

示例一：

## 函數的基本概念(一)

- 目標**：
1. 聯繫初中數列「輸入—處理—輸出」的概念與應變數及獨立變數的關係；
  2. 從函數的圖像、表列和符號方面來理解函數的基本概念。

**學習階段**： 4

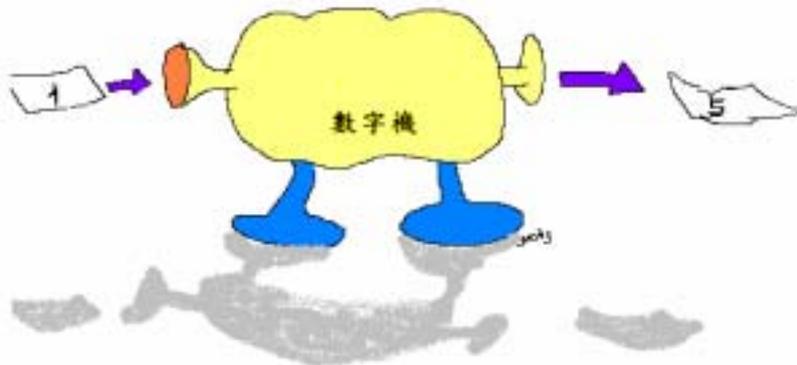
**學習單位**： 函數及其圖像

**所需教材**： 工作紙

- 預備知識**：
- (1) 數列的項數與項值的意義
  - (2) 由給出點的坐標，在直角坐標平面上畫出對應點
  - (3) 理解代數語言並懂得代入法

**教學內容**：

1. 教師與學生重溫數列的概念，並讓學生觀察工作紙第 1 題的圖案並完成第 2 題。
2. 教師與學生討論工作紙內第 2(a)及 2(b)的答案，並與學生討論解題策略及如何得出有關答案；由此引出“磚的數目”受“圖案編號”的影響，並用以下數字機器圖像介紹應變數及自變數的名稱。



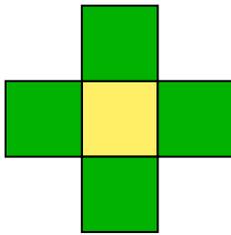
3. 教師著學生完成工作紙第 3 題，與學生討論答案。從  $x$  與  $y$  圖像觀察每一  $x$  值得出唯一的  $y$  值，從而介紹函數的概念及討論函數中「自變數決定應變數」的概念。教師與學生討論“磚的數目”是否是“圖案編號”的函數，及以代數式表示上述  $x$  與  $y$  關係。
4. 介紹  $f(x)$  的符號及  $f(1)$ 、 $f(2)$  等符號的意義並由表一的數值驗算及運用以上符號的做法。
5. 教師向學生強調兩點：
  - (a)  $x$  所表示的是一變數，而非一個固定或未知數；
  - (b) 我們不一定用「 $x$ 」表輸入值，例如，我們可用「 $z$ 」表輸入值，這時候，“磚的數目”與“圖案數目”的關係則應表示為：

$$f(z) = 4z + 1。$$

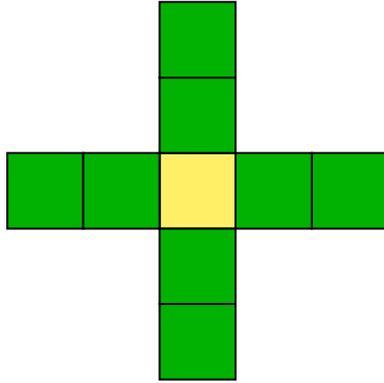
6. 教師須提醒學生初中數列內以及本示例活動的輸入值必須為自然數，但一般函數的自變數並不局限於自然數，在中學階段往往以實數為定義域。同時，教師亦提出工作紙第 3 題圖像應為 8 點而不是一條直線，然而，若擴濶輸入值為實數時，而滿足函數  $f(x) = 4x + 1$  的圖像則為連續直線。

