

初中數學課程概率的學與教

教育局數學教育組

中學數學課程修訂

學習單位	學習重點	時間	注釋
31. 概率	31.1 認識必然事件、不可能事件和隨機事件的概念 31.2 認識概率的概念 31.3 以列出樣本空間和數數的方法計算事件的概率 31.4 解涉及概率的應用題 31.5 認識期望值的概念 31.6 解涉及期望值的應用題	12	不包括幾何概率。 學生可運用諸如溫氏圖等圖表理解樣本空間的概念。 學生須運用圖表或樹形圖列出樣本空間。

中學數學課程修訂

現行課程的學習單位 (一九九九)	主要修訂			修訂課程的學習單位 (二零二零年九月推行)	修訂說明
	刪去	新增	重組/ 調整		
概率的簡單概念	✓			31. 概率	刪去有關幾何概率的課程內容。
	✓				刪去比較實驗概率和理論概率的課程內容。
			✓		把有關認識期望值的課程內容更改為非基礎課題。

概率的概念

為何擲骰擲到「1」、「2」、..... 均為 $\frac{1}{6}$?

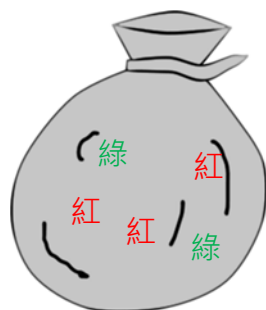
古典概率的假設

- ▶ 可能發生的結果只有有限多個
- ▶ 每個結果都以同樣的可能性發生
(等概率的假設 Equiprobability Assumption / 無差別原則 Principle of indifference)

等概率的假設 Equiprobability Assumption / 無差別原則 Principle of indifference



$P(\text{紅色}) = ?$



$P(\text{紅色}) = ?$



$P(\text{紅色}) = ?$

概率論起源於... ?
期望值的意義是... ?

期望值的例子(一)

► 背景：

在某次考試中，張老師共擬 25 條選擇題，每題 4 分。每條選擇題共有四個答案，只有一個答案是正確的。老師擔心有些學生沒有經過思考，便隨便選擇一個答案。他希望阻撓學生的僥倖心態，決定對每一個錯誤的答案倒扣若干分數。

► 問題：

老師應該把每一個錯誤的答案倒扣多少分數才合理？

期望值的例子(一)

► 如果學生把所有的題目都亂撞一通，他的總分的期望值 = 0

► 假設一個錯誤的答案倒扣 x 分。

► 學生隨意選一個答案，選擇正確答案的概率 = $\frac{1}{4}$ ，

選擇錯誤答案的概率 = $\frac{3}{4}$

► 總分的期望值 = $\left(4 \times \frac{1}{4} - x \times \frac{3}{4}\right) \times 25$

$$\left(4 \times \frac{1}{4} - x \times \frac{3}{4}\right) \times 25 = 0$$

$$x = \frac{4}{3}$$

∴ 一個錯誤的答案倒扣 $\frac{4}{3}$ 分

期望值的例子(一)

▶ 如果某學生只懂得13條題目，把餘下的12條題目亂撞一通

▶ 他的總分 = $13 \times 4 + 12 \times \frac{1}{4} \times 4 - 12 \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 52$

▶ 這樣公平嗎？

= 0

期望值的例子(二)



已知一個信封裡的錢是另一個信封裡的2倍。
你隨機選擇一個信封，但在你打開前你有機會選擇換到另一個。你換還是不換？

期望值的例子(二)



兩個信封有對稱性，換不換無所謂？

期望值的例子(二)



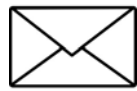
$\$M$

$\$2M$ or $\$ \frac{M}{2}$

期望值的例子(二)



