in Computer Science*, 21–32. https://doi.org/10.1007/978-3-642-12993-3_3

[3] Gee, J. P. (2009). Deep learning properties of good digital games: How far can they go?. In Serious games (pp. 89-104). Routledge.

[4] Shrestha, S. R., Myers, D. S., & Lewin, R. A. (2016). Optimizing Strategies for Monopoly: The Mega Edition Using Genetic Algorithms & Simulations. *ResearchGate*, *Vol.7*(No.1), 87–97. https://www.researchgate.net/publication/315800283_Optimizing_Strategies_for_Monopoly_The_Mega_Edition_Using_Genetic_Algorithms_Simulations

[5] Esma Nur Kahveci. (2022, April 22). *Game-Based Learning and Math Anxiety: An Evidence-Based Framework For Math Anxiety Reduction In Digital Learning Games And Its Application In Game Analysis And Design*. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.11342.06720

[6] Rizqiyani, R., Karnita, N., Laela, W., Wati, K., & Rasilah, R. (2024). Effectiveness of Using Ludo Game-Based Learning Media to Improve Understanding of Spatial Building Concepts in Elementary School Students: Literature Review. *Journal of Mathematics Instruction, Social Research and Opinion*, *4*(1), 91–104. https://doi.org/10.58421/misro.v4i1.280

[7] Fidrayani, F., Syafrida, R., & Melodyana, P. A. (2020). Increased Numeracy Skills of Children with Snakes and Ladders Game. *Journal of Early Childhood Education (JECE)*, *2*(1), 62–72. https://doi.org/10.15408/jece.v2i1.14971

[8] 王筱妮、梁淑坤（2018）。桌遊融入國小三年級數與計算課程之設計與反思。臺灣數學教師，39（2），23-49

10. 圖論及其應用

梁熙進、林灝暘

教育局數學教育組

圖論 (Graph Theory) 是數學的其中一個分支，主要是涉及對圖 (Graph) 的研究，而圖則是指用於表示物件之間關係的數學結構。這樣聽起來圖論對於大多數中學生來說或許比較抽象，但它其實很容易被理解。舉例來說，當你身在柴灣，打算乘搭港鐵前往羅湖，到底應該如何轉乘路線經過最少的車站而到達目的地呢？這一個問題，我們可以運用圖論進行數學建模並通過戴克斯特拉演算法 (Dijkstra's Algorithm) 幫助我們解決有關最短路徑的問題。

圖論中的基本概念

在介紹戴克斯特拉演算法之前，我們不妨通過認識不同時代的港鐵路線圖來了解一些圖論中的基本概念及用語。相比現時錯綜複雜的港鐵路線圖，在 1982 年的時候，乘車線只有三條，大家耳熟能詳的港島線也還未啟動 (見右圖一)。如以圖論來理解當時的路線圖的話，我們可以運用以下概念：

頂點 (Vertex)	頂點為想要表示的個體或對象。如港鐵路線圖上的車站。
邊 (Edge)	連接兩個頂點的線，用於表示兩個對象之間的連接。如地圖上車站之間的紅、綠、藍線段。
度數 (Degree)	頂點的度數是以該頂點為端點的邊的數量。如在上圖中，九龍塘的度數為 4；太子雖然只是連接 3 個車站，但它的度數是 4，因為有兩條邊連接太子及旺角。

路徑 (Path)	從一個頂點到另一個頂點的序列，可以考慮為圖中的連接線路。例如:鑽石山→黃大仙→樂富→九龍塘→沙田→九龍塘→石硤尾是一條從鑽石山到石硤尾的路徑，當中經過九龍塘兩次。
鄰居 (Neighbour)	由邊連接的兩個頂點是鄰居。如金鐘和中環是鄰居，荔灣和荔枝角也是鄰居。
連通圖 (Connected Graph)	任意兩個頂點之間均有路徑相連的圖。港鐵地圖是連通圖的一個好例子。

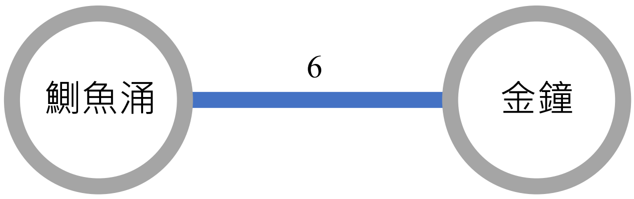
最短路徑問題

在 1982 的港鐵路線圖中，我們會發現如果要從一個地鐵站盡可能經過最少的站前往另一個地鐵站，路徑只有一條，所以沒有太多探究的空間。但隨著地鐵站越來越多，可選擇的路徑也變得更多了，對於要思考如何經過最少車站而到達目的地的複雜度也相應提高。例如以 2004 年的港鐵路線圖為例，假設我們撇去機場快線的線路，你能找到從鰂魚涌到美孚的路徑使所經過的車站數量為最少嗎？

