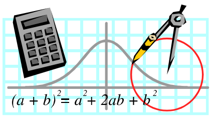


示例四：
函數的不同表示方法：
表列、符號和圖像（一）

目　標　：1. 探究數字規律
2. 聯繫初中數列「輸入－處理－輸出」的概念與應變數及獨立變數的關係
3. 從函數的圖像、表列和符號方面來進一步理解函數的基本概念

學習階段　：4

學習單位　：函數及其圖像

所需教材　：工作紙、可連接互聯網的電腦

預備知識　：(1) 使用代數符號代表數字
(2) 理解代數語言並懂得代入法
(3) 在直角坐標平面上繪畫函數的圖像
(4) 理解函數的定義

教學內容　：

1. 教師與學生重溫數列的概念，並派發工作紙，著學生完成問題 1。

2. 教師待學生完成後，說明數列的項數與項值之間的關係可透過數字機的運作方式來模擬，並藉此講解「輸入－處理－輸出」的概念。由此，與學生重溫函數的概念，並與學生討論問題 1 中的數列：
(a) 項值是否項數的函數？
(b) 該函數的代數式是甚麼？
(c) 該函數的輸入值有沒有限制？

3. 教師由數列輸入值的限制，帶出一般高中常見函數都以實數為輸入值的分別，並要求學生完成工作紙之問題 2(a)-(c)及問題

3(a)-(c)。教師與學生總結工作紙的答案。

4. 教師說明兩個量（即問題 2 和問題 3 中的 x、y）的關係可透過圖像、表列和符號來表示。
   (a) 表列只顯示部分 x、y 的值；
   (b) 圖像表示方式則涵蓋較多及連續的 x、y 值；
   (c) 代數式更能全面表達 x、y 兩個量的關係。

   教師指出以 $f(x)$或 $T(n)$分別代表以 x 或 n 的輸入值（自變數）的函數等號記法。在總結工作紙第 1 題(d)部，教師可進一步解釋 n 為變數的概念及其在 $T(3)$、$T(10)$ 及 $T(99)$的意義。

5. 教師著學生完成問題 2(d)及問題 3(c)及(d)，以讓學生進一步熟習函數的記法。對能力較佳的學生，教師可討論 $f(a)$，$f(a+1)$內函數的假變數的意義。