## 工作紙：函數的基本概念

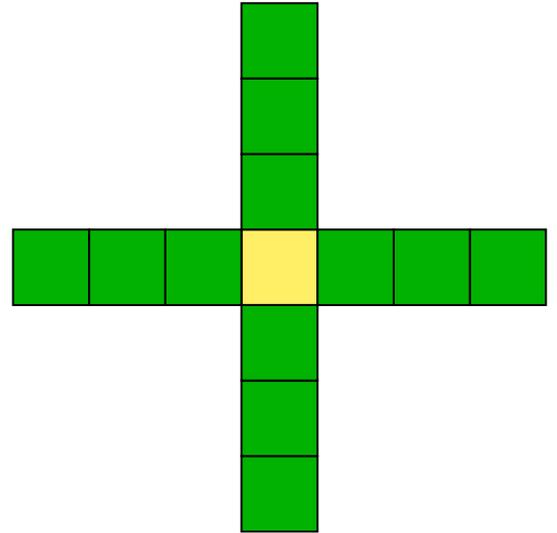
1. 一工人按以下規律砌階磚圖案。



圖案 1



圖案 2



圖案 3

2. (a) 根據此規律，完成下面的表格。

| 圖案編號 | 磚的數目 | 圖案編號 | 磚的數目 |
|------|------|------|------|
| 1    | 5    | 5    |      |
| 2    |      | 6    |      |
| 3    |      | 7    |      |
| 4    |      | 8    |      |

