

## 示例十一： 變換對函數的影響

- 目標：** 藉日常生活中的例子，鞏固
1. 函數的概念；
  2. 函數不同的表示方式；
  3. 變換對函數的影響。

**學習階段：** 4

**學習單位：** 函數及其圖像

**所需教材：** 試算表軟件如微軟 *Excel(cellphone.xls)*，計算機和工作紙

- 預備知識：**
- (1) 認識函數的概念
  - (2) 使用符號代表數量及函數
  - (3) 認識函數不同的表示方式(符號、表列和圖像)

**教學內容：**

1. 教師可先跟學生複習函數的概念，也可留待完成工作紙 1 後才進行複習。
2. **【工作紙 1】** (函數的概念)

教師將工作紙 1 派給學生，然後與學生討論在給出的手機服務月費計畫中，有沒有出現函數的關係？其中，哪一個是獨立變數？哪一個是應變數？

教師可引導學生從一個量的值是否「決定」另一個量的值並給出唯一的一個值<sup>1</sup>(即只能是一對應一或多對應一，但不可以是一對應多)的關係思考。

---

<sup>1</sup>參考教師注意事項 5

## 3. 【工作紙 2】（函數不同的表示方式）

- (a) 活動 2.1 列出手機計畫的部分收費，教師可要求學生提出一個符合給定的收費表而又清楚描述任何分鐘用量的收費計畫（稱為完整的「收費函數」），並用圖像表示該完整的收費函數。
- (b) 教師著學生完成工作紙 2 活動 2.1 後，可與學生討論他們提供的答案，從而歸納出不同的收費方式如分段收費不變、分段線性增加收費、連續平滑增加收費及其組合<sup>2</sup>等等都可以是符合給出的表列數值。從而透過手機例子讓學生更清楚函數定義的一般性（例如不限於以數式表示或是否連續等等）和限制（例如不能一對多）。
- (c) 活動 2.2 是讓學生對函數定義以及對函數不同的表示方式有更深刻的體會。這可作為教師引導學生討論的部分。教師可再與學生討論用其他不同的表示方式，例如以表列和代數式表達該函數，以探討各表示方式的優點和缺點。這一部分較為抽象，教師可選擇性取用及印發給學生。

## 4. 【工作紙 3】（變換對函數的圖像的影響）

- (a) 工作紙 3 是透過手機例子讓學生更了解變換對函數影響的實用性。函數變換可作為解讀手機優惠例子的一個模型，反過來說，手機優惠例子可作為一個函數變換的範例。這同樣可加深學生對函數變換的概念和引起他們對學習函數變換的興趣。
- (b) 活動 3.1 給出某手機計畫的收費函數圖像和表列部分收費值，而在工作紙中並沒有提供<sup>3</sup>收費函數的代數式（即符號表示方式）。

教師指示學生利用試算表軟件微軟 *Excel* 開啟檔案 *cellphone.xls* 去完成工作紙（或核對答案），從而探究不同的收費計畫代表對函數的不同變換及其在圖像上的影響。

<sup>2</sup>參考教師注意事項 8

<sup>3</sup>參考教師注意事項 11

- (c) 待學生完成活動 3.1 後，教師可邀請學生展示他們的答案，並引用活動 3.2 的表格整理及總結活動 3.1 的探究結果，即不同的手機優惠對應不同的函數變換。教師可指出不同的優惠是否影響獨立變數或應變數及影響是什麼等，從而引導學生分辨變換為  $f(x+h)$  或  $f(x)+k$  等等。
- (d) 最後教師可以給予學生函數變換的代數式，然後問學生對應的手機優惠（例如  $F\left(\frac{x}{m}-k\right)$  表示什麼？）以評估學生的理解程度。
- (e) 對能力稍弱的學生，教師可將活動 3.1[A] - [D] 分開使用。著學生完成[A]後，先討論答案，再輔以其他例子跟進，讓學生明白後才做[B]，然後是[C]和[D]。最後才用活動 3.2 的表格再整理及總結一次。

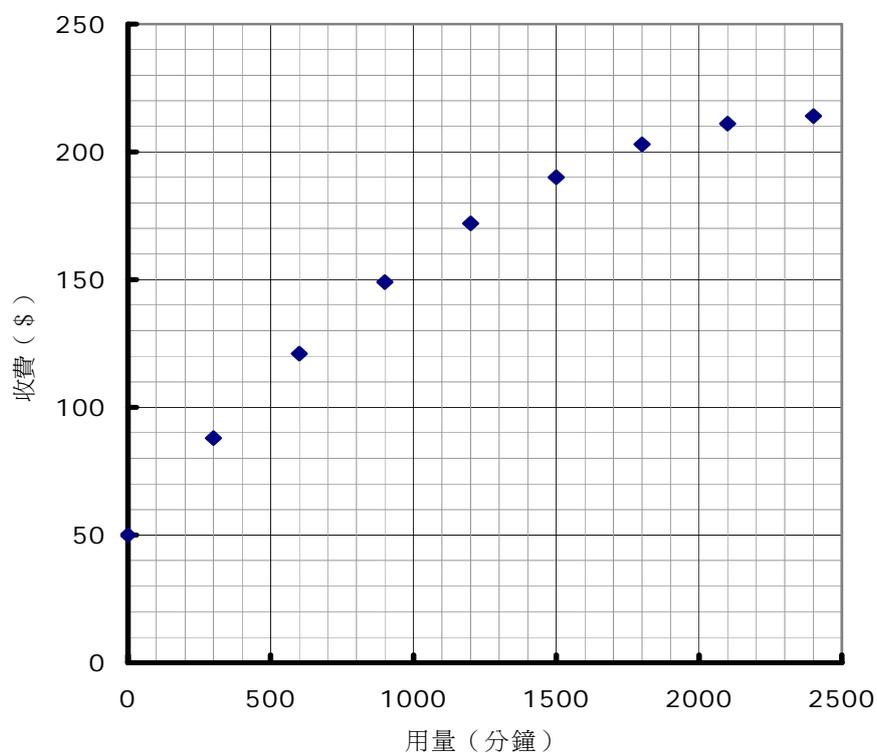
## 背景

一個手機服務月費計畫按如下方式收費：

用量(分鐘)	0	300	600	900	1200	1500	1800	2100	2400
收費(元)	50	88	121	149	172	190	203	211	214

圖像表示如下：

手機服務月費計畫



現在有關的手機公司提供以下的優惠計畫：

[A] 每月  $m$  元回贈；

[B]  $r\%$  折扣；

[C]  $n$  分鐘免費；

[D] 用量增長  $p\%$  (例如用量增長  $10\%$  表示  $300$  分鐘的收費的實際用量為  $330$  分鐘)。

## 工作紙 1

一個手機服務月費計畫按如下方式收費：

用量(分鐘)	0	300	600	900	1200	1500	1800	2100	2400
收費(元)	50	88	121	149	172	190	203	211	214