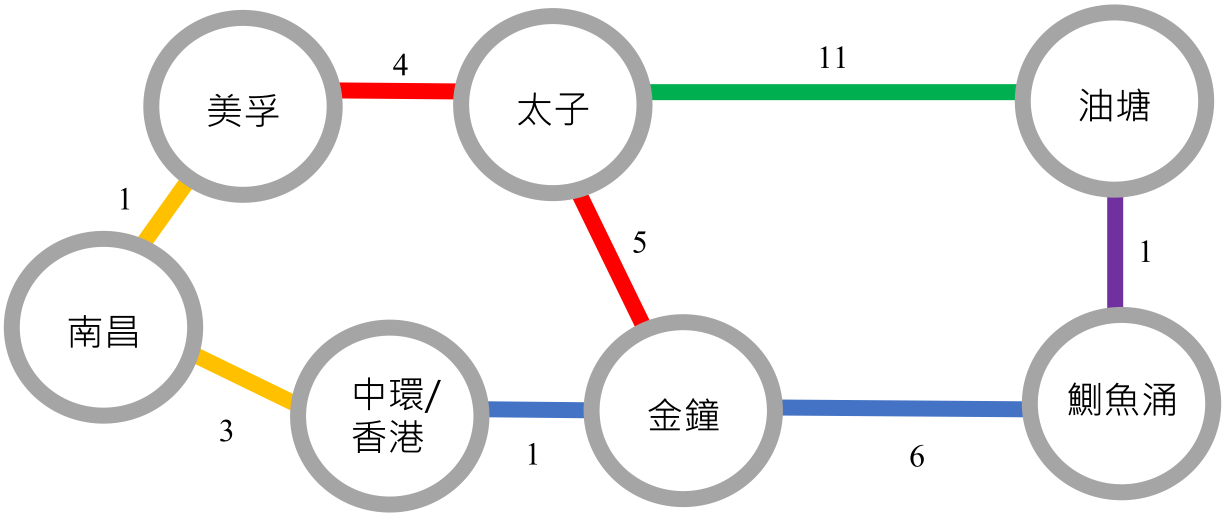
我們大可考慮三條路徑：

1. 鰂魚涌 → 油塘 → 太子 → 美孚
2. 鰂魚涌 → 中環(香港) → 南昌 → 美孚
3. 鰂魚涌 → 金鐘 → 美孚

除去起始站，第一條路徑經過 16 個車站，第二條路徑經過 11 個車站，第三條路徑經過 15 個車站。因此，若我們以經過的站數作為距離的唯一考量的話，第二條路徑是最短的。那我們又如何使用圖論來處理這個問題呢？首先，我們注意到如果要從鰂魚涌前往金鐘，最短的路徑只有一條，而且需要 6 個車站。因此，我們可以忽略金鐘和鰂魚涌之間的車站，考慮通過帶有加權邊(weighted edges)的圖來減少圖中的頂點，而權重(weight)則為兩個站之間的站數，如下圖：



通過引入加權邊的概念，我們可以將 2004 年地鐵圖簡化為下面的圖。



在得到相應的圖後，我們可以運用戴克斯特拉演算法，通過以下步驟找出鰂魚涌和美孚之間的最短距離：

1. 先為每個頂點設定一個距離值，以表達每個頂點與起點之間的最短距離。故此，起點的距離值為零。對於其他頂點的距離值，我們會沿不同路徑到訪，在未到訪之前暫定為無限。在上述例子中，我們把鰂魚涌視作為起點，而在起始設定時，除了鰂魚涌的距離值為 0 之外，其餘頂點均為無限。

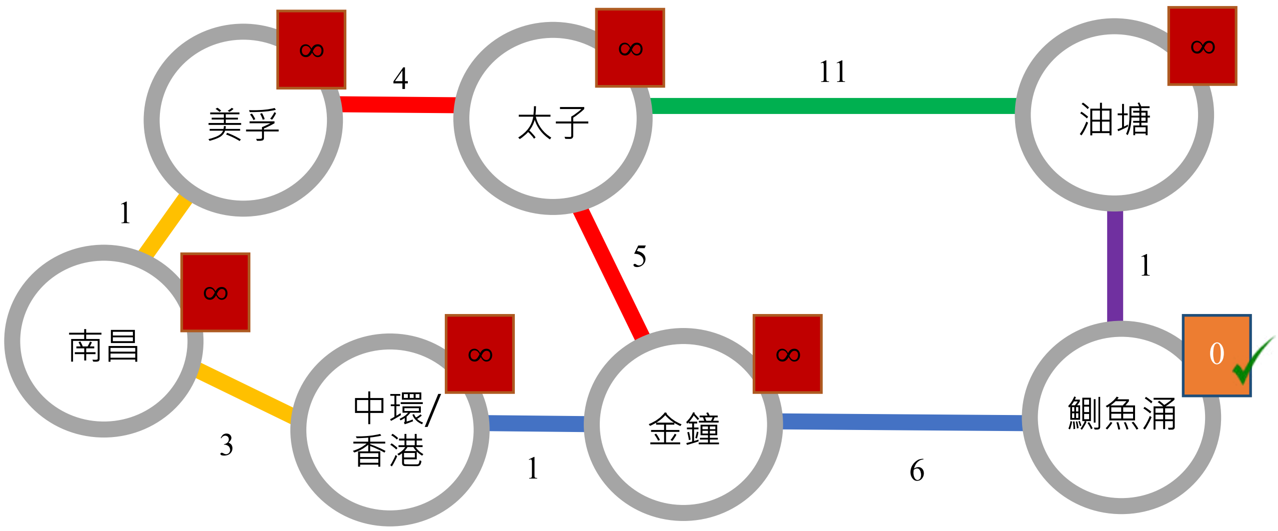
2. 再沿圖到訪所有鄰居，通過考慮加權邊的權重得出各到訪頂點的距離值。到訪過的頂點將永不再被檢查，並標記為已到訪。如從鰂魚涌到訪其鄰居，亦即金鐘和油塘，由於相應加權邊的權重為 6 和 1，所以金鐘和油塘的距離值將會是 6 和 1，而這距離值亦不會再有更新。

3. 再檢查剛到訪頂點的未到訪鄰居，通過考慮相應加權邊的權重更新其距離值。例如從金鐘到訪中環/香港，由於金鐘的距離值為 6 而金鐘到中環的權重為 1，所以中環的距離值為兩者相加，亦即 7。值得留意的是，同一個到訪點有可能從多於一條路徑到達，在這種情況下，我們要考慮所有可能路徑並以權重總和較小的值來更新該頂點的距離值，就好像從金鐘和油塘出發的話，我們均能到訪太子站，但從金鐘出發的話，到距離值為 11，而在油塘出發的話，距離值為 12，故此我們會以 11 作為太子站的距離值。

