示例十：變換對函數圖像的影響(三)

目　　標：
1. 認識反射對函數圖像的影響與代數式對應的變化；
2. 認識函數 $y=f(kx)$ 及 $y=kf(x)$ 與 $y=f(x)$ 圖像的關係。

學習階段：4

學習單位：函數及其圖像

所需教材：
(1) 試算表軟件如微軟 *Excel* (*graph.xls*)，繪圖軟件如 *Graphmatica* 和工作紙
(2) 印有二次及三次函數圖像的圖表紙和膠片

預備知識：
(1) 認識 $f(x)=x^2$ 及 $f(x)=x^3$ 的圖像
(2) 認識二次及三次函數的一般式

教學內容：

1. 教師先與學生重溫函數圖像平移與其相應代數式的關係。

函數 $f(x)$ 的改變	對應的圖像變換
$y=f(x)+k$，其中 $k>0$	向上移動 k 個單位
$y=f(x)-k$，其中 $k>0$	向下移動 k 個單位

函數 $f(x)$ 的改變	對應的圖像變換
$y=f(x+h)$，其中 $h>0$	向左移動 h 個單位
$y=f(x-h)$，其中 $h>0$	向右移動 h 個單位

教師可用例子，如 $y=f(x)$ 而 $f(x)=x^3$ 與 $y=(x-1)^3$ 及 $y=x^3-1$ 考查學生對平移變換的掌握。

2. 教師讓學生猜想函數 $y=-x^3$ 即 $y=-f(x)$ 的圖像與原有 $y=x^3$ 圖像有何關係。教師可提供印有 $y=x^3$ 圖像的膠片，讓學生分組探究 $y=-x^3$ 的圖像，並要求他們解釋這兩個圖像各對應點的坐標關係。

3. 教師利用 *Excel* 檔案 *graph.xls* 與學生探究不同二次及三次函數（如 $y=x^3+3x^2-1$圖像）以 x-軸作反射與其代數式的關係。其中，讓學生留意
   (a) 新圖像與原有圖像穿過 x-軸的點的數目及這些點的坐標；
   (b) 新圖像與原有圖像穿過 y-軸的點的數目及這些點的坐標；
   (c) 新圖像與原有圖像各對應點的坐標；
   (d) 新代數式與原有代數式各項係數的關係。

4. 教師與學生探討若將函數 $y=f(x)$ 而 $f(x)=x^3+3x^2-1$ 改為 $y=(-x)^3+3(-x)^2-1$（即 $y=f(-x)$），新圖像與原有圖像的關係。教師可派發印有 $y=x^3+3x^2-1$的圖像膠片，讓學生探索圖像的相應變化及與同學討論兩個圖像各對應點的關係。

5. 教師由此帶出 $y=f(-x)$是將 $y=f(x)$圖像以 y-軸作反射變換，而 $y=-f(x)$則是將 $y=f(x)$圖像以 x-軸作反射變換。
   教師利用 *Excel* 檔案 *graph.xls* 探討不同二次函數及三次函數作 x-軸反射及 y-軸反射的代數式、表列式及圖像表示的關係，其中須比較：
   (a) 以 y-軸作反射的圖像與原有圖像與 x-軸／y-軸相交點的坐標；
   (b) 以 x-軸作反射及以 y-軸作反射兩者圖像的分別；
   (c) 以 x-軸作反射及以 y-軸作反射兩者代數式的分別。

6. 教師可與學生進行以下遊戲，以鞏固他們對反射變換圖像的認識：
   (a) 將印有 $y=x^3+3x^2-1$圖像的膠片擺放在圖表紙的不同位置而要求學生找出以 x-軸作反射／或以 y-軸作反射的對應圖像；
   (b) 教師給出經變換的新函數的圖像膠片要求辨析其所經的變換（即判斷是以 x-軸／y-軸作反射）。

7. 教師指出 $y=-f(x)$只是 $y=kf(x)$的特殊例子，從而與學生討論若函數 $y=f(x)$改為 $y=2f(x)$，新函數的圖像與原有圖像的關係。教師用多項式函數如 $f(x)=x^2$作討論。學生若已學了三角函數，可考慮用 $f(x)=\sin x$等作討論。但是，教師亦可在學生未有三角函數的觀念之先，純以表列值或圖像的變化而無須引入該函數為正弦函數來討論 $y=2f(x)$。