1. 參考以上的手機服務月費計畫，收費是用量的函數嗎？試簡述原因。

---

---

---

---

---

---

---

---

2. 如果收費是用量的函數，哪一個是獨立變數？哪一個是應變數？

---

---

---

---

---

---

---

---

## 工作紙 2

### 活動 2.1

一個手機服務月費計畫按如下方式收費：

用量(分鐘)	0	300	600	900	1200	1500	1800	2100	2400
收費(元)	50	88	121	149	172	190	203	211	214

1. 上面的月費計畫只列出部分收費（例如沒有列出 250 分鐘的收費）。試提出一個符合以上的手機服務月費收費表的完整的收費函數（即一個清楚描述任何用量的收費計畫）。

---



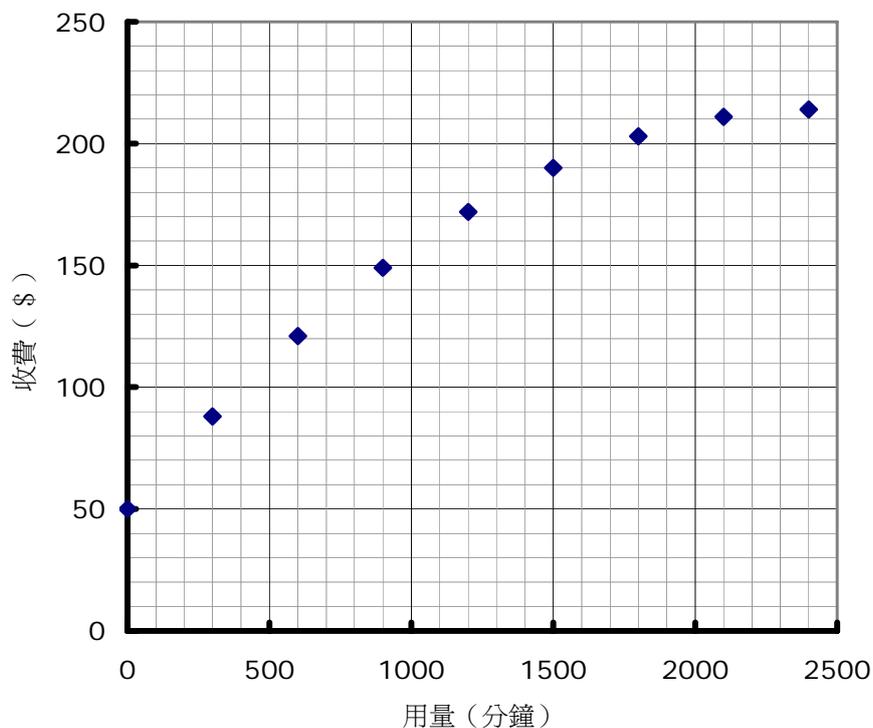
---



---

2. 試在以下的直角坐標平面內畫出你提出的收費函數的圖像。

手機服務月費計畫



---

**活動 2.2 (老師引導討論的部分)**

1. (a) 根據你提出的收費函數，如果用量是 1050 分鐘，收費是多少？

---

- (b) 根據你提出的收費函數，如果用量是 48 000 分鐘，收費是多少？

---

2. 試在以下的表格內寫下你提出的收費函數。

用量(分鐘)					...
收費(\$)					...

3. 試寫下你提出的收費函數的公式。

---

4. 在回答以上問題時，你有困難嗎？試簡述之，並把造成困難的原因寫下。

---

---

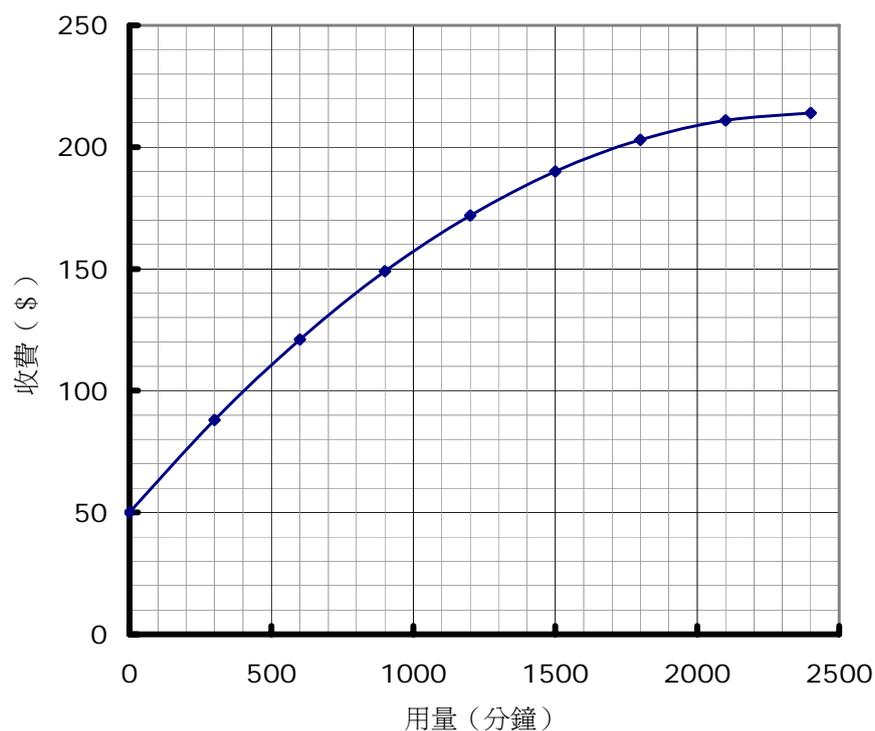
---

## 工作紙 3

### 活動 3.1

以下是某一個收費函數圖像及其部分數值的表列式。

#### 手機服務月費計畫



用量(分鐘)	收費(\$)
0	50
300	88
600	121
900	149
1200	172
1500	190
1800	203
2100	211
2400	214