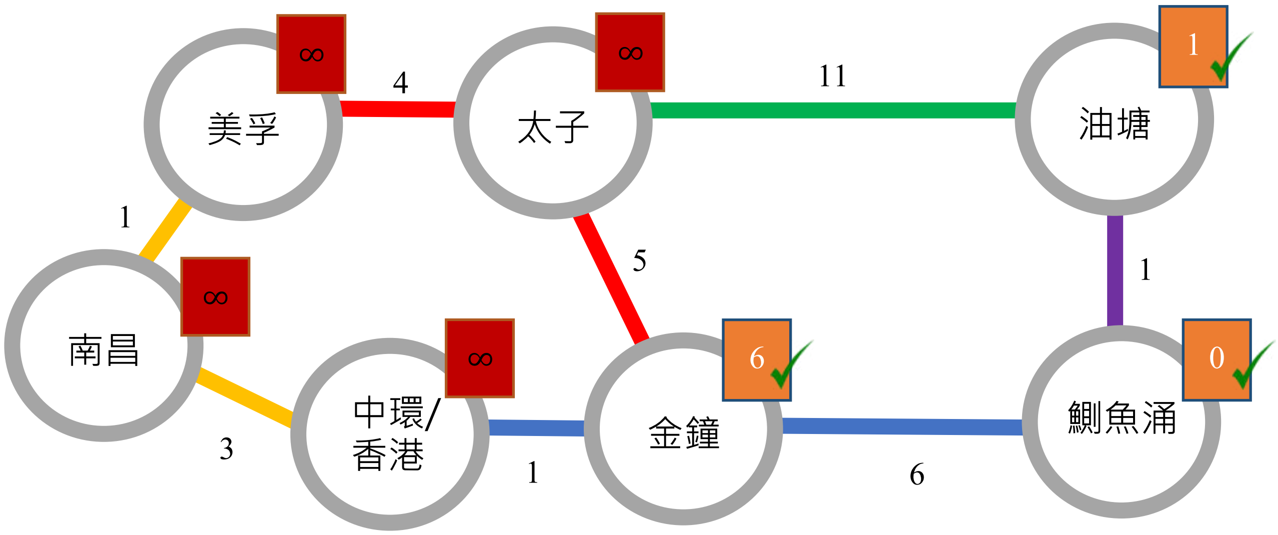
4. 一直重覆步驟 3，直到目標頂點被標記為已到訪，算法就此完成。

如以圖像方式來表達戴克斯特拉演算法，我們可以得到下列流程圖。

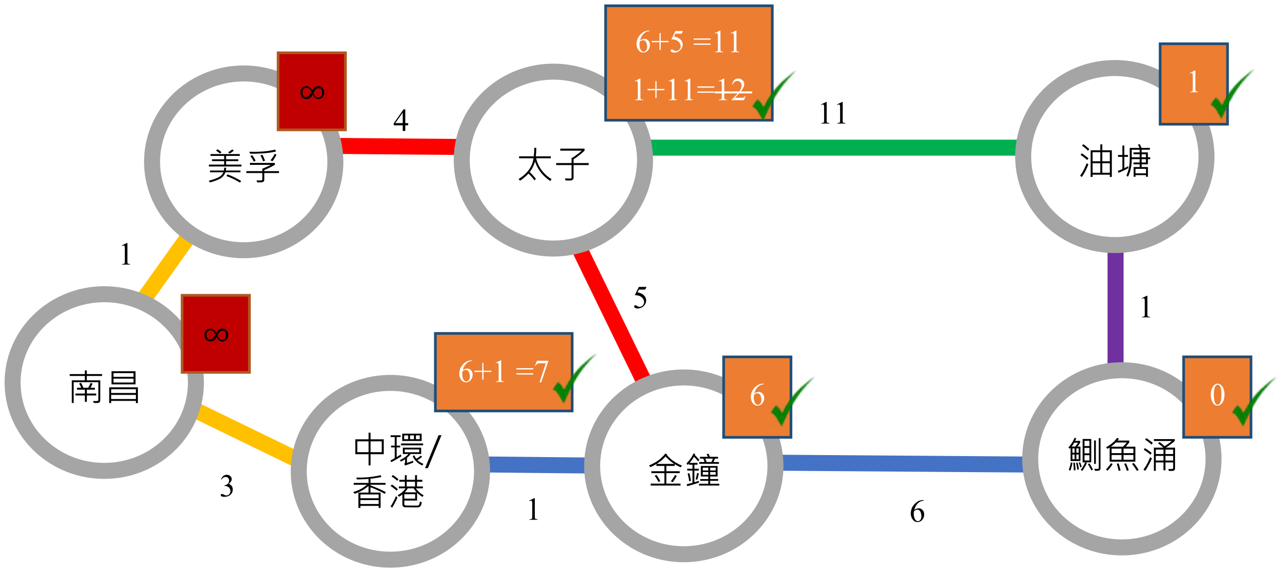
1. 先把起點的距離值設為 0，其他為無限。