工作紙：函數的圖像、表列和符號

問題：

1. 考慮數列 4，8，12，16，...。

   (a) 試估計該數列第 5 項和第 6 項的可能項值。

   第 5 項的項值＝___________

   第 6 項的項值＝___________

   (b) 在下表中寫出該數列的第 5 項至第 10 項的可能項值。

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
項值	4	8	12	16						

   (c) 試以 n 代表「項數」，與組員一起找出一條包含 n 的代數式去表示該數列，並以 $T(n)$ 表示，即

   $T(n)$＝________________，

   利用此公式求：

   第 3 項的項值 $T(3)$＝________________；

   第 10 項的項值 $T(10)$＝________________；

   第 99 項的項值 $T(99)$＝________________。

   (d) 如果給出項數，可以決定它的項值嗎？___________________

   (e) 數列的項值是否其項數的函數？_________________________

2. 以下是一台數字機。對於每個輸入值 x，它都給出唯一一個輸出值 y（換言之，對於兩個相同的輸入，它不會給出兩個不同的輸出）。

以下是該數字機的輸入和輸出紀錄表：

輸入值 x	-5	-4	0	1	3	4.2
輸出值 y	-15	-12	0	3	9	12.6

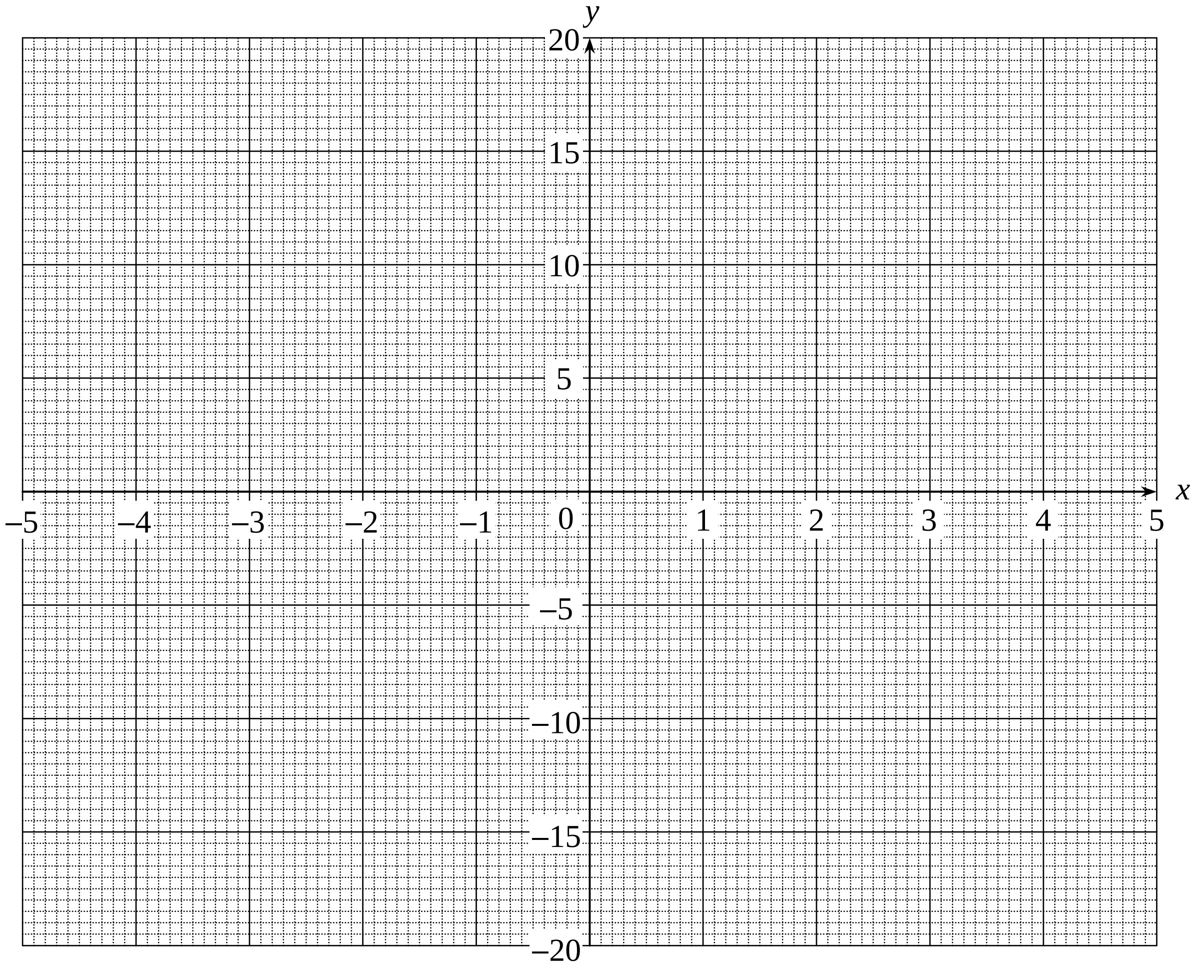
(a) 與你的組員合作，猜測上述數字機的運作模式及以代數式表示有關的函數（即輸入值和輸出值的關係式，例如：$y = 2x + 3$）。

____

(b) 在(a)部中，我們憑若干個的輸入值和輸出值的組合，估計出該數字機的一般運作模式。假設這個關係式正確，只要給出任意一個輸入值，便可以輕易地找出輸出值。當輸入值是 1.5 時，輸出值是：