在以下的表格和圖內分別填上和畫出各對應優惠計畫的服務月費收費，並用試算表檔案 *cellphone.xls* 驗證答案。

[A] 每月  $m$  元回贈

1. 在表格內填上優惠收費：

(a)  $m = 40$

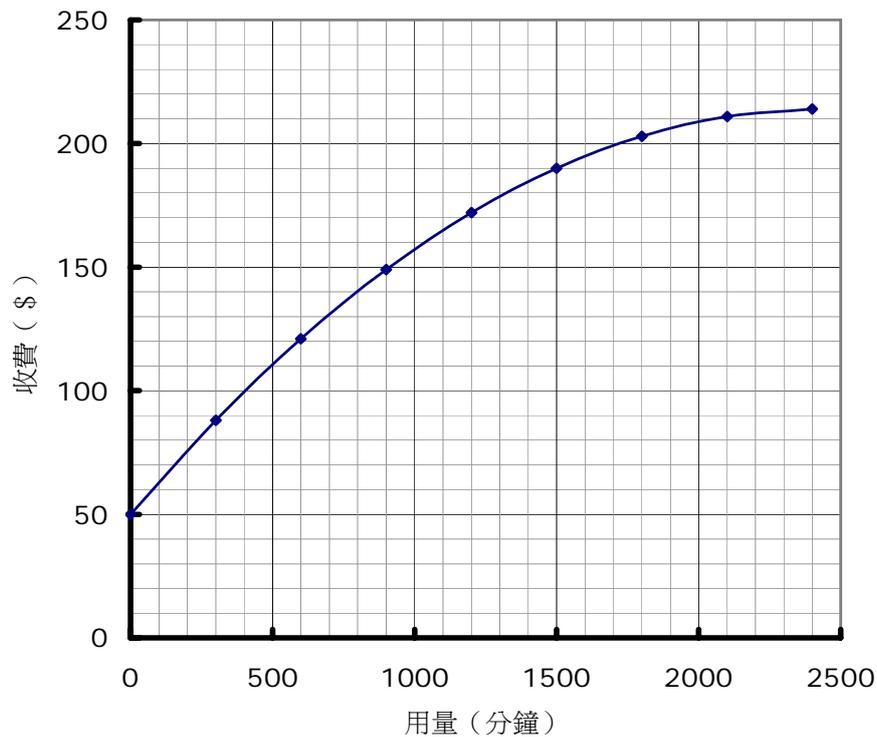
用量 (分鐘)	原來收費(\$)	優惠收費(\$)
0	50	
600	121	
1200	172	
1800	203	
2400	214	

(b)  $m = 20$

用量 (分鐘)	原來收費(\$)	優惠收費(\$)
0	50	
600	121	
1200	172	
1800	203	
2400	214	

2. 在圖內畫出對應的新收費圖像：

### 手機服務月費計畫



3. 每月 20 元和每月 40 元回贈分別所對應的圖像跟原來收費的圖像有什麼改變？

4. 試猜測每月 20 元和每月 40 元回贈的收費函數與原來的收費函數  $F$  的關係。

[B]  $r\%$  折扣

1. 在表格內填上優惠收費（準確至整數）：

(a)  $r = 50$

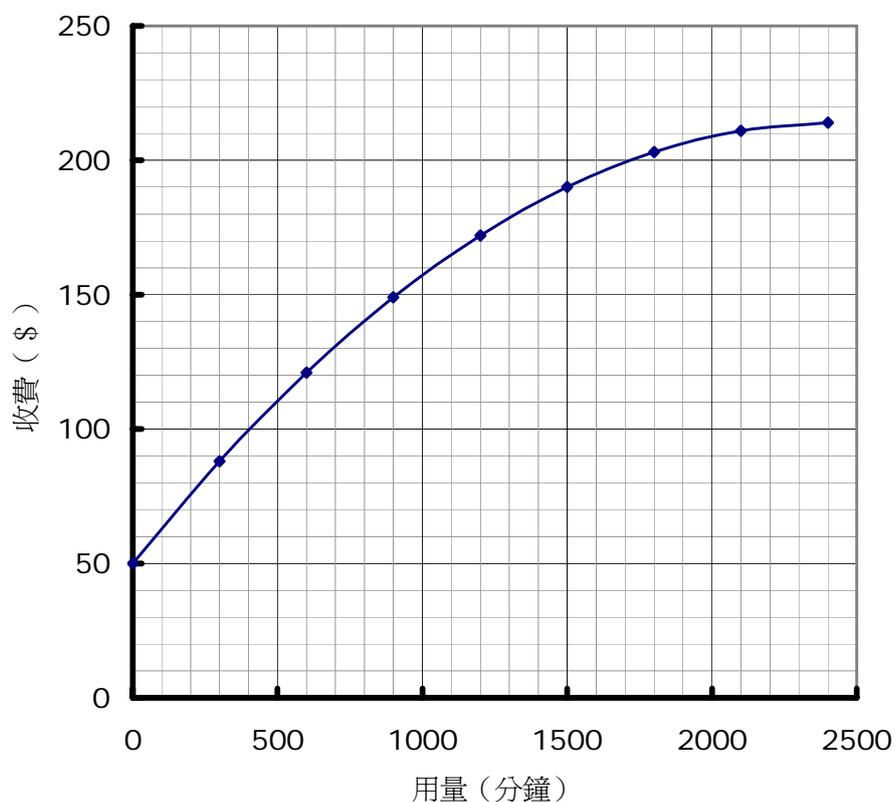
用量 (分鐘)	原來收費(\$)	優惠收費(\$)
0	50	
600	121	
1200	172	
1800	203	
2400	214	

(b)  $r = 20$

用量 (分鐘)	原來收費(\$)	優惠收費(\$)
0	50	
600	121	
1200	172	
1800	203	
2400	214	

2. 在圖內畫出對應的新收費圖像：

### 手機服務月費計畫



3. 每月 20% 和每月 50% 月費折扣分別所對應的圖像跟原來收費的圖像有什麼改變？

4. 試猜測每月 20% 和每月 50% 月費折扣的收費函數與原來的收費函  $F$  數的關係。

[C]  $n$  分鐘免費

1. 在表格內填上優惠收費：

(a)  $n = 600$

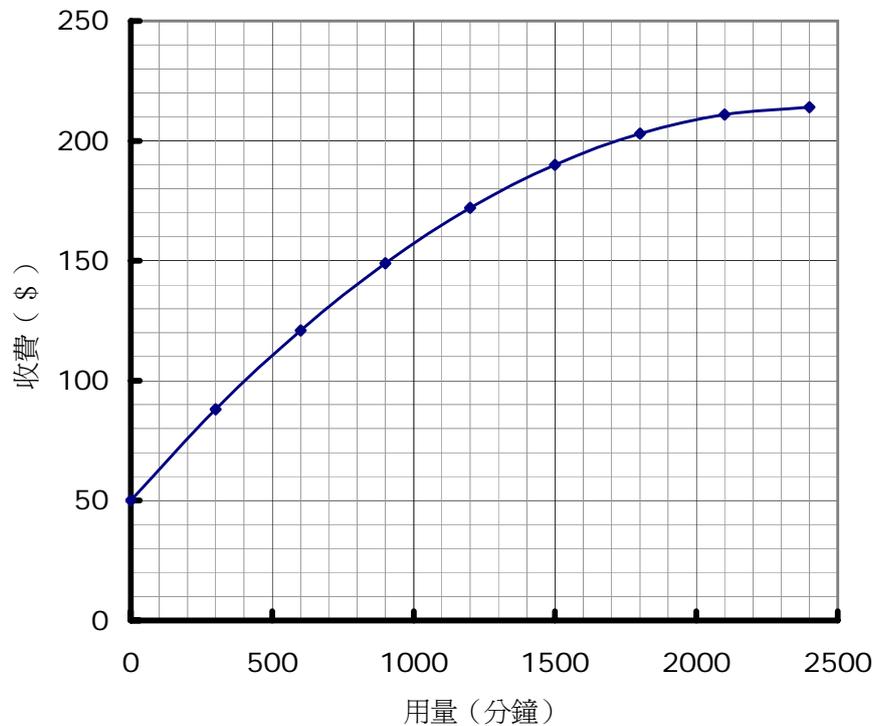
用量 (分鐘)	原來收費(\$)	優惠收費(\$)
0	50	
600	121	50
1200	172	
1800	203	172
2400	214	