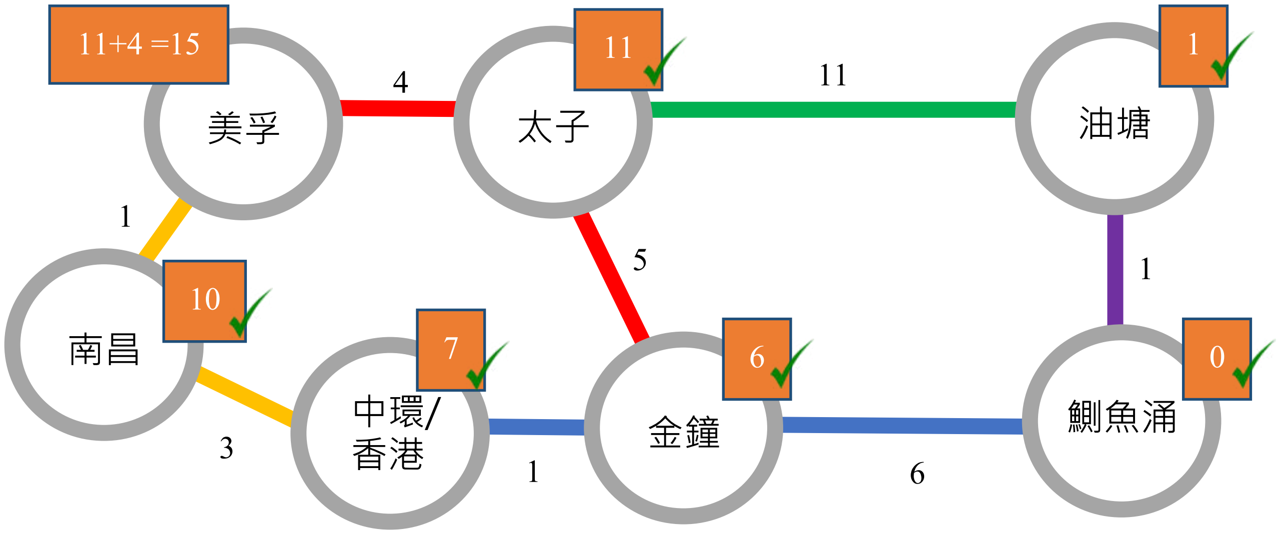
2. 再從鰂魚涌出發到訪金鐘和油塘，並更新它們的距離值。



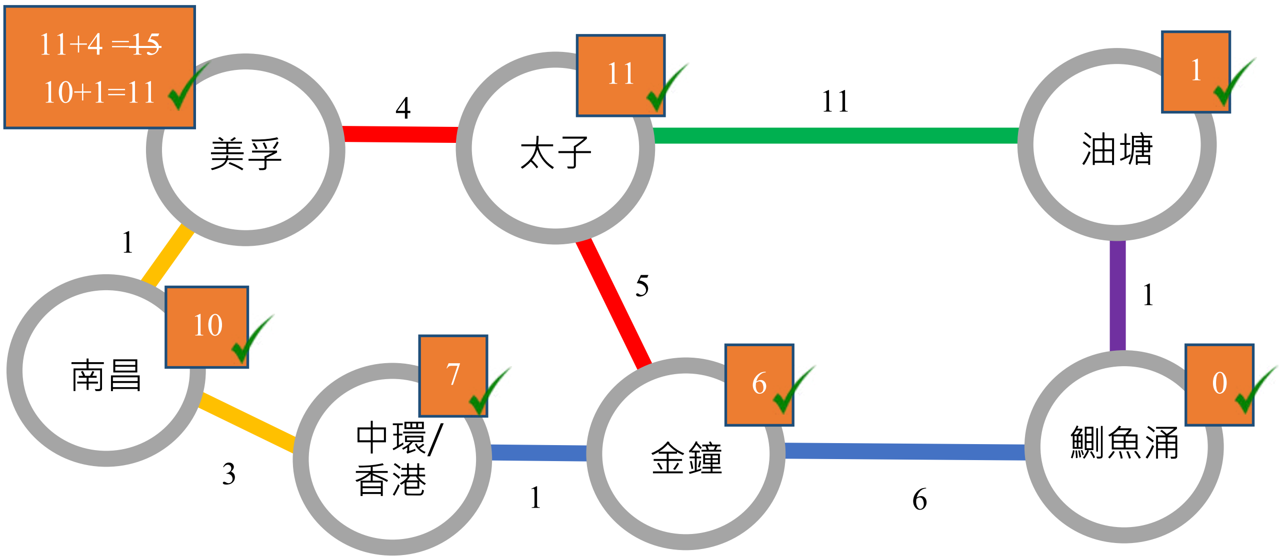
3. 考慮金鐘和油塘的未到訪鄰居，更新太子和中環/香港的距離值，對於有多於一個可到達的路徑的頂點，如太子，我們選用權重總和較小的來更新距離值。