____

(c)(i)試在以下的直角坐標平面上，利用所給的輸入和輸出紀錄表，把(a)部中的關係式所對應圖像繪畫出來。



(ii)利用所得的圖像，讀出當輸入值是 4.5 時對應的輸出值。

____

(iii)對於任何一個輸入值 x，有多少個對應的輸出值 y？

____

(iv)輸出值(y)是輸入值(x)的函數嗎？

____

(d) (i) 假設(a)部中所得的關係式為 $y = f(x)$，

則 $f(x) =$ ______________。

(ii) 利用以上函數的記法，完成下表：

x	$f(x) =$ __________
-1000	$f($ $) =$ ______________________ $=$ __________
-0.5	$f($ $) =$ ______________________ $=$ __________
11	$f($ $) =$ ______________________ $=$ __________
73.4	$f($ $) =$ ______________________ $=$ __________
x	$f($ $) =$ ______________________ $=$ __________
a	$f($ $) =$ ______________________ $=$ __________
$a+1$	$f($ $) =$ ______________________ $=$ __________

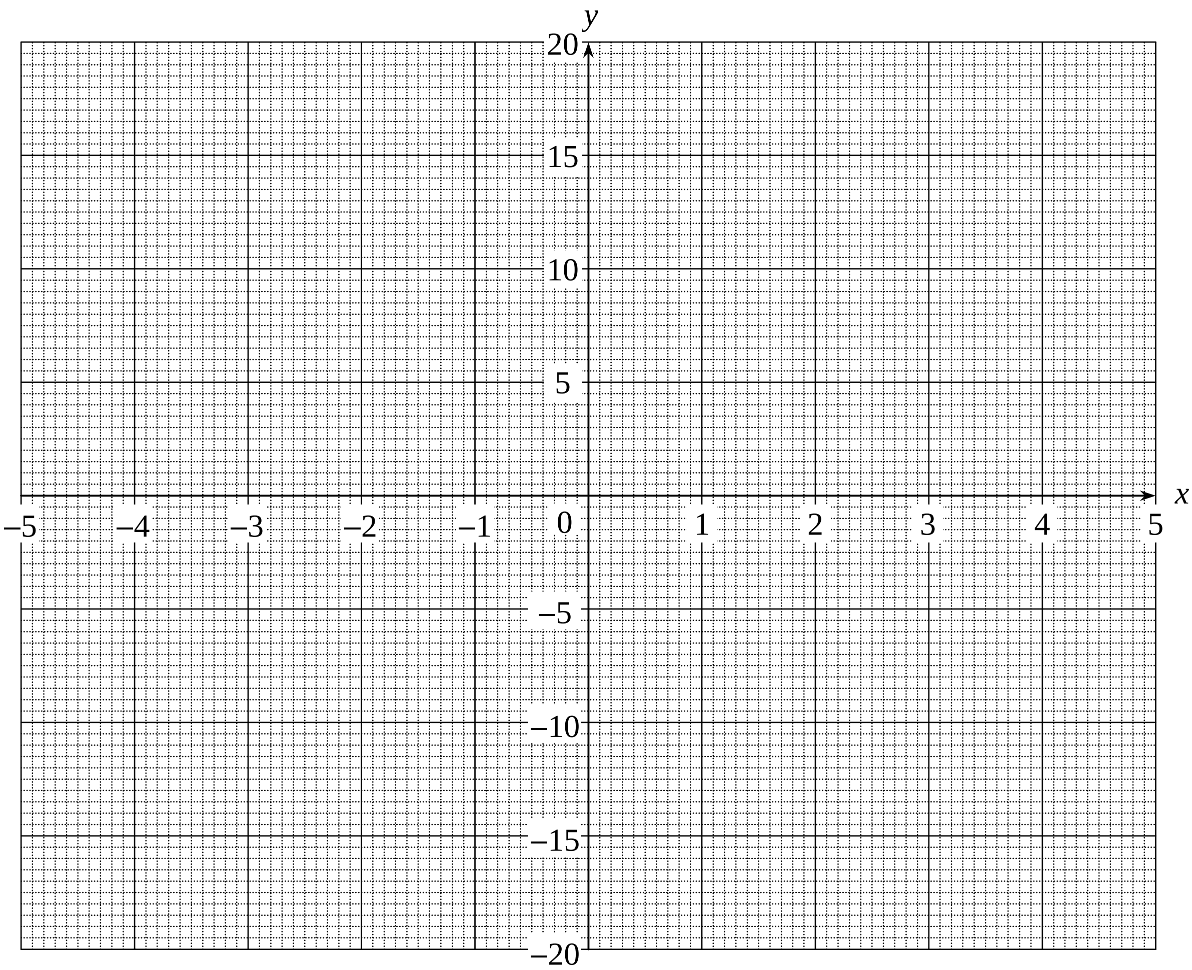
3. 以下是另一台數字機的輸入和輸出紀錄表：

輸入值 x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
輸出值 y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