(b)  $n = 300$

用量 (分鐘)	原來收費(\$)	優惠收費(\$)
0	50	
600	121	88
1200	172	
1800	203	190
2400	214	

2. 在圖內畫出對應的新收費圖像：

### 手機服務月費計畫



3. 每月首 300 分鐘和首 600 分鐘免費分別所對應的圖像跟原來收費的圖像有什麼改變？

4. 每月首 300 分鐘和首 600 分鐘免費的收費函數與原來的收費函數  $F$  的關係。

[D] 用量增長  $p\%$

(例如用量增長 20% 表示原來 300 分鐘的收費的實際可用量為 360 分鐘；用量增長 50% 表示原來 300 分鐘的收費的實際可用量為 450 分鐘，餘此類推。)

1. 在表格內填上優惠收費：

因為填寫原表較煩瑣費時，可改填下表。

(a)  $p = 50$

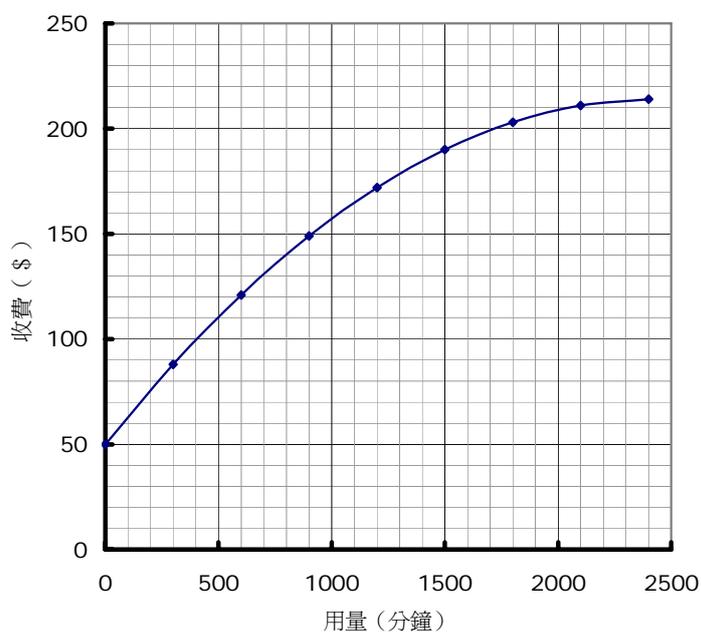
用量 (分鐘)	原來用量 (分鐘)	優惠收費 (\$)
0	0	50
450	300	88
	600	121
	1200	172
	1800	203
	2400	214

(b)  $p = 20$

用量 (分鐘)	原來用量 (分鐘)	優惠收費(\$)
0	0	50
	300	88
	600	121
1540	1200	172
	1800	203
	2400	214

2. 在圖內畫出對應的新收費圖像：

手機服務月費計畫



3. 每月用量增長 20% 和每月用量增長 50% 分別所對應的圖像跟原來收費的圖像有什麼改變？

4. 試猜測每月用量增長 20% 和每月用量增長 50% 的收費函數與原來的收費函數  $F$  的關係。

## 活動 3.2

1. 如果每月手機用量是  $x$  分鐘，收費則是  $F(x)$  元，我們稱  $F$  是「收費函數」。完成下表。

優惠計畫	直接受影響的是 獨立變數 $x$ 還是 應變數 $F(x)$	以 $F$ 表示對應的函 數變換
[A] 每月 $m$ 元回贈		
[B] $r\%$ 折扣		
[C] 首 $n$ 分鐘免費		
[D] 用量增長 $p\%$		

2. (a) 試寫下  $0.6F(x)$  對應什麼優惠計畫？

---



---

- (b) 試寫下  $F(x-100)-20$  對應什麼優惠計畫？

---



---

- (c) 試寫下  $F\left(\frac{x}{1.2}\right)-20$  對應什麼優惠計畫？

---



---



---

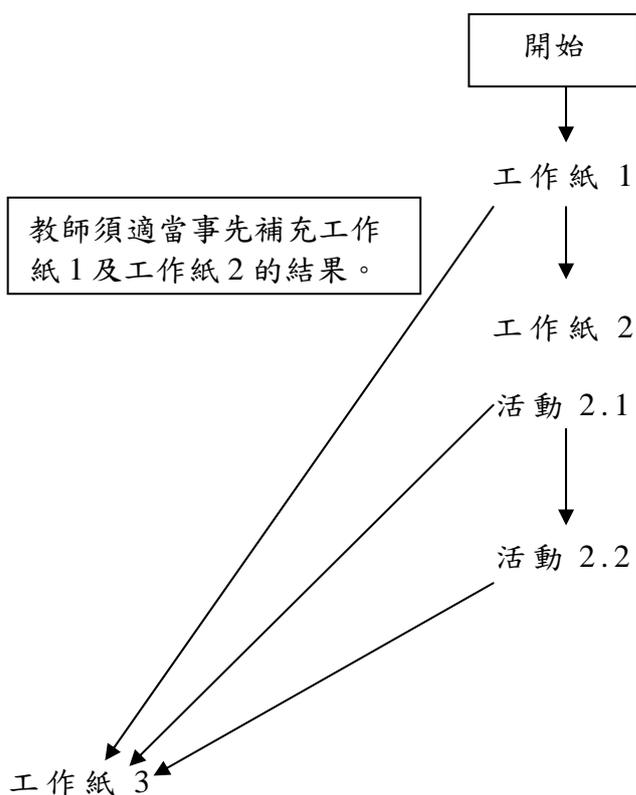


---

**教師注意事項：**

**【一般事項】**

1. 現實中的手機收費計畫一般只有數種形式，而且通常收費模式不是一個連續函數。教師宜了解例子中的計畫及工作紙中的收費計畫可能未必與一般現實處境相同，然而，這未嘗不可讓學生體驗以數學模型去了解日常生活的例子。
2. 建議工作紙的使用次序：



3. 建議時數：

工作紙 1 + 函數概念的討論	約 20 分鐘
工作紙 1 + 工作紙 2	約 35 分鐘
工作紙 3	約 80-100 分鐘

**【工作紙 1】**

4. 工作紙 1 的作用是希望透過日常生活中學生較為熟悉的例子，使學生更明白函數的意義及獨立變數和應變數的分別，並加強他們對函數概念的認識。

5. 教師須提醒學生一個量「決定」另一個量的值並該值是唯一的情況，並不表示兩者之間一定有日常生活中所理解的因果關係。所以收費是用量的函數，用量也可以是收費的函數。

教師可在適當的時機和空檔，和學生討論用量和收費作為獨立變數和應變數的角色可是否可以對調。答案是開放的，因應收費的函數是一對一(例如連續平滑增加收費)還是多對一(例如分段收費不變)而有所不同，前者的答案是可以而後者是不可以。

另外，因為  $x$  是  $y$  的函數並不意味  $y$  是  $x$  的函數，所以，教師應該避免使用如「 $x$  對應  $y$ 」、「 $x$  與  $y$  的函數關係」等字眼。

