

# 數學概念的學與教

吳銳堅

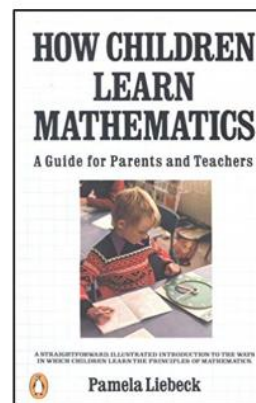
2019.07.04&09

## 1. 概念的概念

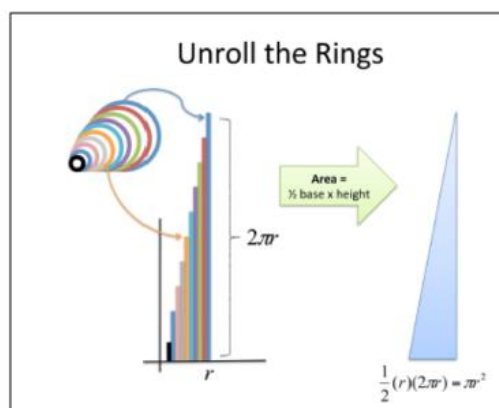
- ◆ 組織經驗的基礎
- ◆ 分類／概括（學習中極重要的元素）
- ◆ 如何學會「紅」這個概念（定義法、指稱法）

## 2. 概念的發展

- |                  |    |
|------------------|----|
| • E (Experience) | 體驗 |
| • L (Language)   | 語言 |
| • P (Picture)    | 圖畫 |
| • S (Symbol)     | 符號 |

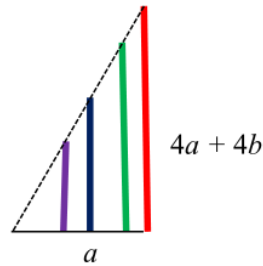
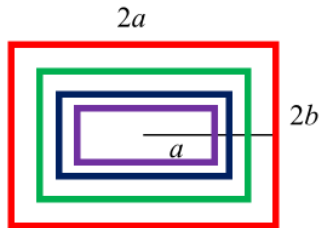
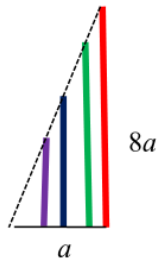
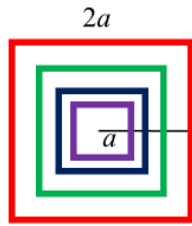


- ◆ 對概念的不同程度之掌握（認識 / 理解）  
“The most widely accepted ideas in mathematics education is that students should *understand mathematics*” (Hiebert and Carpenter, 1992)
- ◆ 理解的意義



(Azad, 2013; 2015)

$$\text{面積} = (a)(8a)/2 = 4a^2$$



### 3. 意義建構 (meaning-making) vs 程序知識 (procedural knowledge)

- ◆ 程序知識舉隅：求平方根的方法
  - 機械化程度、應用範圍、速度、原理
  - 方法 1：計算機
  - 方法 2：質因數分解法
  - 方法 3：連減法
  - 方法 4：連除法

|   |   |    |    |    |    |  |
|---|---|----|----|----|----|--|
|   |   |    | 5  | 3  | 2  |  |
|   | 5 | 28 | 30 | 24 |    |  |
|   | 5 | 25 |    |    |    |  |
| 1 | 0 | 3  | 3  | 30 | 24 |  |
|   |   | 3  | 3  | 09 |    |  |
| 1 | 0 | 6  | 2  | 21 | 24 |  |
|   |   | 2  |    | 21 | 24 |  |

- 方法 5：連減法（升級版）(Jarvis, 1994)

Algorithm to compute the square root of an integer  $n$

Initial step

Let  $a = 5n$  (this multiplication by 5 is the only time when an operation other than addition and subtraction is involved!), and put  $b = 5$ .

Repeated steps

(R1) If  $a \geq b$ , replace  $a$  with  $a - b$ , and add 10 to  $b$ .

(R2) If  $a < b$ , add two zeroes to the end of  $a$ , and add a zero to  $b$  just before the final digit (which will always be '5').