(a) 與你的組員合作，猜測上述數字機的運作模式及以代數式表示函數關係（即輸入值和輸出值的關係式，例如：$y = 2x + 3$）。

____

(b)(i) 試在以下的直角坐標平面上，利用所給的輸入和輸出紀錄表，把(a)部中的關係式所對應圖像繪畫出來。



(ii) 對於任何一個輸入值 x，有多少個對應的輸出值 y？

____

(iii) 由圖像或表列值，輸出值 y 是輸入值 x 的函數嗎？

____

(iv) 若 $y = g(x)$，則 $g(x) =$ __________________。

(c) 按(b)的代數式，完成下表。

x	$g(x) =$ ____________
–100	$g($ $\qquad\qquad$ $) =$ ______________________ $=$ __________
–2.3	$g($ $\qquad\qquad$ $) =$ ______________________ $=$ __________
3.15	$g($ $\qquad\qquad$ $) =$ ______________________ $=$ __________
1050	$g($ $\qquad\qquad$ $) =$ ______________________ $=$ __________

教師注意事項：

1. 本示例活動約需時 60 分鐘。

2. 部分學生在圖像繪畫方面可能遇上困難，教師在學生嘗試工作紙 1 問題 2(c)時可稍加指引。

3. 部分學生對函數符號產生誤解。例如：認為 $f(x)=f\cdot x$ 等。本示例由實在的例子開始逐步引入函數的記號，而並非直接定義符號 $f(x)$。教師亦可透過工作紙 1 內 $T(3)$、$T(10)$等及工作紙 2 內 $f(3)$、$f(11)$等深化學生對 $f(x)$符號的意義。教師亦可利用示例六 “容易混淆的函數概念”再深入與學生討論一般函數 f，$f(a+b)$ 是否等於 $f(a)+f(b)$等問題。

4. 教師與學生討論函數的表示方法，宜帶出不同表示方法的局限性，如
   (a) 表列只能顯示不連續的變數的值。
   (b) 圖像則能涵蓋更闊的數量值，但是卻只局限圖像所顯 x、y 的區域內。出了區域外，便無從得知兩個變量之間的關係。
   (c) 符號較能全面表示函數的關係．然而由現實生活得出的數量往往沒有給出符號表示而須多種工具求其符號表示。

5. 工作紙建議答案如下：

1. (a) 第 5 項的項值＝20
   第 6 項的項值＝24

(b)

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
項值	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