4. 再考慮中環/香港和太子的未到訪鄰居，並更新南昌和美孚的距離值。在更新美孚站的距離值要注意現在還未考慮所有能到達的路徑。故此，未把美孚站標記成已到訪。

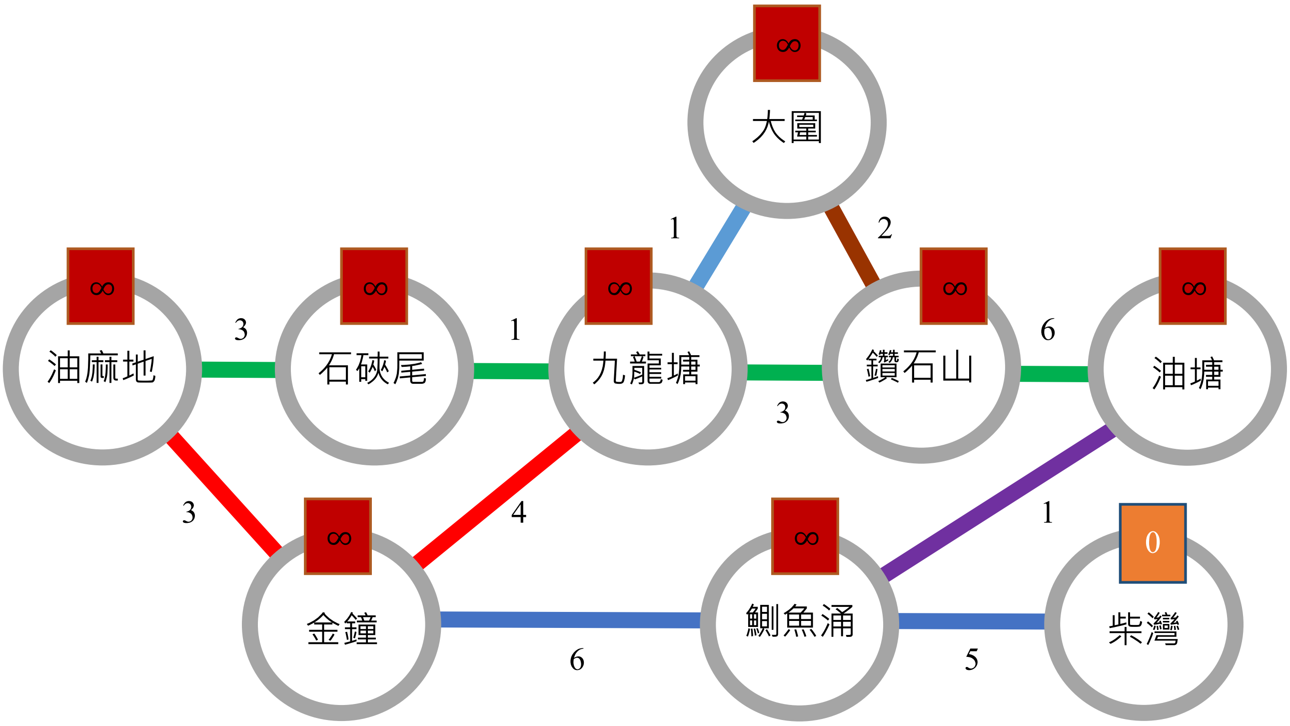


5. 最後考慮南昌的未到訪鄰居，檢查並更新美孚的距離值。

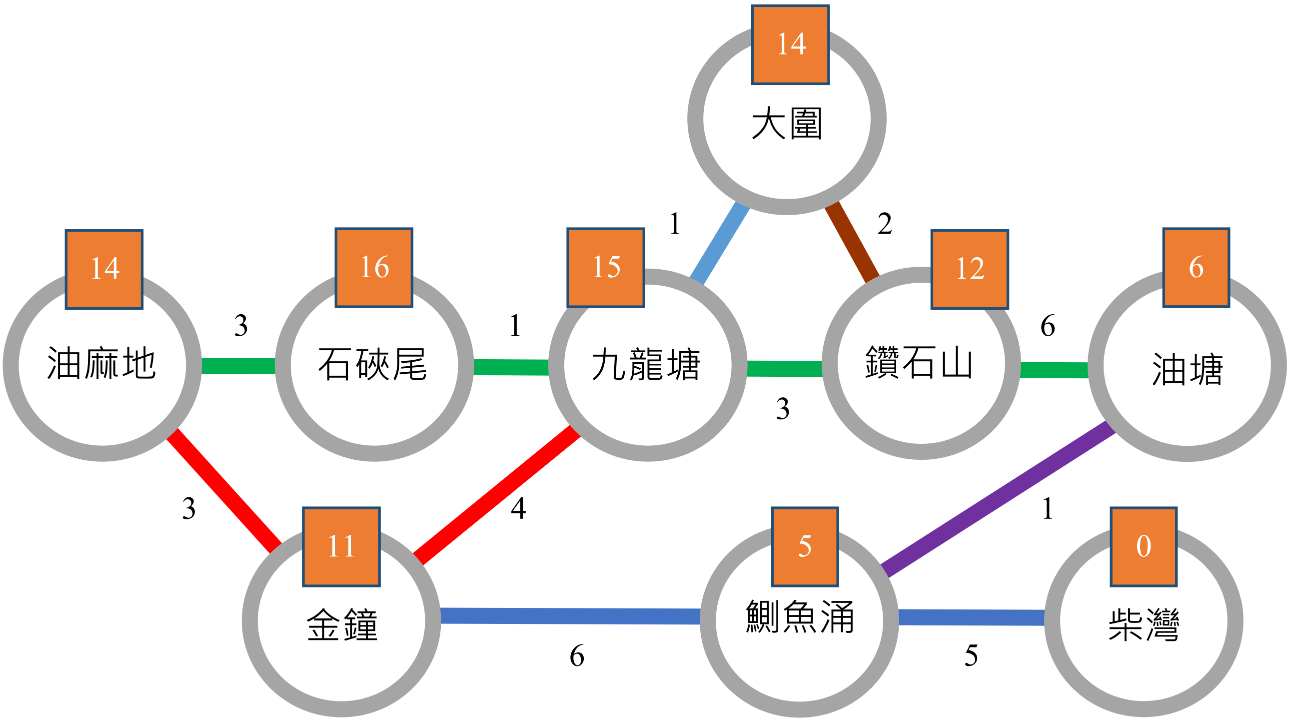


因此，由鰂魚涌到美孚最短路徑經過 11 個站，亦即從鰂魚涌→中環(香港)→南昌→美孚的路徑。在考慮完 2004 年的地鐵路線圖後，我們可嘗試為 2023 年的港鐵路線圖進行類似的建模，並運用戴克斯特拉演算法找出要從柴灣到石硤尾的最短路徑。

為了簡化所模擬出來的圖，我們主要考慮幾個主要換乘站，當中有鰂魚涌、金鐘、油麻地、油塘、鑽石山、九龍塘和大圍，並得出下圖。再將柴灣的距離值設定為零，其他所有未到訪的頂點為無限。