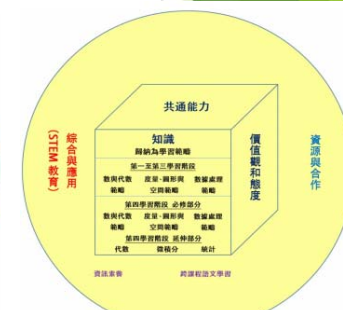
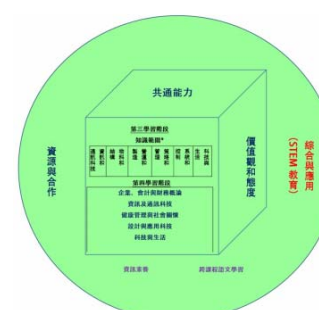
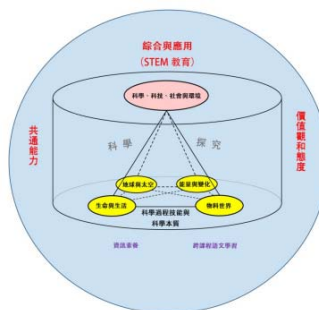
$\$M$



$\$ 2M$ or $\$ \frac{M}{2}$

$$\begin{aligned} \text{期望值} &= \$\left(2M \times \frac{1}{2} + \frac{M}{2} \times \frac{1}{2}\right) \\ &= \$\frac{5M}{4} > \$M \end{aligned}$$

科學、科技及數學教育學習領域的課程架構

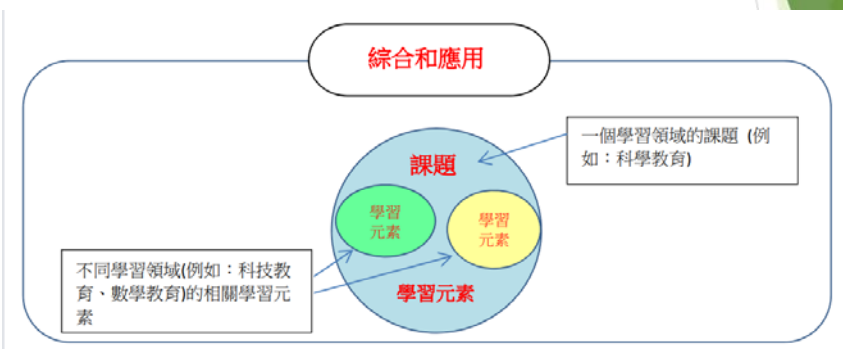


概率

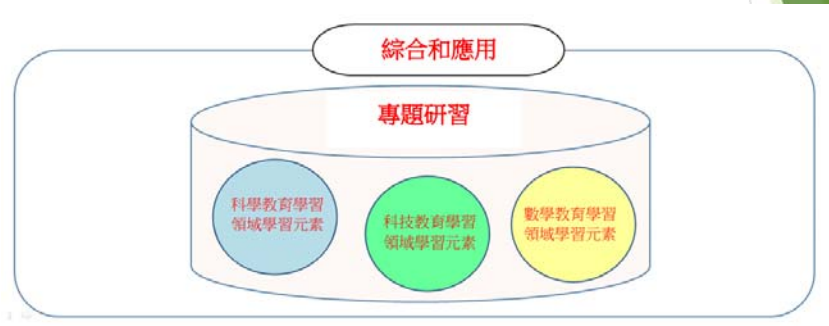
- ▶ 培養學生運用數據計算風險和作明智決定的能力

推行 STEM 教育學習活動的模式

模式一



推行 STEM 教育學習活動的模式 模式二



高中數學課程-必修部分 三垂線定理的學與教

學習單位	學習重點	時間	注釋
14. 續三角學	14.1 理解正弦、餘弦和正切函數及其圖像和性質，包括極大值、極小值和週期性 14.2 解三角方程 $a \sin \theta = b$ 、 $a \cos \theta = b$ 、 $a \tan \theta = b$ (其解限於 0° 至 360° 區間) 和其他的三角方程(其解限於 0° 至 360° 區間) 14.3 理解三角形面積公式 $\frac{1}{2} ab \sin C$ 14.4 理解正弦和餘弦公式	25	須包括含 $-\theta$ 、 $90^\circ \pm \theta$ 、 $180^\circ \pm \theta$ …… 等的正弦、餘弦和正切的數式之化簡。 解可變換為二次方程的方程屬非基礎課題，並在學習重點 5.3 中處理。
	14.5 理解希羅公式 14.6 理解投影的概念 14.7 理解一線與一平面的相交角和兩平面的相交角 14.8 理解三垂線定理 14.9 解二維和三維空間中相關的應用題		須包括傾角的概念。 三維空間的應用題包括求兩直線의 交角、直線與平面的交角、兩平面的交角、點與點的距離、點與線的距離、和點與面的距離。