- 其他方法

- ◆ 概念的多重表達 (Ojose, 2015, p.50)
  - 四則運算的概念
  - 平方根的概念
  - 有向數的概念
  - 有向數運算的概念
  
- ◆ 概念的繩規
  - 坐標系統的概念
  - 2D 的概念
  - 坐標平面上直線的概念
  - 向量的概念
  - 向量的純量積和向量積的概念

**參考資料：**

- Azad, K. (2015). *Calculus, better explained: A guide to developing lasting intuition*. CreateSpace Independent Publishing Platform.
- Brahier, D.J. (2016). *Teaching secondary and middle school mathematics* (5th ed.). New York & London: Routledge.
- Brahier, D.J. (2001). *Assessment in middle and high school mathematics: A teacher's guide*. New York: Eye on Education.
- Hiebert, J., & Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. W. Grouws (Ed.), *Handbook of research in teaching and learning mathematics* (pp. 65-97). New York: Macmillan.
- Hoffmann, B. (1975). *About vectors*. New York: Dover.
- Hulsizer, M.R., & Woolf, L.M. (2009). *A guide to teaching statistics: Innovations and best practices*. Chichester, West Sussex: Wiley-Blackwell.
- Jarivs, F. (2005). Square roots by subtraction. *Mathematical Spectrum*, 37, 119-122.  
Also available free on the author's webpage:  
<http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/maths/jarvisspec02.pdf>
- Liebeck, P. (1984). *How children learn mathematics: A guide for parents and teachers*. London: Penguin.
- Nearing, J. (2003). *Mathematical tools for physics*. New York: Dover.
- Ojose, B. (2015). *Common misconceptions in mathematics: Strategies to correct them*. Lanham, Maryland: University of America.
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.
- Simmonds, J.G. (1994). *A brief on tensor analysis* (2nd ed.). New York: Springer-Verlag.
- Spitzer, D.R. (1975). What is a concept? *Educational Technology*, 15(7), 36-39.
- 涌井良幸、涌井貞美（楊瑞龍譯）(2019)。深度學習的數學。北京：人民郵電出版社。
- 張奠宙（2013）。張奠宙：數學教育隨想集。上海：華東師範大學出版社。

## 附錄

### 初中數學課程中有關數學概念的學習重點

- 1.2 理解乘方的概念
- 2.1 理解有向數的概念
- 3.1 認識近似值的概念
- 4.1 認識  $n$  次方根的概念
- 4.2 認識有理數和無理數的概念
- 5.1 理解百分變化的概念
- 6.1 理解率、比及比例的概念
- 7.3 認識數列的概念
- 7.4 認識函數的初步概念
- 9.1 理解二元一次方程的概念及其圖像
- 11.1 理解多項式的概念
- 12.1 理解恆等式的概念
- 14.1 理解不等式的概念
- 15.1 認識量度中誤差的觀念
- 15.2 認識最大絕對誤差、相對誤差和百分誤差的觀念
- 17.1 認識直角柱、直立圓柱、直角錐、直立圓錐、正角柱、正角錐、多面體和球形的概念
- 19.1 理解直線上的鄰角、對頂角和同頂角的概念及其性質
- 19.2 理解同位角、內錯角和同旁內角的概念
- 20.1 理解正多邊形的概念
- 21.1 理解全等三角形的概念
- 21.6 認識全等平面圖形的概念
- 22.1 理解相似三角形的概念
- 22.3 認識相似平面圖形的概念
- 28.1 認識離散數據和連續數據的概念
- 30.1 理解平均數、中位數和眾數 / 眾數組的概念
- 30.6 認識加權平均數的概念
- 31.1 認識必然事件、不可能事件和隨機事件的概念
- 31.2 認識概率的概念
- 31.5 認識期望值的概念

### 高中數學課程必修部分中有關數學概念的學習重點

- 2.1 認識函數、定義域和上域、自變量和應變量的直觀概念
- 4.4 理解最大公因式和最小公倍式的概念
- 7.1 理解等差數列的概念及其性質
- 7.3 理解等比數列的概念及其性質

- 12.1 理解軌跡的概念
- 14.6 理解投影的概念
- 15.2 理解排列的概念和記法
- 15.4 理解組合的概念和記法
- 16.2 理解概率加法定律及互斥事件和互補事件的概念
- 16.3 理解概率乘法定律和獨立事件的概念
- 16.4 認識條件概率的概念和記法
- 17.1 理解離差的觀念
- 17.2 理解分佈域和四分位數間距的概念
- 17.4 理解分組數據和不分組數據的標準差之概念

### 高中數學課程延伸部分單元一中有關數學概念的學習重點

- 3.1 認識函數極限的直觀概念
- 3.3 透過基本原理認識函數的導數的概念
- 5.1 認識函數的二階導數的概念
- 7.1 認識不定積分法的概念
- 8.1 認識定積分法的概念
- 10.1 理解條件概率的概念
- 11.1 認識離散隨機變量的概念
- 12.1 認識離散概率分佈的概念及以表列、圖像和數學公式表示離散概率分佈
- 12.2 認識期望值  $E[X]$  和方差  $\text{Var}(X)$  的概念及運用它們解簡單應用題
- 13.1 認識二項分佈的概念及其性質
- 14.1 認識泊松分佈的概念及其性質
- 16.1 通過正態分佈，認識連續隨機變量及連續概率分佈的概念
- 16.2 認識正態分佈的概念及其性質
- 19.1 認識樣本統計量和總體參數的概念
- 19.4 認識點估計的概念，當中包括樣本平均值和樣本方差
- 20.1 認識置信區間的概念

### 高中數學課程延伸部分單元二中有關數學概念的學習重點

- 4.1 理解弧度法的概念
- 6.1 理解函數極限的直觀概念
- 7.1 理解函數導數的概念
- 9.1 認識不定積分法的概念
- 10.1 認識定積分法的概念
- 12.1 認識二階及三階行列式的概念

- 13.1 理解矩陣的概念、運算及其性質
- 13.2 理解二階及三階方陣逆矩陣的概念、運算及其性質
- 15.1 理解向量及純量的概念