8. 教師亦可利用繪圖軟件 *Graphmatica* 顯示不同 $k>1$的值時，$y=kf(x)$是將圖像作縱方向放大（即沿 y-軸伸展），反之，亦

須討論當不同 k 值而 $0<k<1$ 時，$y=kf(x)$ 是將圖像作縱方向縮小（即沿 y-軸收縮）。

9. 同樣地，教師可利用軟件 *Graphmatica* 與學生探討 $y=f(x)$ 與 $y=f(kx)$（$k>1$）的圖像變化。教師可與學生討論
   (a) 兩個圖像的相似地方；
   (b) 兩個圖像與 x-軸相交點坐標的特點；
   (c) 若 $y=f(x)$ 有極大值，比較 $y=f(kx)$ 與 $y=f(x)$ 極大值；
   (d) 若函數有週期性，比較 $y=f(kx)$ 與 $y=f(x)$ 的週期；
   (e) 比較 $y=f(kx)$，$k>1$ 與 $0<k<1$ 時，兩者的圖像與以上(a)至(d)相似及不同的地方。

10. 最後，教師作出總結如下：

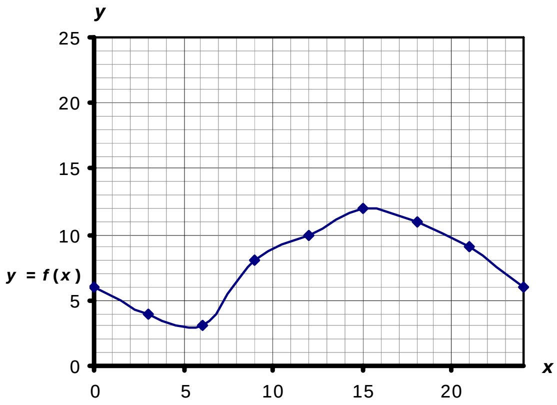
函數的代數式		函數的圖像
$y=kf(x)$	$k>1$	沿縱軸（y-軸）伸展 k 倍
	$0<k<1$	沿縱軸（y-軸）縮少 k 倍
$y=f(kx)$	$k>1$	沿 x-軸伸展 k 倍
	$0<k<1$	沿 x-軸縮少 k 倍

11. 教師派發工作紙作鞏固活動，要求學生
   (a) 由給出圖像的變化，判斷所經過變換及對應的代數式；
   (b) 由給出代數式的變化，畫出對應變換圖像的略圖。