再運用戴克斯特拉演算法，逐一檢查各頂點的距離值，得到以下的圖。因此，最短路徑經過 16 個站(不計算起點站)。



在運用戴克斯特拉演算法為我們找出距離值後，我們能從距離值追溯到最短路徑，例如我們知道石硤尾站的距離值為 16，等於 15 + 1 而非 14 + 3，所以從柴灣到石硤尾的最短路徑應是經過九龍塘而不經過油麻地。同樣道理，從九龍塘的距離值 15 得知，其最短路徑可以是經過鑽石山、大圍或金鐘。用此法追溯，我們找到三條最短路徑：

1. 柴灣 → 鰂魚涌 → 油塘 → 鑽石山 → 九龍塘 → 石硤尾
2. 柴灣 → 鰂魚涌 → 油塘 → 鑽石山 → 大圍 → 九龍塘 → 石硤尾
3. 柴灣 → 鰂魚涌 → 金鐘 → 九龍塘 → 石硤尾

但當我們在實際生活中選擇路線時，你會選擇第二條路徑嗎？我相信大家都不會的，因為大家都清楚路徑 1 絕對比路徑 2 省時。這正帶出了進行數學建模時要留意的地方，例如從剛才建模的過程中，頂點與頂點之間的權重是以站數作考慮，而我們所思考的距離也是單純以車站數量作為考量。這一系列的假設都會為我們在建模過程中帶來不同的限制，假如沒有認清

這些限制就直接接受建模所得出的解，便會出現不少與現實情況落差甚大的解答。另外，假如我們要重新思考距離的考量，例如以行程所需時間取代所經過的車站數量作為距離的量度，剛才所建立的模型還是可以沿用的。我們並不需要重新建立另一個模型，剛才的圖已經為港鐵路線圖的基本結構有一個很好的呈現，我們只需要對加權邊的權重進行修改，以站與站之間的行車時間作權重，然後再用戴克斯特拉演算法為我們得到答案。

在認識過戴克斯特拉演算法後，可能會令大家思考戴克斯特拉演算法是不是把簡單的問題複雜化。因為在上述情況下，你可能會意識到，使用「蠻力」（亦即直接從地鐵路線圖上細數）和戴克斯特拉演算法找出答案所需的步驟數量大致相同，甚至可能更為簡單。這並不奇怪，因為戴克斯特拉演算法幾乎考慮了所有路徑，就像「蠻力」一樣。但即使如此，戴克斯特拉演算法的精妙之處是它提供了一種具系統性搜索最短路徑長度的方法，這有助我們能夠更準確運用電腦指令來解決問題。這種系統化找出最短距離的方法，如果放在一些更加複雜的情景下，尤其重要。例如我們要模擬的不是港鐵路線圖，而是中國高速鐵路的路線圖，其複雜程度就絕非能靠「蠻力」去找出最短路徑了，那時候我們便需要運用到這種有系統的演算法，進而運用電腦的幫助來為我們求出最短路徑了。

11. 運算思維與數學教育的結合

張天祐

中華基督教會銘賢中學

1. 前言

隨著科技的迅速發展，運算思維 (Computational Thinking) 成為現代教育中不可或缺的一環。數學作為邏輯思維與問題解決的基石，與運算思維有著密切的關聯。在推動創新教育的背景下，STEAM 教育更強調跨學科知識的融合，運算思維正是連結數學與其他學科的重要橋樑。

本文將探討運算思維如何融入數學教育，特別是與初中數學課程的結合。透過三個具體例子，展示如何將運算思維應用於課堂教學中，提升學生的數學學習興趣、邏輯推理能力及實際解決問題的能力。

2. 甚麼是運算思維 (Computational Thinking)

運算思維是一種解決問題的方式，透過邏輯推理和系統化的分析，幫助我們理解問題並設計解決方案。賽馬會運算思維教育的課程框架[1]強調運算思維的核心概念，這些概念與數學及程式設計息息相關，包括：

- 序列 (Sequences)
- 事件 (Events)
- 條件 (Conditionals)

[1] 香港賽馬會慈善信託基金. (2025). 運算思維 | CoolThink@JC. 取自 https://www.coolthink.hk/ct/

- 運算子 (Operators)
- 同步發生 (Parallelism)
- 重複 (Repetition)
- 命名和變數 (Naming and Variables)
- 數據結構 (Data Structures)
- 程序 (Procedures)

這些核心概念不僅是程式設計的基礎，還能幫助學生更深刻地理解數學。例如在本文中的三個例子中，條件語句和重複能模擬現實中的問題解決過程，讓學生在解題時具備更清晰的視角與方法。

此外，運算思維也包含一些常見的重點，例如：分解 (Decomposition)、模式識別 (Pattern Recognition)、抽象化 (Abstraction) 和算法設計 (Algorithm Design)[2]。這些重點有助於學生在解決問題時建立清晰的思路。

3. 例子一 — 香港的薪俸稅

薪俸稅計算是初中數學課程中「5.百分法」的學習重點之一，是一個現實應用問題，涉及累進稅制的概念。根據薪金收入分為不同稅階，每一個稅階有其對應的稅率。薪俸稅的計算可利用運算思維中的條件語句實現。

[2] Wing, J. M. (2008). Computational thinking and thinking about computing. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 366(1881), 3717–3725. https://doi.org/10.1098/rsta.2008.0118

根據香港政府一站通網站資料[3]，2019/20 課稅年度及其後的薪俸稅將按照下表計算：

應課稅入息實額($)	稅率	稅款($)
首 50,000	2%	1,000
另 50,000	6%	3,000
另 50,000	10%	5,000
另 50,000	14%	7,000
餘額	17%	