(c) $T(n)=4n$

第 3 項的項值 $T(3)=12$；

第 10 項的項值 $T(10)=40$；

第 99 項的項值 $T(99)=396$。

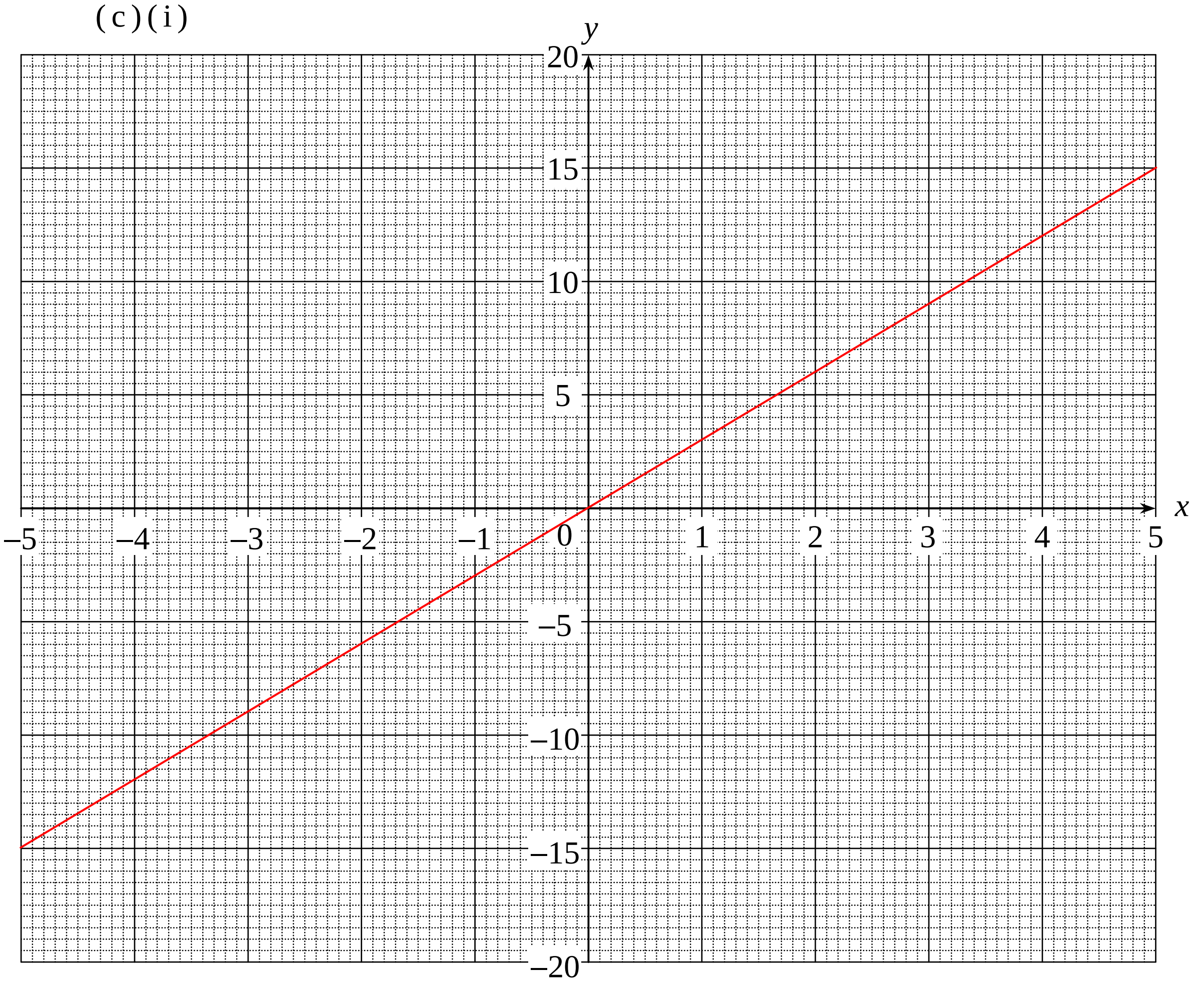
(d) 可以。

(e) 是。

2. (a) $y = 3x$

(b) 輸出值=3(1.5)=4.5

(c)(i)