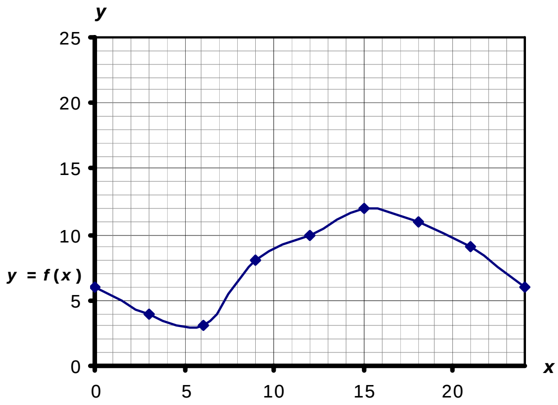
工作紙

1. 在問題(a)至(e)中，已給出 $y=f(x)$ 的圖像，依給定的函數變換畫出變換後的圖像。

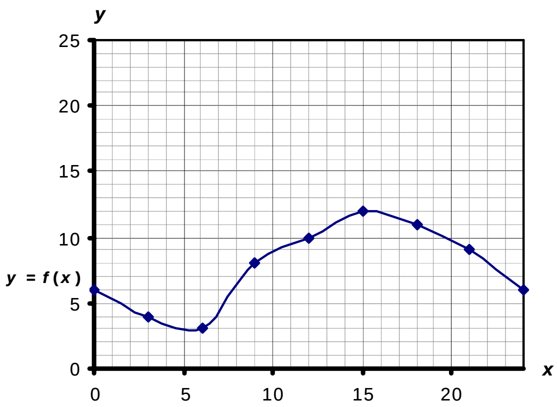
(a) 畫出 $y=2f(x)$ 的圖像。



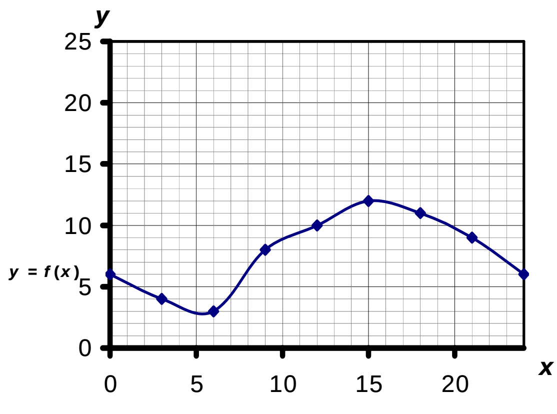
(b) 畫出 $y=\frac{1}{2}f(x)$ 的圖像。



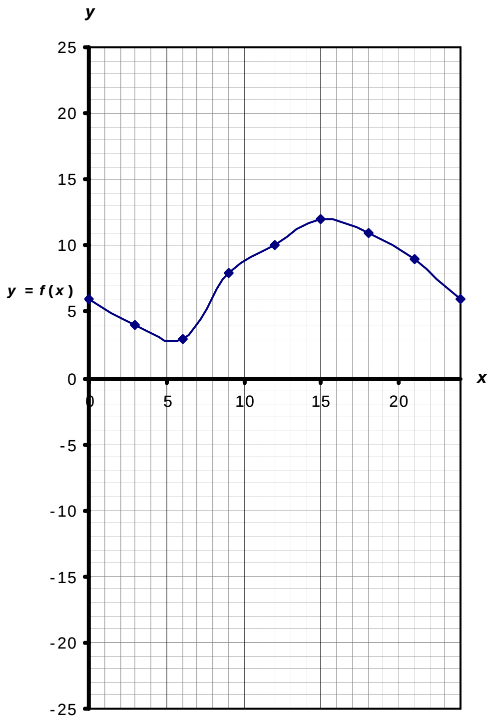
(c) 畫出 $y=f(2x)$ 的圖像。



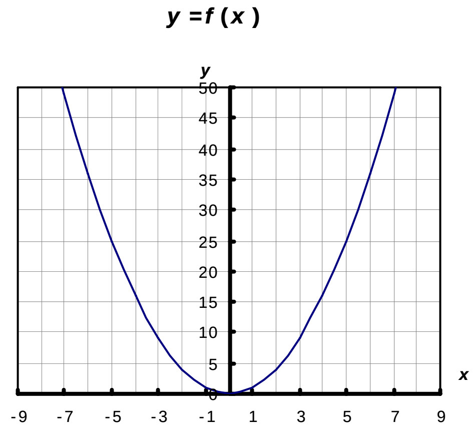
(d) 畫出 $y=f(\frac{x}{2})$ 的圖像。



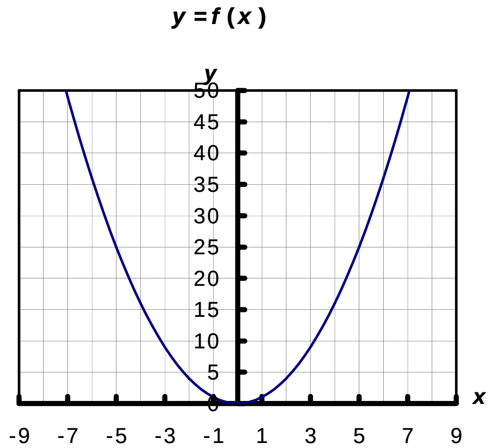
(e) 畫出 $y=-f(x)$ 的圖像。



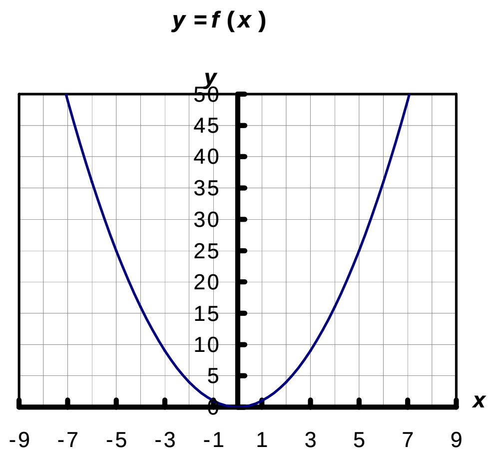
2. 右邊是二次函數 $f(x)=x^2$ 的圖像，依給定的函數變換，畫出變換後的圖像。