在數學教科書中往往有如下列題目，讓學生在不同的應課稅入息實額下需考慮不同的稅率以計算相應的薪俸稅。

問：小明和小美在 2024/25 財政年度的應課稅入息實額分別為$80,000 及$120,000。求他們各自應繳交的薪俸稅。

答：小明應繳交的薪俸稅 $= \$50,000 \times 2\% + \$30,000 \times 6\% = \$2,800$

小美應繳交的薪俸稅 $= \$50,000 \times (2\% + 6\%) + \$20,000 \times 10\% = \$6,000$

這種方法容易讓學生只關注計算的結果，忽略了稅制的邏輯結構。通過編程，學生需要設計條件語句，逐步處理不同稅階及稅率，讓他們更清楚看到累進稅制如何運作。

[3] 香港政府一站通網站: 香港政府. (2025). 薪俸稅及個人入息課稅稅率 | 香港政府一站通. 取自 https://www.gov.hk/tc/residents/taxes/taxfiling/taxrates/salariesrates.htm

下列為利用 Python 編寫程式碼解決以上問題的例子 (交互窗口中的 ***斜粗體*** 為用戶輸入)：

程式碼

```
net = int(input("應課稅入息實額($): "))
if net <= 50000:
    tax = net * 0.02
elif net <= 100000:
    tax = 50000 * 0.02 + (net - 50000) * 0.06
elif net <= 150000:
    tax = 50000 * (0.02 + 0.06) + (net - 100000) * 0.1
elif net <= 200000:
    tax = 50000 * (0.02 + 0.06 + 0.1) + (net - 150000) * 0.14
else:
    tax = 50000 * (0.02 + 0.06 + 0.1 + 0.14) + (net - 200000) * 0.17
print("薪俸稅($):", tax)
```

交互窗口示例一	應課稅入息實額($): ***80000*** 薪俸稅($): 2800
交互窗口示例二	應課稅入息實額($): ***120000*** 薪俸稅($): 6000

在設計程式碼時，學生能夠清楚歸納出其中的運算其實只有 5 個不同的分支，能夠有效地枚舉所有情況。

4. 例子二 — 二進制與十進制的轉換

二進制和十進制的轉換是計算機科學的基礎，也是初中課程「10. 整數指數律」中的內容。將二進制數字轉換為十進制數字的過程比較簡單，只需要列出一行算式並計算出答案。相反地，將十進制數字轉換為二進制數字時則相對複雜，需使用短除法，不斷將數字除以 2，記錄餘數，直到商數為 1。最後以餘數逆序排列即為二進制表示。

例如 4710 可表示為 1011112。

$47 \div 2 = 23 \ldots 1$

$23 \div 2 = 11 \ldots 1$

$11 \div 2 = 5 \ldots 1$

$5 \div 2 = 2 \ldots 1$

$2 \div 2 = 1 \ldots 0$

2	47		Remainder
2	23	--------------	1
2	11	--------------	1
2	5	--------------	1
2	2	--------------	1
	1	--------------	0

過程中不斷把商數視為下一次除法運算中的被除數，直至商數為 1 便停下。這個算法的不斷重覆直至達成某條件的概念可利用 while 迴圈實現。下列為利用 Python 編程的例子 (交互窗口中的 ***斜粗體*** 為用戶輸入) ：

程式碼

```
n = int(input("輸入十進制數字: "))
n_copy = n
bin = ""
while n > 1:
    if (n % 2 == 0):
        bin = "0" + bin
    else:
        bin = "1" + bin
    n = n // 2
print(str(n_copy) + "(10)" + " -----> " + "1" +
str(bin) + "(2)")
```

交互窗口示例	輸入十進制數字: ***47*** $47_{(10)}$ -----> $101111_{(2)}$

在以上例子中學生能更深入理解將二進制數字轉換為十進制數字背後的算法原理，亦能瞭解在程式碼中變數 n 不斷更新與算法中的商數與被除數的關係。老師亦可在課堂進行延伸討論有關十六進制數字及利用運算及編程轉換的方法以豐富學生的學習經歷。

5. 例子三 — 利用蒙地卡羅方法 (Monte Carlo Method) 估計圓周率 π 的數值

蒙特卡羅方法是一種利用隨機抽樣來模擬或解決問題的方法，適用於無法通過精確計算解決的複雜系統，可以用來估計圓周率 π 的值。利用蒙地卡羅方法只需以下兩個步驟：

I. 在 2×2 正方形中隨機生成一定數目的點。

II. 計算落在半徑為 0.5 的圓內的點的數目與所有點的數目的比，以此估算 π 的數值：

$\pi \approx$ (圓內的點的數目 / 所有點的數目) $\times 4$

下列為利用 Python 編程的例子 (交互窗口中的 ***斜粗體*** 為用戶輸入)，當中使用了 `random` 模組中的 `random.uniform(x, y)` 函數，每次隨機地選取在 x 及 y 中的一個數值（包含 x 但不包含 y ）：