(ii) 13.5。

(iii) 一個。

(iv) 是。

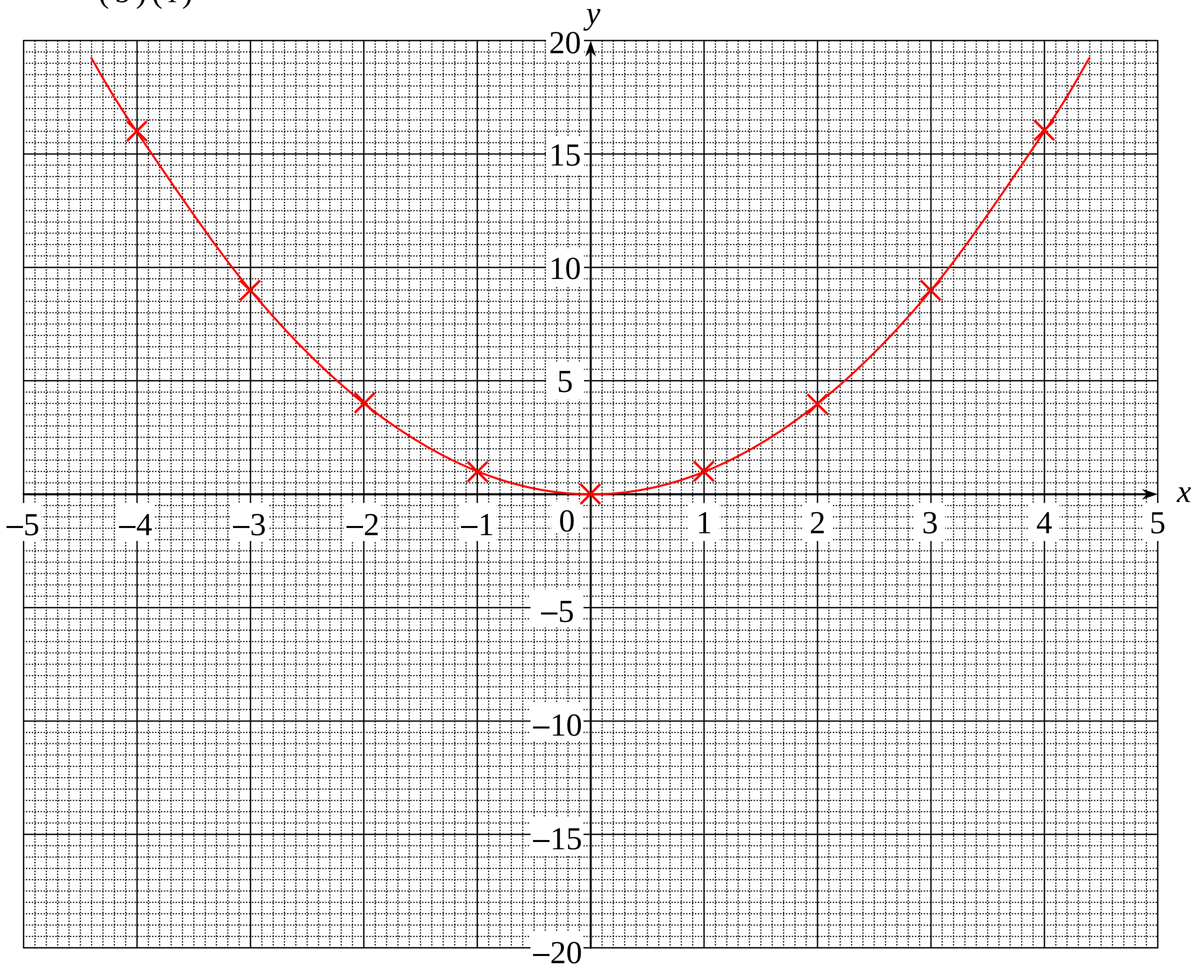
(d)(i) $f(x) = 3x$。

(ii)

x	$f(x) = 3x$
-1000	$f(-1000) = 3\times(-1000) = -3\,000$
-0.5	$f(-0.5) = 3\times(-0.5) = -1.5$
11	$f(11) = 3\times(11) = 33$
73.4	$f(73.4) = 3\times(73.4) = 220.2$
x	$f(x) = 3\times(x) = 3x$
a	$f(a) = 3\times(a) = 3a$
$a+1$	$f(a+1) = 3\times(a+1) = 3a+3$

3. (a) $y = x^2$

(b)(i)



(ii) 一個。

(iii) 是。

(iv) 若 $y = g(x)$，則 $g(x) = x^2$。

(c)

x	$g(x) = x^2$
-100	$g(-100) = (-100)^2 = 10\ 000$
-2.3	$g(-2.3) = (-2.3)^2 = 5.29$
3.15	$g(3.15) = (3.15)^2 = 9.9225$
1050	$g(1050) = (1050)^2 = 1\ 102\ 500$