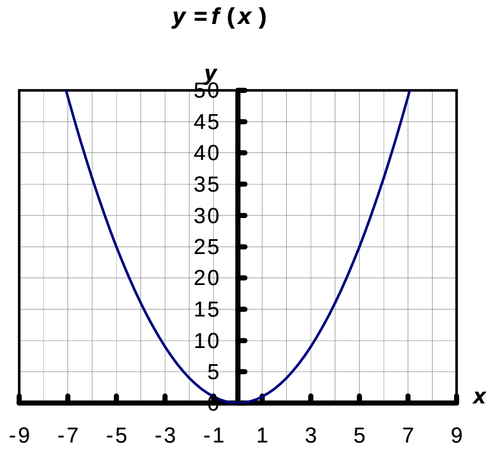
(a) 畫出 $y=f(2x)$ 的圖像。



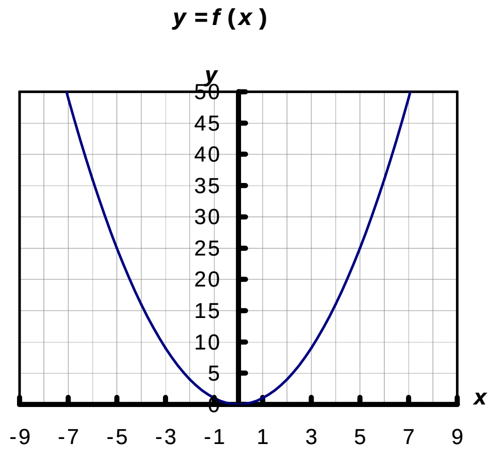
(b) 畫出 $y=2f(x)$ 的圖像。



(c) 畫出 $y=2f(x)+10$ 的圖像。



(d) 畫出 $y=2f(x+5)$ 的圖像。



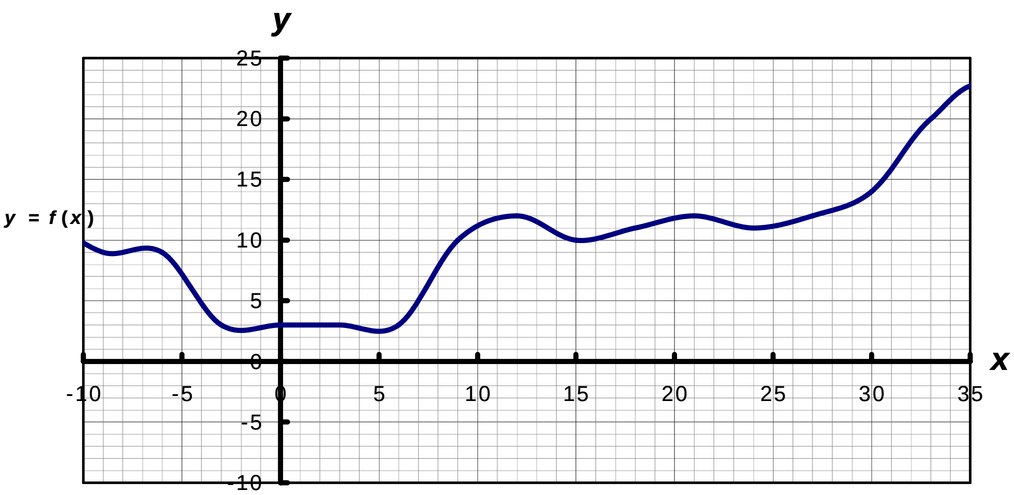
(e) 比較圖像(c) $y=2f(x)+10$ 及圖像(d) $y=2f(x+5)$，是否相同？換言之，$y=kf(x)+k\cdot h$ 是否相當於 $y=kf(x+h)$？