表一

(b) 求圖案 12 所需磚的數目。

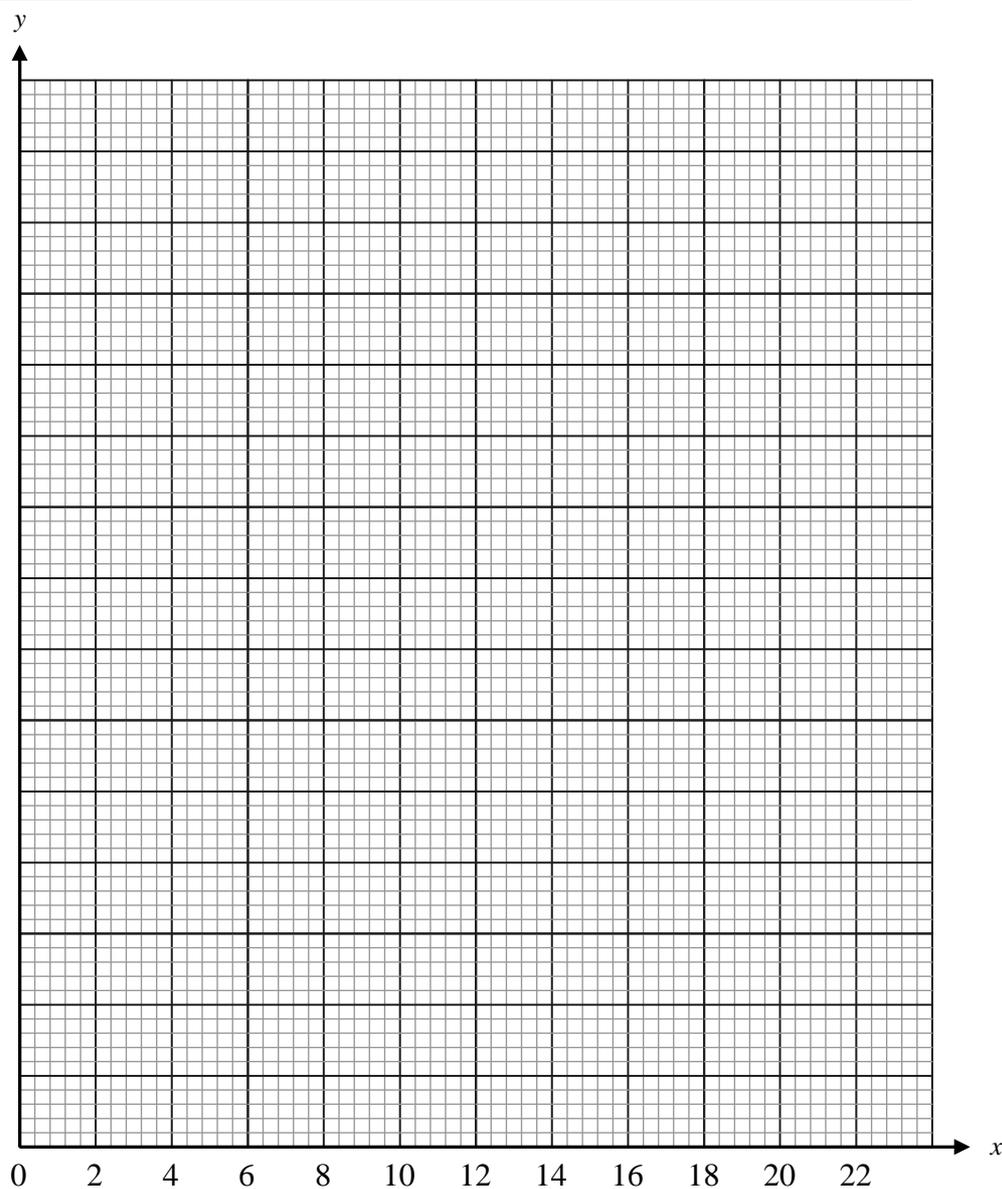
---

(c) 求圖案  $n$  所需磚的數目。

---

3. 以  $x$  代表圖案編號，以  $y$  代表磚的數目，並利用表一的資料，在以下的直角坐標平面畫出表示  $x$  與  $y$  的關係的圖像。

|     |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $y$ |   |   |   |   |   |   |   |   |



- (a) 描述上圖的特徵。
- 
- (b) 從圖像的趨勢，試猜測當  $x = 12$  及  $x = 16$  時， $y$  的對應值。
- 
- (c) 觀察圖像，每個  $x$  的數值是否有唯一對應的  $y$  值？
-

**教師注意事項：**

1. 本示例活動估計需時約 20-30 分鐘。
2. 教師提到「函數」這名稱時，可交代「函數」是‘function’的中譯。一般相信，「函數」這中譯是出自清代數學家李善蘭的手筆，有關李的背景，可參考：

<http://www.dyu.edu.tw/~mfht206/history/19/china.htm>

當時，「函」與「含」兩字互通，李把‘function’譯作「函數」，取其有「含有變量」的意思。用李的話說，「凡式中含天，為天之函數」（「天」、「地」、「人」、「物」是當時表示未知數或變量的 4 個字）；「凡此變數中函彼變數，則此為彼之函數」（此為李對‘If the variable quantity contains another variable quantity, then the former is a function of the latter’之中譯）。因此，函數不是一個數。今天，我們知道，函數是一種特定的對應(correspondence)或關係(relation)(今天函數的概念不是一蹴而就的，它的歷史發展，可參閱 Kleiner, 1989)。事實上，有人(如台大劉福增)建議，‘function’應譯作「函應」而非「函數」。

3. 本示例由學生初中所接觸的數列觀念作起點，帶出輸出值（應變數）由輸入值（自變數）決定的函數觀念；再輔以表列式（工作紙第 2(a)題）、代數式（工作紙第 2(c)題）及圖像（第 3 題）作比對。教師可讓學生從這函數例子的不同表達式去初步接觸函數的概念。更詳細函數不同表達式的討論可參閱示例四。
4. 在討論函數的概念時，教師可引入日常生活例子，如汽水機為例，有關例子可參閱示例二及示例三。

5. 工作紙答案建議如下：

2. (a)