6. 工作紙 1 的答案

1. 收費是用量的函數。因為在這一個固定的收費計畫下，用量唯一地決定了收費。
2. 用量是獨立變數，收費是應變數。

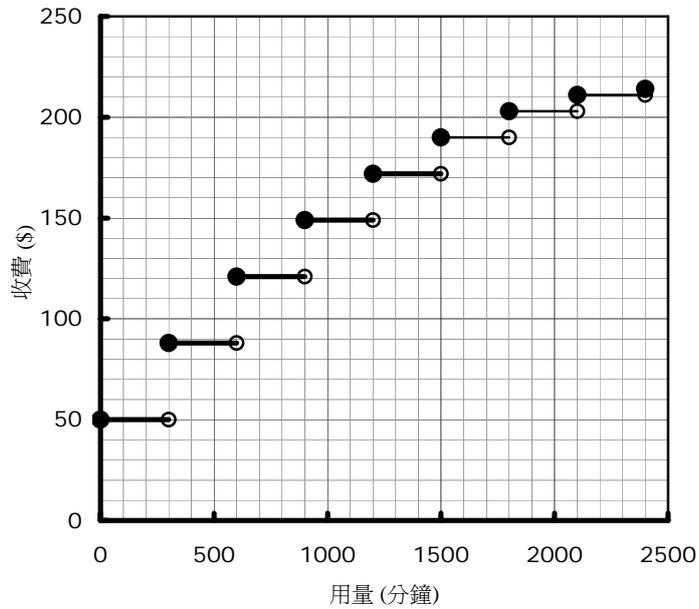
### 【工作紙 2】

7. 在完成工作紙 2 的過程中，教師宜多討論如何決定點與點之間和圖像範圍以外的點的不同收費方式。

8. 活動 2.1 的答案並不是唯一的，以下是一些可能的答案。教師宜指出實心點與空心點的意義和差異。

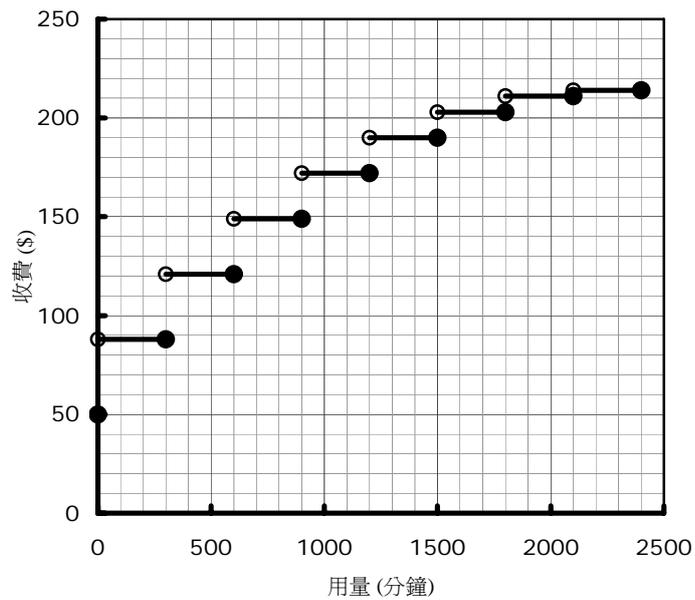
向前分段收費不變

手機服務月費計畫



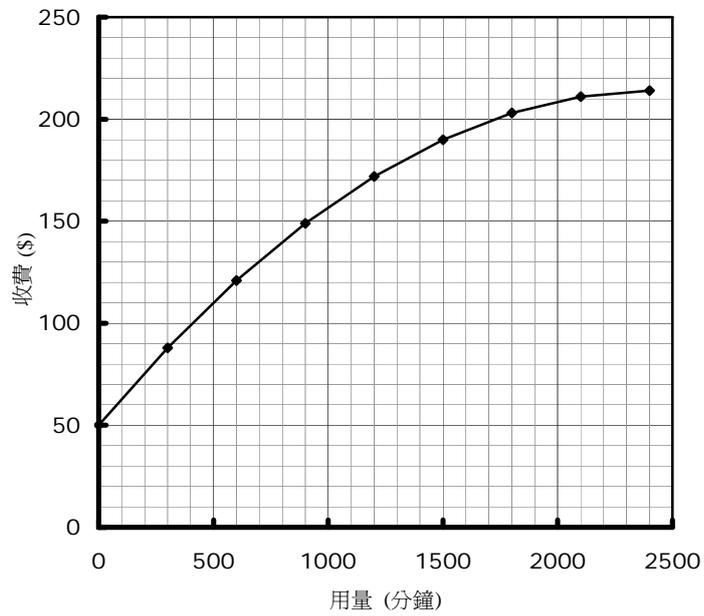
向後分段收費不變

手機服務月費計畫



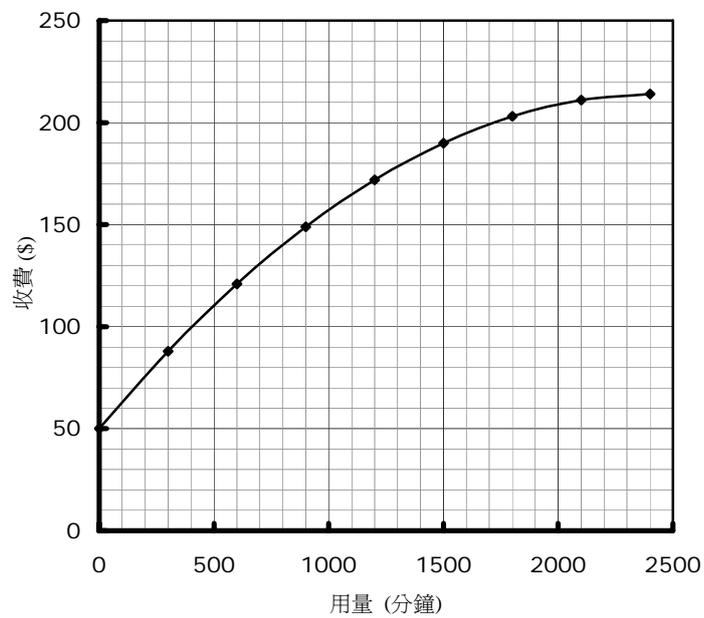
分段線性增加收費（用直線連接相鄰的點）

手機服務月費計畫

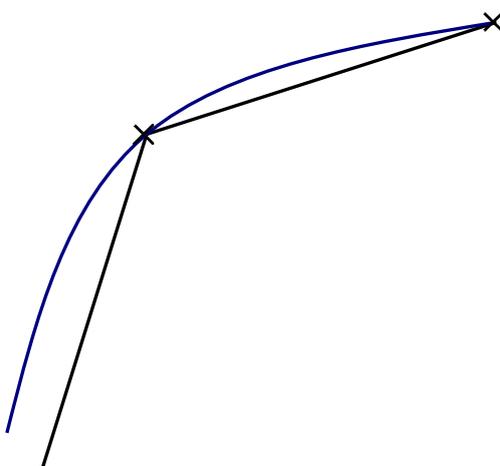


連續平滑增加收費（用平滑曲線連接各點）

手機服務月費計畫



留意分段線性增加收費和連續平滑增加收費的圖像很相近，但放大垂直軸後可看出分別，下面是兩圖重疊並放大後其中一段。



9. 以下為活動 2.2 的一些參考答案。如教師提出下面答案中的代數式，學生未必能理解此種表達方式，教師宜略為解釋。

向前分段收費不變

表列

用量 (分鐘)	$0 \leq x < 300$	$300 \leq x < 600$	$600 \leq x < 900$	$900 \leq x < 1200$	...
收費 (\$)	50	88	121	149	...