____

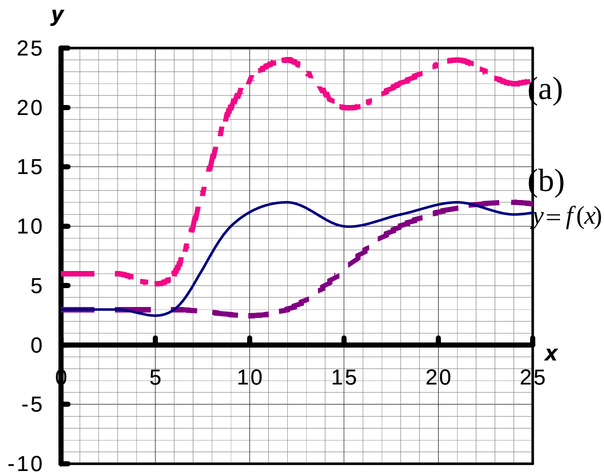
____

3. 由給出的圖像決定對應的函數變換的代數式。

原來圖像 $y=f(x)$ $(-10\le x\le 35)$



變換後的圖像 $(0\le x\le 25)$

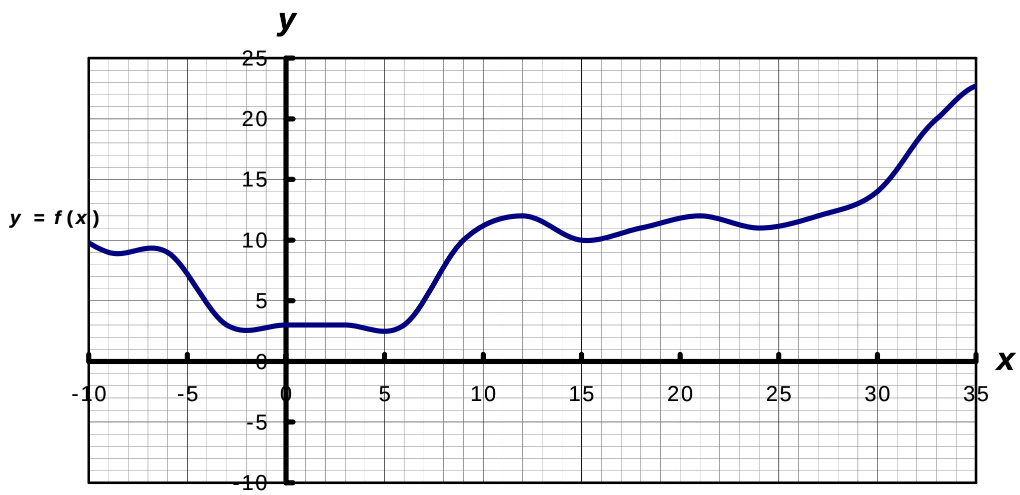


(i) 考慮圖像(a)與 $y=f(x)$ 的關係，寫出圖像(a)的方程 ____________________。

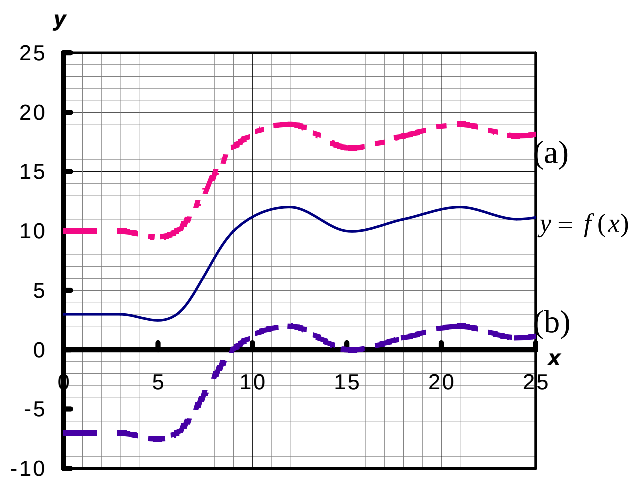
(ii) 考慮圖像(b)與 $y=f(x)$ 的關係，寫出圖像(b)的方程 ____________________。

4. 由給出的圖像決定對應的函數變換的代數式。

原來圖像 $y = f(x)$ $(-10 \le x \le 35)$



變換後的圖像 $(0 \le x \le 25)$

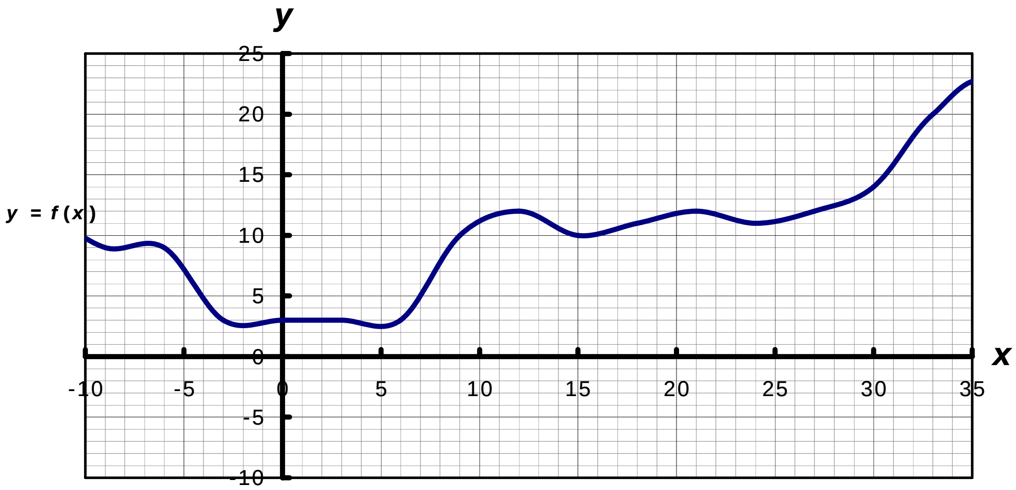


(i) 考慮圖像(a)與 $y = f(x)$ 的關係，寫出圖像(a)的方程 ____________________。

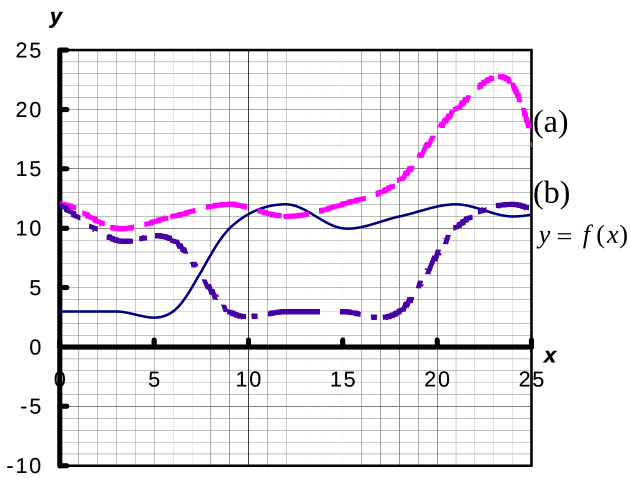
(ii) 考慮圖像(b)與 $y = f(x)$ 的關係，寫出圖像(b)的方程 ____________________。