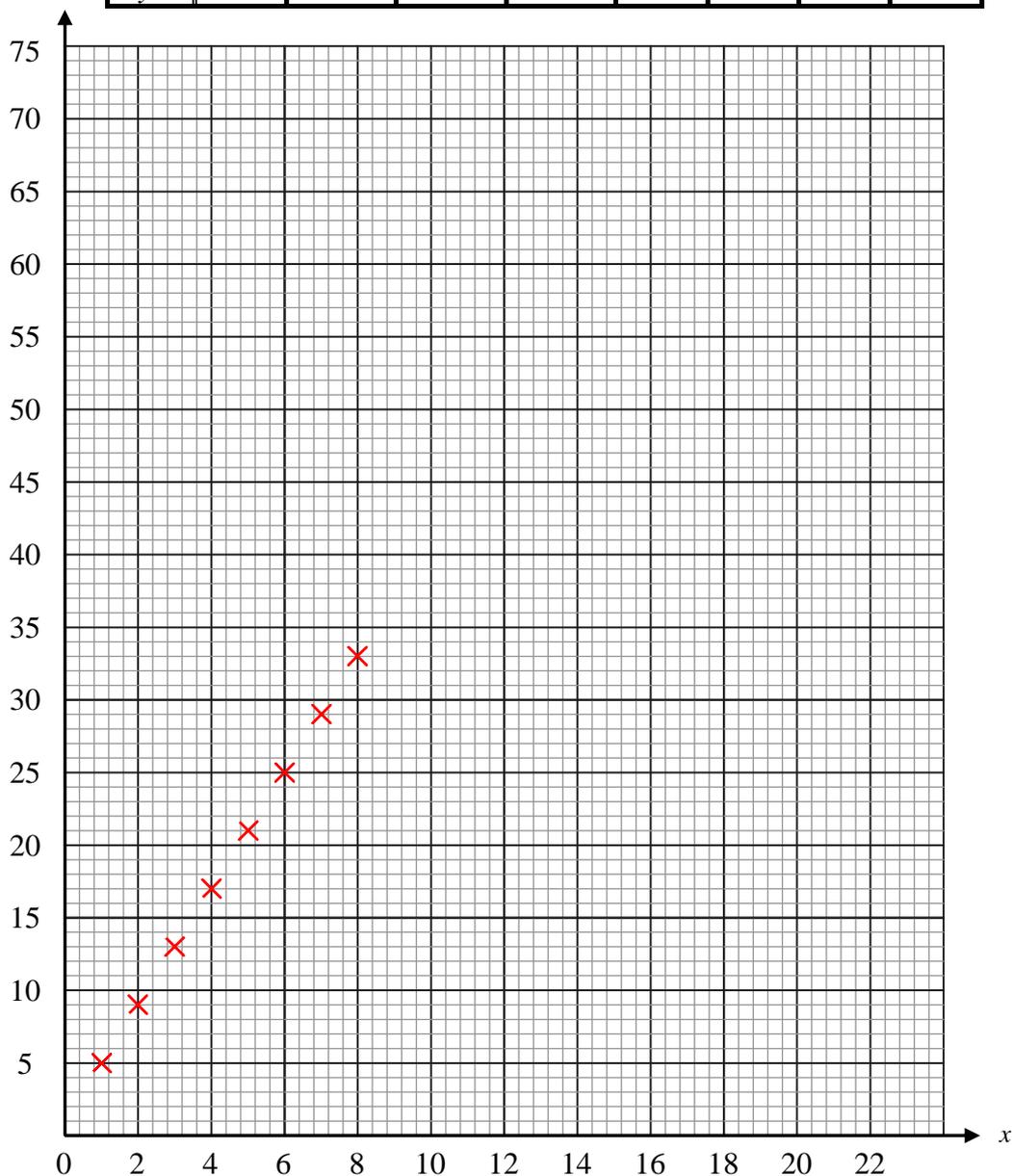
| 圖案編號 | 磚的數目 | 圖案編號 | 磚的數目 |
|------|------|------|------|
| 1    | 5    | 5    | 21   |
| 2    | 9    | 6    | 25   |
| 3    | 13   | 7    | 29   |
| 4    | 17   | 8    | 33   |

(b) 49

(c)  $4n+1$

3.

|   |   |   |    |    |    |    |    |    |
|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| x | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |
| y | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 |



- (a) 該 8 點在一條直線上而此直線的  $y$ -軸截距為 1。
- (b) 當  $x = 12$  時， $y = 49$ ；當  $x = 16$ ， $y = 65$ 。
- (c) 是。

參考書目：

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept. *The college Mathematics Journal*, 20(4), 282-300.

Markovits, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics*, 6(2), 18-28.

劉福增 (2003) · 《邏輯思考》· 台北：心理出版社。