代數式

$$F(x) = \begin{cases} 50 & \text{當 } 0 \leq x < 300 \\ 88 & 300 \leq x < 600 \\ 121 & 600 \leq x < 900 \\ 149 & 900 \leq x < 1200 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

向後分段收費不變

表列

用量 (分鐘)	$x = 0$	$0 < x \leq 300$	$300 < x \leq 600$	$600 < x \leq 900$	$900 < x \leq 1200$	...
收費 (\$)	50	88	121	149	172	...

代數式

$$F(x) = \begin{cases} 50 & \text{當 } x = 0 \\ 88 & 0 < x \leq 300 \\ 121 & 300 < x \leq 600 \\ 149 & 600 < x \leq 900 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

分段線性增加收費

較難以表列完全寫出所有用量及收費的數值。但部分數值可列舉如下：

用量(分鐘)	150	300	450	600	750	900	1050
收費(\$)	69	88	104.5	121	135	149	160.5

代數式

$$F(x) = \begin{cases} \frac{88-50}{300-0}(x-0)+50 & \text{當 } 0 \leq x < 300 \\ \frac{121-88}{600-300}(x-300)+88 & 300 \leq x < 600 \\ \frac{149-121}{900-600}(x-600)+121 & 600 \leq x < 900 \\ \frac{172-149}{1200-900}(x-900)+149 & 900 \leq x < 1200 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

連續平滑增加收費

較難以表列完全寫出所有用量及收費的數值。但部分數值可列舉如下：

用量(分鐘)	150	300	450	600	750	900	1050
收費(\$)	69.625	88	105.125	121	135.625	149	161.125

代數式

$$F(x) = 50 + \frac{81}{2} \left( \frac{x}{300} \right) - \frac{5}{2} \left( \frac{x}{300} \right)^2, \text{ 其中 } 0 \leq x \leq 2400$$

註：

(如有時間及學生能力許可，教師可與學生討論該公式背後「多用多慳」的想法。至於推導公式須牽涉較深的理論(表列的數值其實給出了一個二階差分方程， $F(x)$ 是方程的解)，教師不宜要求學生導出，也不必教授。)

10. 教師應注意學生並不一定能寫出他們圖像的完整表列和對應的代數式，甚至不易找出對應的代數式。答案並不重要，最重要是讓學生了解不同表示方式的用處和局限。

【工作紙 3】

11. 工作紙 3 的收費函數的代數式假設為

$$F(x) = 50 + \frac{81}{2} \left( \frac{x}{300} \right) - \frac{5}{2} \left( \frac{x}{300} \right)^2, \text{ 其中 } 0 \leq x \leq 2400. \text{ 留意 } x \text{ 是不可能大於 } 31 \times 24 \times 60 = 44\,640.$$

12. 本示例假設當用量是 0 分鐘時，收費是 \$50。原因是一般的服務計畫都會收取最低收費。在常見現實生活服務計畫，無論一個人有沒有使用的服務，只要他加入該計畫，多要交最低服務費。

在 [C] 因著收取最低收費，即使有 300 分鐘免收費通話時間，一個人仍須為首 300 分鐘通話付款。

## 13. 活動 3.1 的建議答案：

[A] 每月  $m$  元回贈

1.

(a)  $m = 40$ 

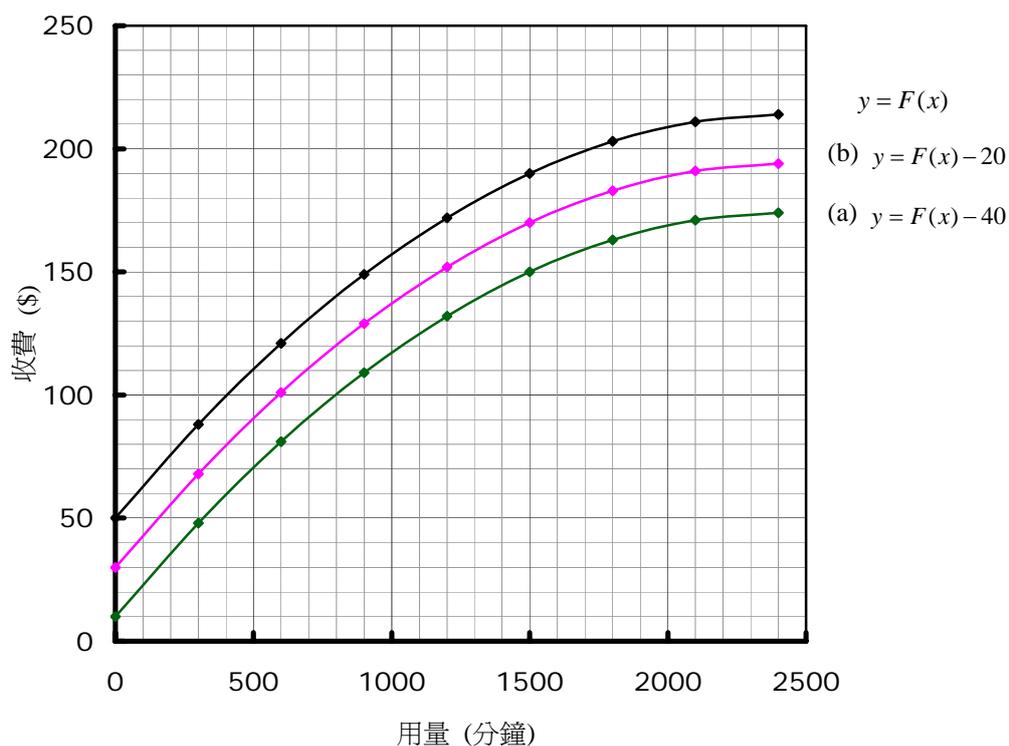
用量 (分鐘)	原來收費(\$)	優惠收費(\$)
0	50	10
600	121	81
1200	172	132
1800	203	163
2400	214	174

(b)  $m = 20$ 

用量 (分鐘)	原來收費(\$)	優惠收費(\$)
0	50	30
600	121	101
1200	172	152
1800	203	183
2400	214	194

2.

## 手機服務月費計畫



3. 每月 20 元和每月 40 元回贈的圖像分別是原來收費的圖像下移 20 和 40 單位。
4. 每月 20 元和每月 40 元回贈的收費函數分別是  $F(x) - 20$  和  $F(x) - 40$ 。<sup>4</sup>

<sup>4</sup> 正確來說，每月 20 元回贈的收費函數是  $G$ ，其中  $G(x) = F(x) - 20$ 。

[B]  $r\%$  折扣

1.