5. 由給出的圖像決定對應的函數變換的代數式。

原來圖像 $y = f(x)$ $(-10 \le x \le 35)$



變換後的圖像 $(0 \le x \le 25)$

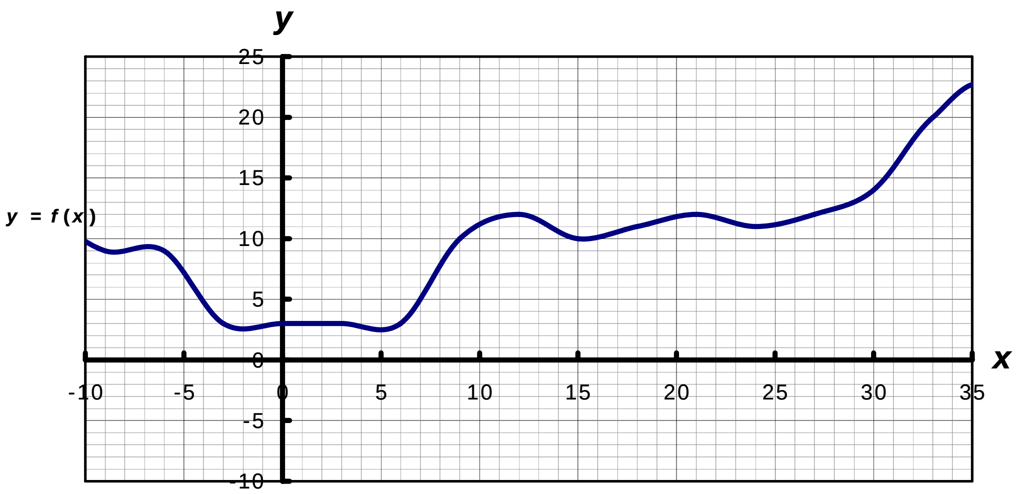


(i) 考慮圖像 (a) 與 $y = f(x)$ 的關係，寫出圖像 (a) 的方程 ________________________。

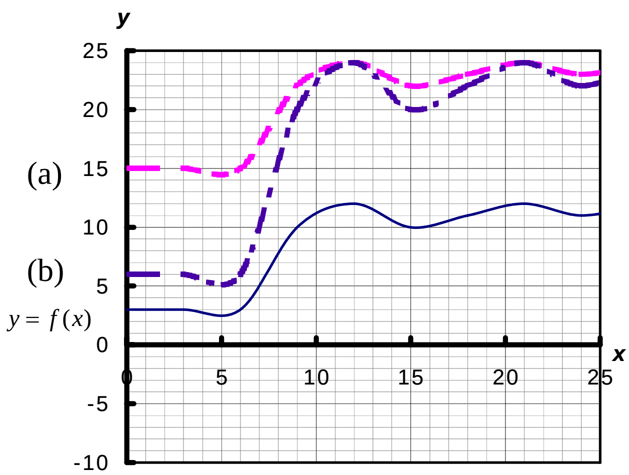
(ii) 考慮圖像 (b) 與 $y = f(x)$ 的關係，寫出圖像 (b) 的方程 ________________________。

6. 由給出的圖像決定對應的函數變換的代數式。

原來圖像 $y = f(x)$ $(-10 \le x \le 35)$



變換後的圖像 $(0 \le x \le 25)$



(i) 考慮圖像(a)與 $y = f(x)$ 的關係，寫出圖像(a)的方程 ____________________。

(ii) 考慮圖像(b)與 $y = f(x)$ 的關係，寫出圖像(b)的方程 ____________________。

教師注意事項：

1. 本示例活動需時約 70-80 分鐘。

2. 教師在使用 $y = x^2$ 作反射變換的例子時，須留意 $y = f(-x)$ 與 $y = f(x)$ 是同一代數式，在圖像上亦看不見有變化，故此本示例採用 $y = x^3$ 作以 y-軸作反射的例子，然而，因 $y = -x^3$ 與 $y = (-x)^3$ 是同一代數式及圖像，學生不能透過此函數得出 $y = f(-x)$ 與 $y = -f(x)$ 的分別。故此示例採用 $y = x^3 + 3x^2 - 1$ 三次函數例子作討論。

