

示例二： 函數的基本概念（二）

- 目標**：
1. 聯繫「輸入 - 處理 - 輸出」的概念與應變數及獨立變數的關係；
 2. 認識函數的例子及反例；
 3. 能從函數的表列和符號方面來理解函數的基本概念及函數中假變數的含義。

學習階段： 4

學習單位： 函數及其圖像

所需教材： 工作紙、可連接互聯網的電腦

- 預備知識**：
- (1) 使用代數符號代表數字
 - (2) 理解代數語言並懂得代入法

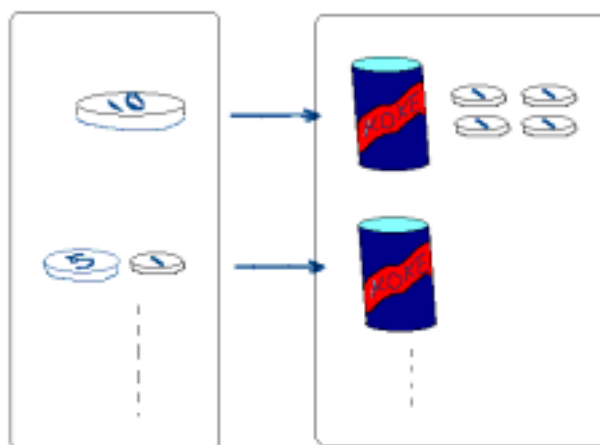
教學內容：

- 1.(a) 教師宜先透過日常生活例子⁽²⁾，與學生討論函數中「獨立變數決定應變數」或「輸入 - 處理 - 輸出」中「輸入決定輸出」的概念。在討論過程中，不一定需要提及「獨立變數」或「應變數」等詞彙。

例子 1 - 汽水自動販賣機(設販賣機只出售一款 6 元的汽水，投入的硬幣只能是 1 元或以上的硬幣而退出的零錢只會是 1 元硬幣)。

以例子說明，在正常的情况下，當確定「投入的硬幣」後，「出來的東西」必是固定的：「投入 1 個 10 元硬幣，必跑出 1 罐汽水和 4 個 1 元」；「投入 1 個 5 元和 1 個 2 元硬幣，必跑出 1 罐汽水和 1 個 1 元」等。

教師可利用圖像描述輸入和輸出的關係，例如：



- (b) 教師可透過「函數」的英文名稱 'function' 的本來含義 - 「機能」(或「功能」)以說明：所謂「函數」⁽³⁾，可視為從輸入的東西，以確定輸出的東西的一種「機能」。這種機能有一個特點，相同的輸入，不會得到不同的輸出。因此，當自動販賣機「出來的東西」完全被「投入的硬幣」所確定時，我們便可把自動販賣機中「出來的東西」說成為「投入的硬幣」的函數。如果我們用 f 表示這函數，則上圖中的例子可分別表為：

$$f(\text{10 元硬幣一個}) = \text{一罐汽水和 4 個 1 元硬幣}$$

$$f(\text{1 個 5 元硬幣和 1 個 1 元硬幣}) = \text{一罐汽水}$$

討論問題可包括：

- (i) 投入 1 個 5 元硬幣和 1 個 2 元硬幣，出來的東西會是什麼？怎樣運用函數符號表示兩者的關係？
 - (ii) 要出來的東西是 1 罐汽水和 4 個 1 元，投入的東西是否只能是 1 個 10 元硬幣？
 - (iii) 現實生活裡的汽水自動販賣機(例如校內的汽水機)⁽⁴⁾，「出來的東西」是否為「投入的硬幣」的函數呢？
- (c) 例子 2 - 日期與星期數。
事件發生的日期(年月日)能決定事件發生在星期幾，故星期數是日期(年月日)的函數。