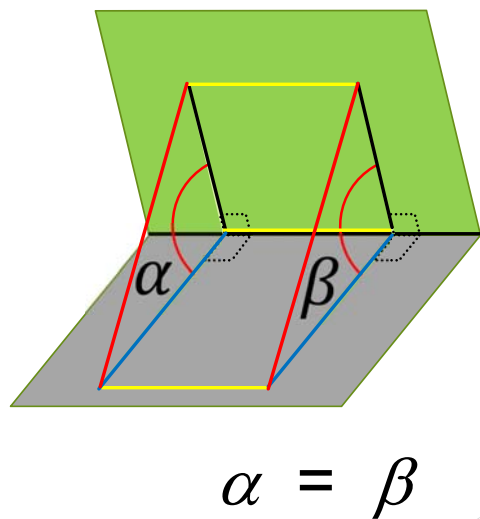
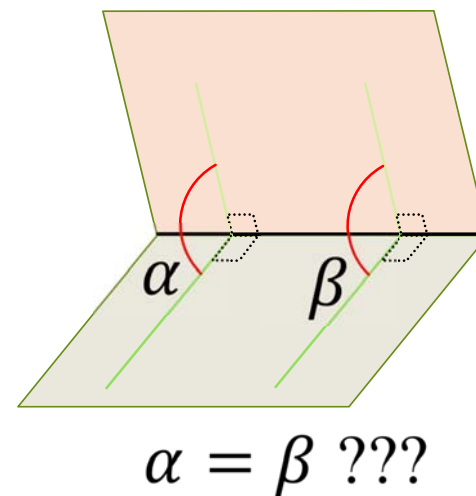
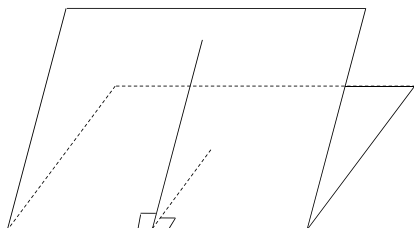
中學數學課程修訂

現行課程的學習單位 (二零一五年十一月更新)	主要修訂			修訂課程的學習單位 (二零二三年九月推行)	修訂說明
	刪去	新增	重組/調整		
13. 續三角		✓		14. 續三角學	把有關理解投影的概念、一線與一平面的相交角和兩平面的相交角的課程內容從第三學習階段移至本學習單位。 新增學習重點「理解三垂線定理」。 在原學習重點 13.6 的注釋中補充有關點與點的距離的問題。
		✓			
			✓		

二面角

《幾何原本》第11卷·定義6.

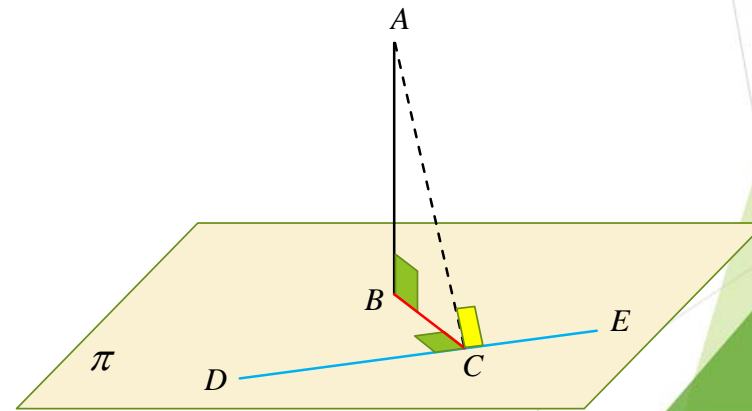
從兩個相交平面的交線上同一點，分別在兩平面內各作交線的垂線，這兩條垂線所夾的銳角或直角叫做該兩平面的傾角。