3. 選用 $y = x^3 + 3x^2 - 1$ 三次函數較易令學生比較原有圖像及經變換圖像與 x-軸，y-軸的點坐標。教師可一開始便選用其他二次／三次函數作討論例子。

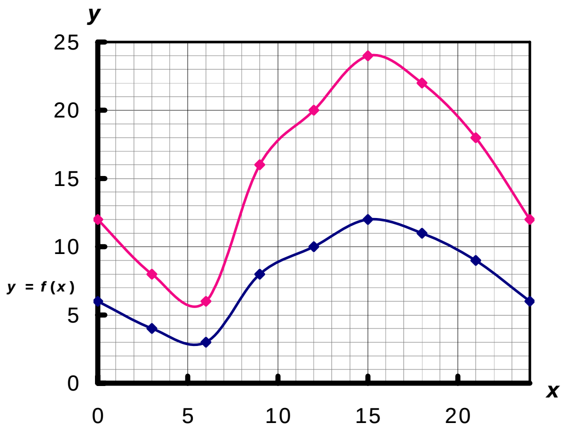
4. 學生利用膠片顯示圖像反射的效果能鞏固學生在初中已學的圖像反射的概念，同時透過坐標的比較，學生能理解代數式及圖像變換的關係。用膠片亦可減省學生重複畫圖所需的時間。教師可考慮射印不同函數的圖像讓學生作遊戲比賽得出反射變換後的圖像，同時教師可選用不同函數，如 $y = x^3 + 3x^2 - 1$ 與 $y = x^3 + x^2 + 1$ 圖像以便有不同難度的活動。

5. 教師在選用三角函數 $y = \sin x$ 或 $y = \cos x$ 作圖像放大、縮小的比較時，須留意學生有可能對 $\sin 120°$ 等值未有概念，教師可考慮只用圖像各點坐標的比較 $y = f(x)$、 $y = f(kx)$ 與 $y = kf(x)$ 圖像上的分別而無須指明有關圖像是正弦，餘弦函數圖像。當然，教師亦可選用多項式函數作介紹，但圖像效果則不及三角函數明顯。

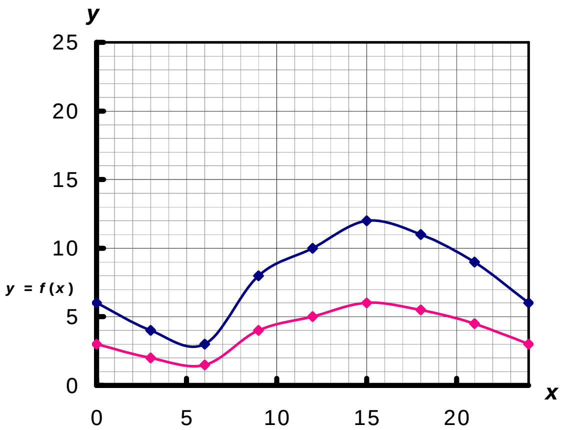
6. 工作紙的答案建議如下：

1.