(a)  $r = 50$

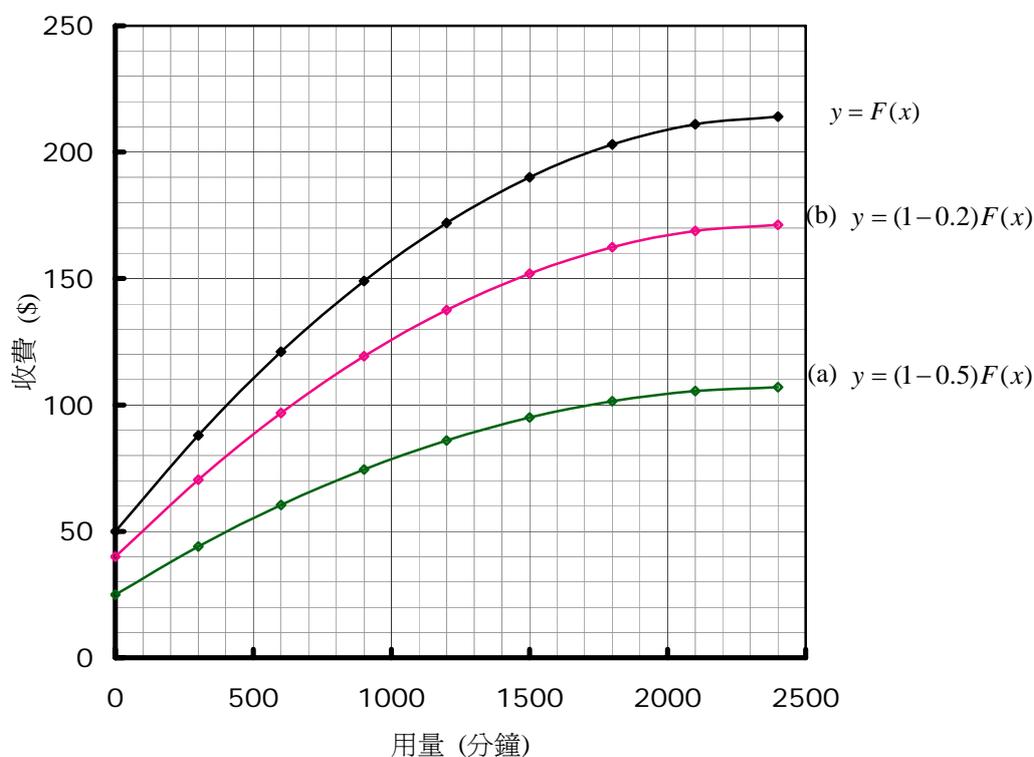
用量 (分鐘)	原來收費(\$)	優惠收費(\$)
0	50	25
600	121	60.5
1200	172	86
1800	203	101.5
2400	214	107

(b)  $r = 20$

用量 (分鐘)	原來收費(\$)	優惠收費(\$)
0	50	40
600	121	96.8
1200	172	137.6
1800	203	162.4
2400	214	171.2

2.

手機服務月費計畫



- 每月 20% 和每月 50% 月費折扣的圖像分別是原來收費的圖像高度的 80% 和 50%。
- 每月 20% 和每月 50% 月費折扣的收費函數分別是  $0.8F(x)$  和  $0.5F(x)$ 。<sup>5</sup>

<sup>5</sup>正確來說，每月 20% 月費折扣的收費函數是  $G$ ，其中  $G(x) = 0.8F(x)$ 。

[C]  $n$  分鐘免費

因為原先在  $-300 \leq x < 0$  的範圍內  $F$  並未定義，變換後在 0 分鐘時的優惠收費也就未確定，而  $y = F(x-300)$  的圖像在  $0 \leq x < 300$  亦沒有對應的曲線。一個合理的假設是基本收費為 50 元，所以下表有\*\*的部分及下圖水平直線的部分並不完全代表  $F(x-300)$ 。

1.

(a)  $n = 600$ 

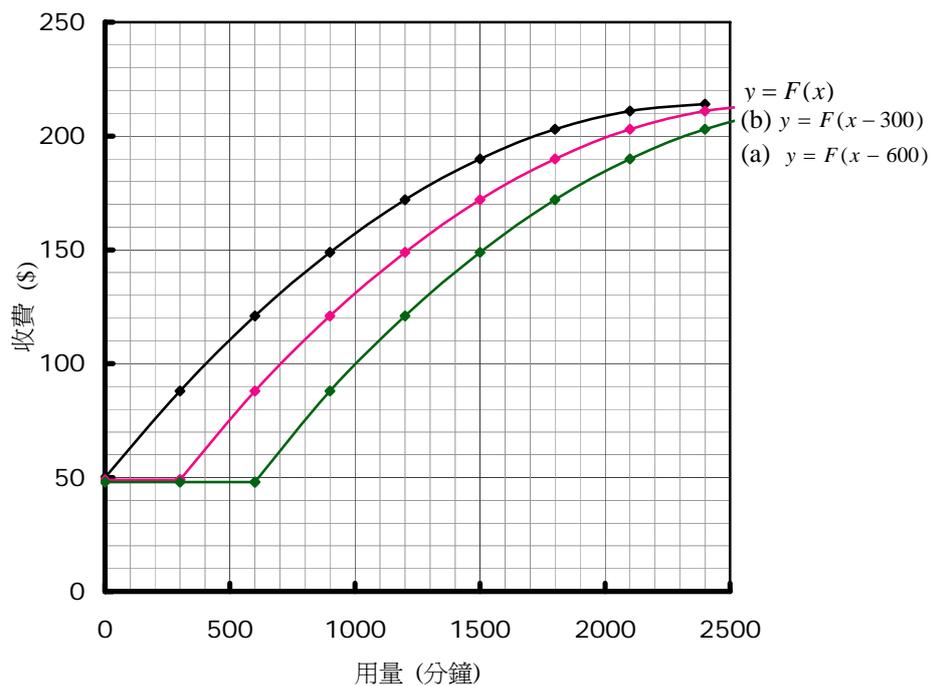
用量 (分鐘)	原來收費(\$)	優惠收費(\$)
0	50	50**
600	121	50
1200	172	121
1800	203	172
2400	214	203

(b)  $n = 300$ 

用量 (分鐘)	原來收費(\$)	優惠收費(\$)
0	50	50**
600	121	88
1200	172	149
1800	203	190
2400	214	211

2.

## 手機服務月費計畫



- 每月首 300 分鐘和首 600 分鐘免費的圖像分別是原來收費的圖像右移 300 和 600 單位。
- 每月首 300 分鐘和首 600 分鐘免費的收費函數分別是  $F(x-300)$  和  $F(x-600)$ 。<sup>6</sup>

<sup>6</sup> 正確來說，每月首 300 分鐘免費的的收費函數是  $G$ ，其中  $G(x) = F(x-300)$ ，或  $G(x) = F(x-600)$ ，但分別不包括 0-300 分鐘及 0-600 分鐘。

[D] 用量增長  $p\%$

(例如用量增長 20% 表示原來 300 分鐘的收費的實際可用量為 360 分鐘；用量增長 50% 表示原來 300 分鐘的收費的實際可用量為 450 分鐘，餘此類推。)

1.