討論問題可包括：

- (i) 日期(年月日)是星期數的函數嗎？為什麼？
- (ii) 沒有確定年份，單單月日能確定星期數嗎？

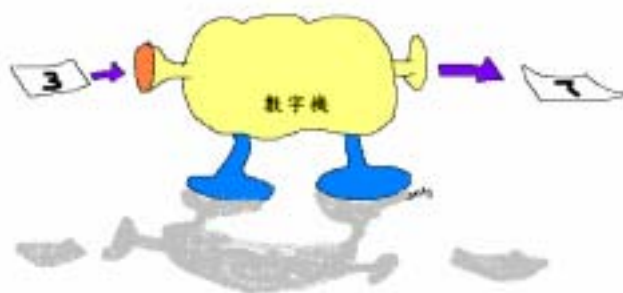
(d) 例子 3 - 班內學生的姓名與學號。

在一班之內，即使有姓名相同的學生，只憑學號便能正確地找出特定的學生。故此，學生姓名是學號的函數。

討論問題可包括：

- (i) 學號是學生姓名的函數嗎？為什麼？
- (ii) 人是姓名的函數嗎？為什麼？

2. 教師引入數字機的概念（可於黑板貼出有關圖畫），並解釋它的基本運作原理。當把一張寫有一個數字的字條輸入這機器後，機器會便會輸出印有一個數字的字條，這個輸出的數字，完全取決於輸入的數字⁽⁵⁾。換句話說，輸入的數字相同，輸出的數字便不會不一樣。教師可舉例（例如，運作機能為「輸出值 = 輸入值 + 4」的數字機）說明有關原理，並著學生以表列方式紀錄輸入和輸出的數字。



教師分發工作紙給學生，並著他們獨自完成問題 1 及 2。

3. 教師與學生討論問題 1 及 2 的答案⁽⁶⁾，數字機 1 號運作機能的符號表達和其輸出值與輸入值的關係。例如，對數字機 1 號來說，如果我們用 x 表輸入值，則按給出的數字機運作機能，我們得悉輸出的會是 $x + 5$ 。另一方面，若我們用 f 表有關的函數，則當輸入值為 x 時，輸出值將為 $f(x)$ 。因此，

$$f(x) = x + 5 \text{ 。}$$

教師須強調兩點：

- (a) 輸入值不限於一固定的數，故 x 所表示的是一變數，而非一個固定或未知數；
- (b) 我們不一定用 ' x ' 表示輸入值，例如，我們可用 ' y ' 表示輸

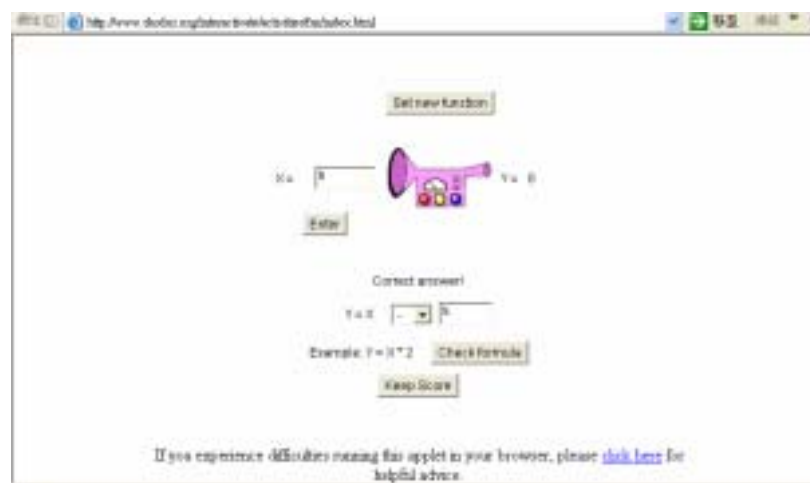
入值，這時候，運作機能則應表為：

$$f(y) = y + 5 \quad .$$

接著，教師可著學生以符號語言說出工作紙 1 中的數字機 2 號的運算功能。

4. 教師可著學生分組，每組有 2 個同學。每人先寫下一個數字機的運算功能，運算功能只能牽涉最多兩個運算步驟。每人輪流說出一個數，作為對方數字機的輸入值，對方須把輸出值說出來。能最先正確地說出對方數字機的運算功能者勝出。教師亦可利用以下網頁內的數字機，讓全班同學一起參與競猜運算功能的活動：

<http://score.kings.k12.ca.us/lessons/functions/machine.html>



5. 教師著學生和同組組員討論工作紙 1 中的問題 3 及 4⁽⁶⁾。

工作紙：函數的基本概念

問題：

1. 數字機 1 號的運作機能是：

$$\text{輸出值} = \text{輸入值} + 5$$



(a) 完成下列數字機 1 號的輸入和輸出紀錄表：

輸入值	輸出值
3	8
4	
6	
	20
	4

(b) 解釋數字機 1 號的輸出值為甚麼是其輸入值的函數。
 如果我們用 f 表這個函數，試用此符號表示上述紀錄表中
 輸入值和輸出值的關係(例如: $f(3) = 8$)。