二面角

► 三垂線定理可以幫助我們找出該點的位置：

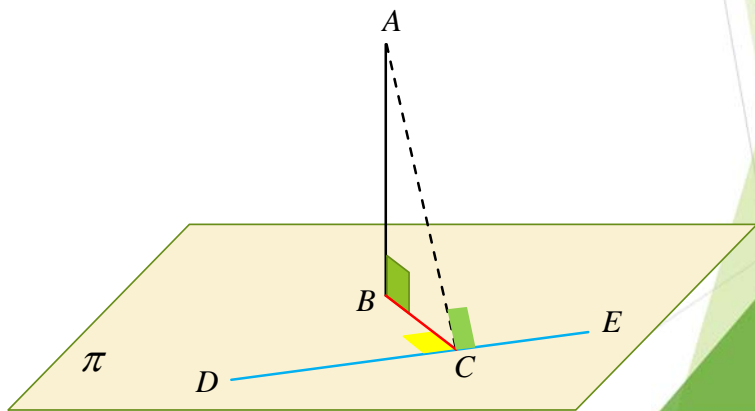
已知 AB 、 AC 分別是平面 π 的垂線和斜線，在平面 π 內的一條直線 DE 過斜線足 C 。若 $BC \perp DE$ ，則 $AC \perp DE$ 。



二面角

▶ 三垂線逆定理：

已知 AB 、 AC 分別是平面 π 的垂線和斜線，在平面 π 內的一條直線 DE 過斜線足 C 。若 $AC \perp DE$ ，則 $BC \perp DE$ 。



三垂線定理

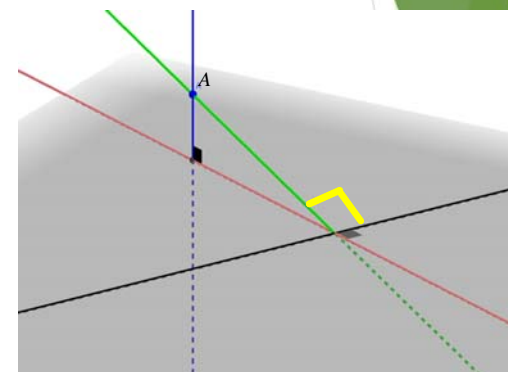
已知黑線在灰色平面上，點 A 在灰色平面外。

若：

- (1) 藍線為 A 至灰色平面的垂線
- (2) 紅線為 A 在灰色平面的垂足至黑線的垂線

則：

綠線垂直黑線。



三垂線定理的證明

設綠線、紅線、黑線共點於 Y 。
在黑線上取任意一點 X 。
黃色三角形 $\Delta AXA'$ 是直角三角形。

設 $AA' = a$ 、 $A'Y = b$ 、 $A'X = c$

$$\text{則 } AY^2 = a^2 + b^2$$

$$AX^2 = a^2 + c^2$$

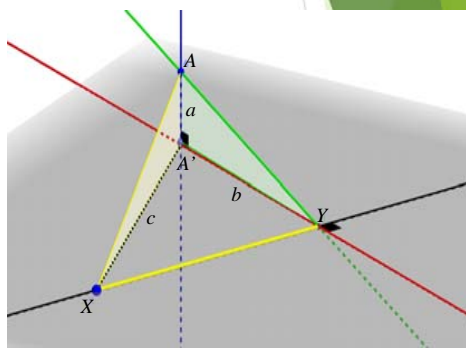
$$XY^2 = c^2 - b^2$$

$$\text{又 } XY^2 + AY^2 = (c^2 - b^2) + (a^2 + b^2)$$

$$= a^2 + c^2$$

$$= AX^2$$

$\therefore \Delta AXY$ 為直角三角形，則 $AY \perp XY$



三垂線定理的證明

▶ 縱向銜接

- ▶ 畢氏定理
- ▶ 線與面垂直的定義
- ▶ 可訓練學生找直角和直角三角形
- ▶ 可利用錐體模型或GeoGebra