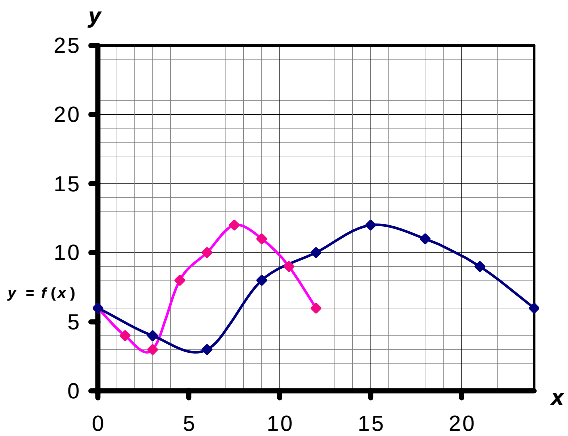
(a) 畫出 $y = 2f(x)$ 的圖像。



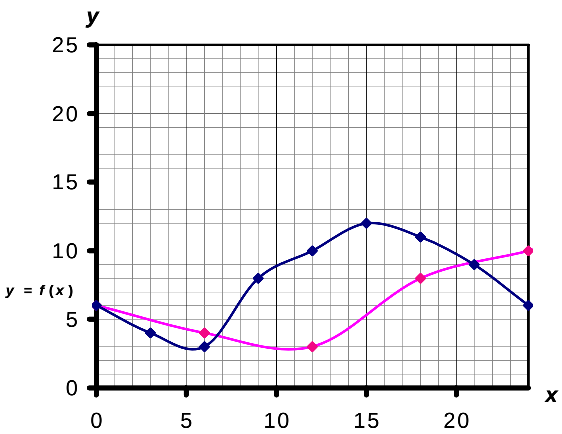
(b) 畫出 $y = \frac{1}{2}f(x)$ 的圖像。



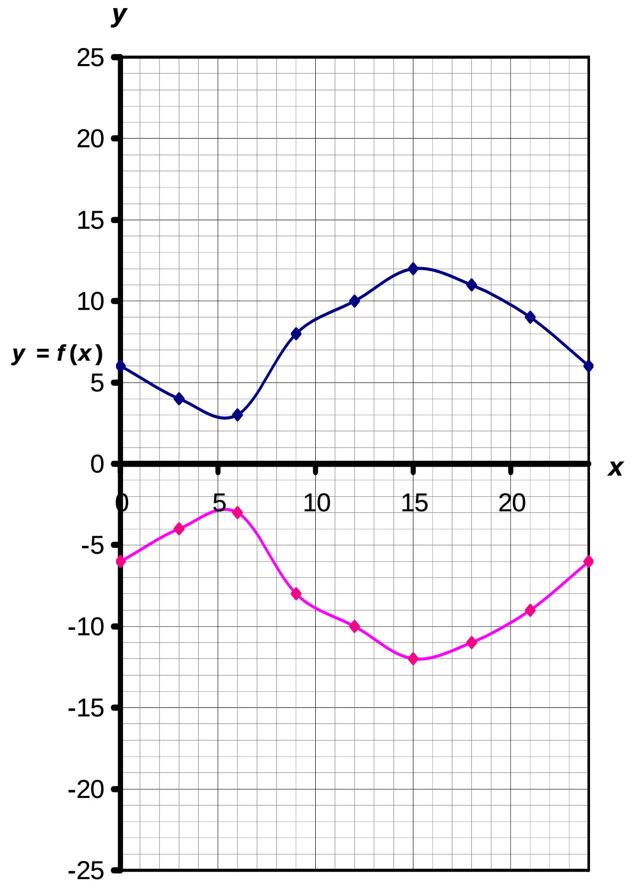
(c) 畫出 $y = f(2x)$ 的圖像。



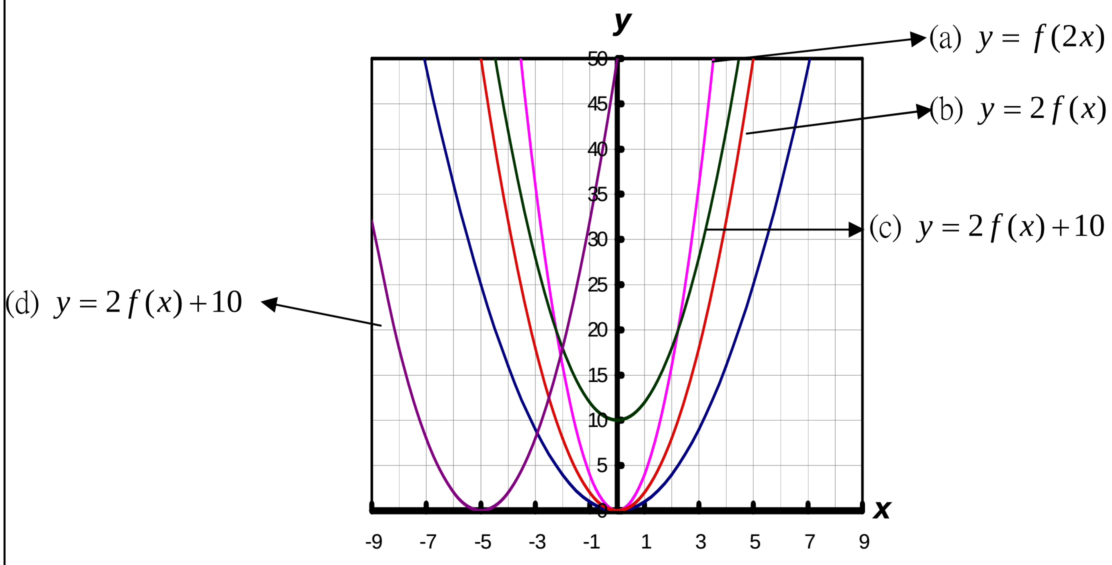
(d) 畫出 $y = f(\frac{x}{2})$ 的圖像。



(e) 畫出 $y=-f(x)$ 的圖像。



2.



(e)

不相等，即一般而言

$kf(x+h)\neq kf(x)+k\cdot h$ 。

3. (i) $y = 2f(x)$

   (ii) $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$

4 (i) $y = f(x) + 7$

   (ii) $y = f(x) - 7$

5. (i) $y = f(x + 12)$

   (ii) $y = f(x - 12)$

6. (i) $y = f(x) + 12$

   (ii) $y = 2f(x)$