2. 以下是數字機 2 號的輸入和輸出紀錄表：



輸入值	輸出值
2	6
4	12
0	0
-3	-9
-12	-36

試猜測數字機 2 號的運作機能。

如果我們用 g 表這個函數，試用此符號表示上述紀錄表中輸入值和輸出值的關係(例如: $g(2) = 6$)。

3. 超級數字機和數字機一樣，輸入一張字條，它也會輸出一張字條，但字條上的，不再限於數字。而輸出的符號，是否完全取決於輸入的符號，也不得而知。以下是三部超級數字機的輸入和輸出紀錄表，試判斷哪台超級數字機中的輸出值肯定不會是輸入值的函數，並加解釋：



超級數字機 1 號

輸入值	輸出值
-4	-4
-2	-2
0	0
2	2
4	4

超級數字機 2 號

輸入值	輸出值
-4	A
-2	A
0	A
2	A
4	A

超級數字機 3 號

輸入值	輸出值
1	A
1	B
1	A
1	B
1	A

4. 設數字機 3 號中，輸出值為輸入值 x 的函數 h ，且

$$h(x) = x^2 + 1$$

(a) 填上數字機 3 號的輸出值：

輸入值	輸出值
- 2	
- 1	
0	
1	
2	

(b) 已知輸出值為 10，我們能確定其輸入值嗎？為什麼？

(c) 在數字機 3 號中，“輸入值”是“輸出值”的函數嗎？為什麼？

教師注意事項：

1. 本示例活動約需時 35-45 分鐘。
2. 在第一節的討論，教師可視乎學生背景知識及能力，選用其他例子解釋函數的概念。例如，姓名與香港身份證號碼，包裹重量與其郵資，一個人與他的生日日期，或著學生舉出其他函數的例子，詳細討論可參閱示例三。
3. 老師提到「函數」這名稱時，可交代「函數」是‘function’的中譯。一般相信，「函數」這中譯是出自清代數學家李善蘭的手筆，有關李的背景，可參考：

<http://www.dyu.edu.tw/~mfht206/history/19/china.htm>

當時，「函」與「含」兩字互通，李把‘function’譯作「函數」，取其有「含有變量」的意思。用李的話說，「凡式中含天，為天之函數」（「天」、「地」、「人」、「物」是當時表示未知數或變量的 4 個字）；「凡此變數中函彼變數，則此為彼之函數」（此為李對‘If the variable quantity contains another variable quantity, then the former is a function of the latter’之中譯）。因此，函數不是一個數。今天，我們知道，函數是一種特定的對應（correspondence）或關係（relation）（今天函數的概念不是一蹴而就的，它的歷史發展，可參閱 Kleiner, 1989）。事實上，有人（如台大劉福增）建議，‘function’應譯作「函應」而非「函數」。

4. 日常所見的汽水自動販賣機，除了投入硬幣外，一般還須按汽水選擇的按鈕。因此，單單由投入的硬幣，是不能決定輸出的東西的。在這情況下，「出來的東西」便不是「投入的硬幣」的函數。
5. 這裡不宜把輸出的數字描述為輸入數字經過運算後所得的結果。因為這會誤導學生，讓他們以為函數的輸出值必須通過計算得到。這會對他們了解常數函數，構成障礙。（有關學生對常數函數特別感到困難的研究，可參考 Markovits, Eylon, & Bruckheimer (1986)。）

6. 工作紙內各問題的答案：

1(a)

輸入值	輸出值
3	8
4	9
6	11
15	20
-1	4

(b) 因為輸入值相同，輸出值便不會不同。

$$f(4) = 9$$

$$f(6) = 11$$

$$f(15) = 20$$

$$f(-1) = 4$$

2. 例如：輸出值 = 3 × 輸入值。

$$g(4) = 12$$

$$g(0) = 0$$

$$g(-3) = -9$$

$$g(-12) = -36$$

3. 只有超級數字機 3 號的輸出值肯定不會是輸入值的函數。因為輸入值不能完全決定輸出值。

4.(a)

輸入值	輸出值
- 2	5
- 1	2
0	1
1	2
2	5

(b) 不能夠，因為當輸入值為 3 及 - 3 時，輸出值都是 10。

(c) 不是。因為，從(b)可見，輸出值不能完全決定輸出值。

參考書目：

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept. *The college Mathematics Journal*, 20(4), 282-300.

Markovits, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics*, 6(2), 18-28.

劉福增 (2003). 《邏輯思考》. 台北：心理出版社。