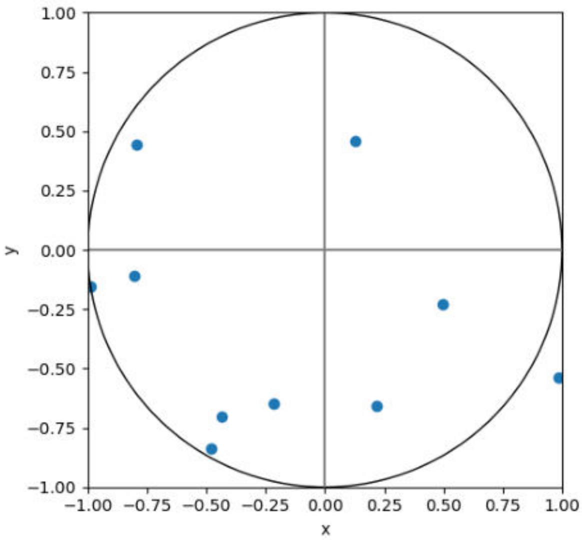
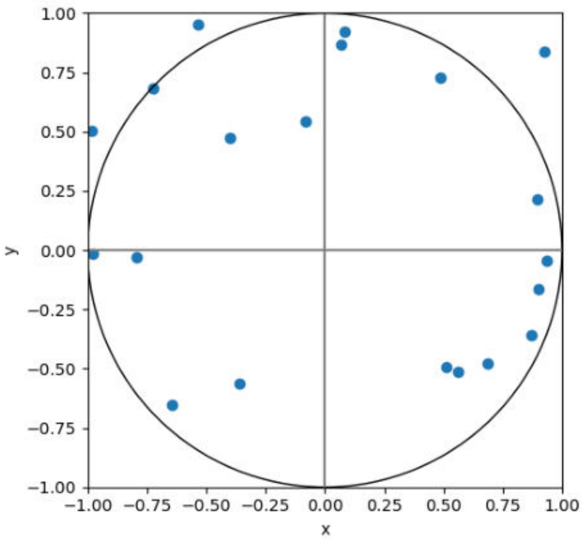
<table>
<tr><td>程式碼</td><td><pre>import random
pts = int(input("點的數目： "))
in_circle = 0
for i in range(pts):
    x = random.uniform(-1, 1)
    y = random.uniform(-1, 1)
    if x**2 + y**2 <= 1:
        in_circle = in_circle + 1
    pi = in_circle / pts * 4
print("π的估值：",pi)</pre></td></tr>
<tr><td>交互窗口示例一</td><td>點的數目： 10
π的估值： 2.8</td></tr>
<tr><td>交互窗口示例二</td><td>點的數目： 100
π的估值： 3.52</td></tr>
<tr><td>交互窗口示例三</td><td>點的數目： 1000
π的估值： 3.188</td></tr>
<tr><td>交互窗口示例四</td><td>點的數目： 100000
π的估值： 3.14532</td></tr>
</table>

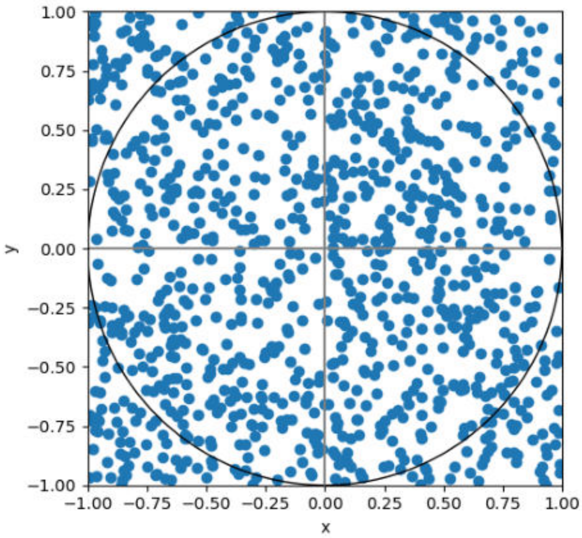
蒙地卡羅方法不僅是一種有效的數值計算工具，還能為學生提供一個直觀的方式來理解大數法則（Law of Large Numbers）—當重複實驗的次數逐漸增加時，隨機事件的平均值會趨近於預期值。此方法將大數法則的抽象概念具像化，幫助學生在實驗中觀察到理論的應用，引起學生對數學的興趣。

若上述程式略嫌過於抽象，老師亦可利用 matplotlib 模組繪製散點圖[4]。

程式碼	<pre>import random
	import matplotlib.pyplot as plt
	
	pts = int(input("點的數目： "))
	in_circle = 0
	x_coord = []
	y_coord = []
	
	for i in range(pts):
	    x = random.uniform(-1, 1)
	    y = random.uniform(-1, 1)
	    x_coord.append(x)
	    y_coord.append(y)
	    if x**2 + y**2 <= 1:
	        in_circle += 1
	
	pi = in_circle / pts * 4
	print("π 的估值：", pi)
	
	plt.figure()
	plt.scatter(x_coord, y_coord)
	circle = plt.Circle((0, 0), 1, fill=False)
	plt.gca().add_artist(circle)
	plt.axhline(0, color="gray", linewidth=0.5)
	plt.axvline(0, color="gray", linewidth=0.5)
	plt.xlim(-1, 1)</pre>

[4] GeeksforGeeks 網站：GeeksforGeeks. (2022). Estimating the value of Pi using Monte Carlo. 取自 https://www.geeksforgeeks.org/dsa/estimating-value-pi-using-monte-carlo/

	plt.ylim(-1, 1) plt.gca().set_aspect("equal") plt.xlabel("x") plt.ylabel("y") plt.show()
交互窗口示例一	點的數目： ***10*** π 的估值： 3.2 
交互窗口示例二	點的數目： ***20*** π 的估值： 3.4 

<table>
<tr>
<td>交互窗口示例三</td>
<td>點的數目： 1000
π 的估值： 3.12

</td>
</tr>
</table>

除了估算 π 的數值以外，同學亦能以此方法解決其他現實生活中的問題，例如估算其他圖形的面積及體積、模擬複雜的隨機事件以估算其事件相關概率。

6. 結語

運算思維為數學教育提供了新的教學視角，特別是在初中課程中，它能夠有效地將數學與現實應用、程式設計以及 STEAM 教育結合起來。本文通過薪俸稅計算、數制轉換及蒙地卡羅方法三個例子，展示了如何在課堂中引入運算思維，幫助學生在掌握數學概念的同時提升邏輯思維能力，並加強其將數學知識應用於實際問題的能力。運算思維與數學的結合，不僅能讓學生更深入地了解抽象概念，還能激發他們對數學學習的興趣，為解決現實中的跨學科問題做好準備。