(a)  $p = 50$

用量 (分鐘)	原來用量 (分鐘)	優惠收費 (\$)
0	0	50
450	300	88
900	600	121
1800	1200	172
2400	1800	203
3600	2400	214

(b)  $p = 20$

用量 (分鐘)	原來用量 (分鐘)	優惠收費 (\$)
0	0	50
360	300	88
720	600	121
1540	1200	172
2160	1800	203
2880	2400	214

若選用原有計畫內的用量，計出優惠收費的方法較困難。建議方法如下：

從實際用量先算出對應的新收費用量，例如實際用量是 300 分鐘，在 1.(a) 對應收費用量是  $300 \div 120\% = 300 \div 1.2 = 250$  分鐘，然後從原來的圖像中讀出對應的收費是 82 元。計算結果如下表：

1. (a)  $p = 50$

用量 (分鐘)	原來收費(\$)	優惠收費(\$)
0	50	50
300	88	75.9
600	121	99.6
900	149	121.0
1200	172	140.2
1500	190	157.2
1800	203	172.0
2100	211	184.6
2400	214	194.9

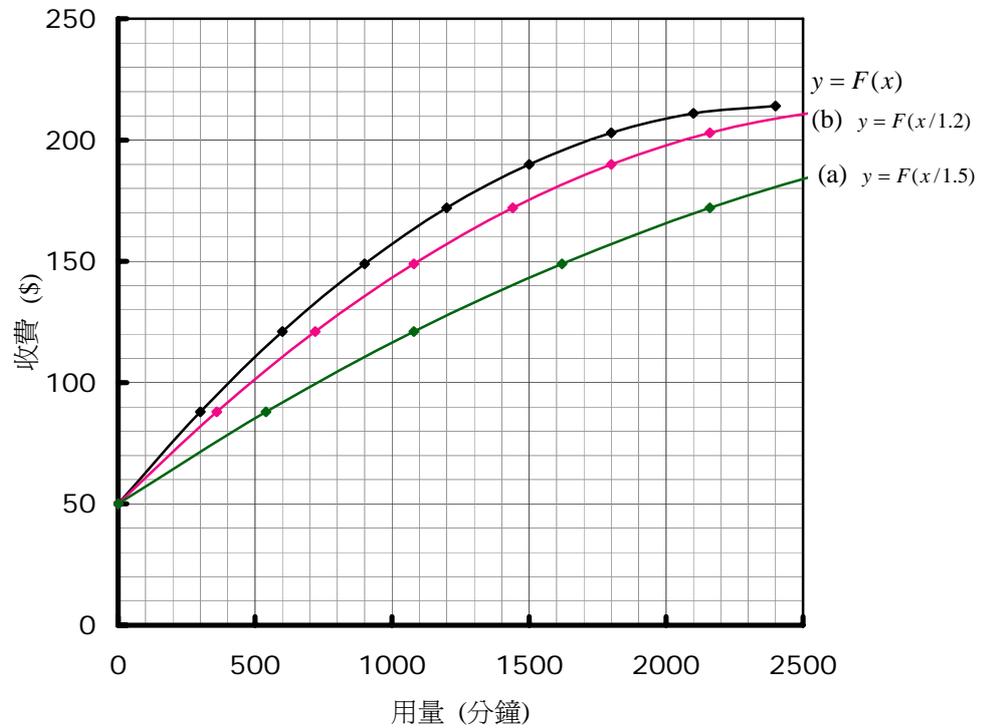
(b)  $p = 20$

用量 (分鐘)	原來收費(\$)	優惠收費(\$)
0	50	50
300	88	82.0
600	121	110.6
900	149	135.6
1572	172	157.2
1753	190	175.3
1900	203	190.0
2012	211	201.2
2089	214	208.9

此計算方法較煩瑣，故此工作紙只取用第一題(a)及(b)改變用量的表格。

2.

## 手機服務月費計畫



3. 每月用量增長 20% 和每月用量增長 50% 的圖像分別是原來收費的圖像長度伸展 20% 和 50%。
4. 每月用量增長 20% 和每月用量增長 50% 的收費函數分別是  $F\left(\frac{x}{1.2}\right)$  和  $F\left(\frac{x}{1.5}\right)$ 。<sup>7</sup>

<sup>7</sup>正確來說，每月用量增長 20% 的的收費函數是  $G$ ，其中  $G(x) = F\left(\frac{x}{1.2}\right)$ 。

## 14. 活動 3.2 的答案：

1. 如果每月手機用量是  $x$  分鐘，收費則是  $F(x)$  元，我們稱  $F$  是「收費函數」。

優惠計畫	直接受影響的是 獨立變數 $x$ 還是應變數 $F(x)$	以 $F$ 表示對應的 函數變換
[A] 每月 $m$ 元回贈	$F(x)$	$F(x) - m$
[B] $r\%$ 折扣	$F(x)$	$(1 - r\%)F(x)$
[C] 首 $n$ 分鐘免費	$x$	$F(x - n)$
[D] 用量增長 $p\%$	$x$	$F\left(\frac{x}{1 + p\%}\right)$

2. (a)  $0.6F(x)$  代表六折收費。
- (b)  $F(x - 100) - 20$  代表先免首 100 分鐘用量的費用，再回贈 20 元。例如用量 0 分鐘收費 30 元；用量 400 分鐘收費 68 元；用量 700 分鐘收費 101 元。
- (c)  $F\left(\frac{x}{1.2}\right) - 20$  代表先將用量增長 20%，以計算出來的用量收費，再回贈 20 元。例如用量 0 分鐘收費 30 元；用量 300 分鐘收費 62 元；用量 360 分鐘收費 68 元。

15. 教師宜留意變換對直線函數的影響是十分容易引起混淆的。在直線的圖像上，並不容易分辨上下平移和左右平移，換言之，學生較難比較線性函數  $f(x)$  的  $f(x) + k$  與  $f(x + k)$  在圖像上的分別。在多項式函數（包括直線和二次函數）的圖像上，也不容易分辨沿  $y$  軸方向的伸縮和沿  $x$  軸方向的伸縮，換言之，學生較難比較多項式函數  $f(kx)$  與  $kf(x)$  在圖像上的分別。

16. 本示例參考資料來源：

"You Make the Call", Algebraic Thinking Math Project.

[http://www.pbs.org/teachersource/mathline/lessonplans/atmp/call/call\\_procedure.shtml](http://www.pbs.org/teachersource/mathline/lessonplans/atmp/call/call_procedure.shtml)

17. 教師亦可利用軟件 Winplot 或 Graphmatica 等繪圖軟件與學生探討變換對函數的代數式及圖像的影響。

18. 網址(進一步資料)

(a) <http://illuminations.nctm.org/mathlets/grapher/index.htm/>

(b) <http://www.mathsnet.net/graphs/findfunction.html>

(c) <http://math.Exeter.edu/rparris/winplot.html>

(d) <http://graphmatica.com>