

示例五：

函數的不同表示方法：

表列、符號和圖像（二）

目標： 利用不同的例子比較和了解不同的函數表示

學習階段： 第四學習階段

學習單位： 函數及其圖像

所需教材： 工作紙和計算機

預備知識： 函數的概念

教學內容：

1. 教師幫助學生重溫函數的基本概念和函數的表列、符號和圖像表示。
2. 教師指示學生研究工作紙 1 問題 1 的「函數」。教師須提醒學生必先弄清所給予的是函數。這樣可以鞏固學生對函數概念的了解。
3. 教師指示學生完成工作紙 1 內的(a)，(b)和(c)部。
4. 學生分成小組比較他們的答案並討論。一部分組別會向全班同學匯報。教師須在適當時候提出評語和指引。
5. 學生完成問題 1 後，教師帶領學生討論如何用迭代法在問題 2 建立表列和圖像表示；並藉驗證數列的首幾項向學生演示給出的代數表示是正確的。
6. 做工作紙 1 時，教師須引導學生明白和欣賞不同的函數表示方式的好處及了解其局限，其中包括：

(a) 現實生活中兩個變量的關係往往是從變量的表列值逐步

求其符號表示式。表列只能顯示不連續的變數值，它並不能全面反映兩個變量所有的值及其關係。

- (b) 函數的圖像表示往往是由表列值開始，再由圖像點的趨勢猜測有關量的符號表示式。它比對表列式能涵蓋更多的數量值，但是卻只局限圖像所顯示的 x 、 y 區域內。出了所示的區域，便無從得知兩個變量之間的關係。
- (c) 一般而言，以符號表示函數能較全面表示兩個量(變數)的關係。然而由現實生活得出的數值，其關係往往欠缺符號表示而須運用多種工具才能求得其符號表示(如第 2 題的裴波那契數列的通項)。在求輸出值/輸入值時，用符號式比由圖像得出的值較準確但亦可能較費時及不易求得輸出值(如第 2 題求第 11 項的值由表列值較由符號計算容易；但在第 1 題運用符號表示求值，則並不困難)。

7. 學生分成小組並討論工作紙 2 問題 1 表 2.1 的(a)及(b)。
8. 教師邀請學生向全班同學匯報答案。如果學生不能給出正確的答案或者未能提出恰當的理由去解釋答案，教師可以給予提示、指引和例子引導。如在判斷一個關係是否函數時，要留意問題給出的條件和函數的基本定義，其中包括：
 - (a) 由表列的數值討論“ y 是 x 的函數”時，只能按已知表列內的每一 x 值是否只給出唯一的 y 值。除此之外，便無法判斷它們是否具有函數關係。例如，在問題 1 表 2.1 中，當 x 為整數(且在給出的範圍內)， y 是 x 的函數；但當 x 為實數時，則不能確定 y 是否 x 的函數。
 - (b) 再者，即使在該區域內，“ y 是 x 的函數”亦不一定“ x 是 y 的函數”。
9. 教師要求完成問題 1 其他部分並核對答案。
10. 教師指示學生完成問題 2 及 3，教師由此再運用函數的概念，協助學生理解如何從給出的代數(符號)及圖像判斷“ y 是 x 的函數”及“ x 是 y 的函數”。

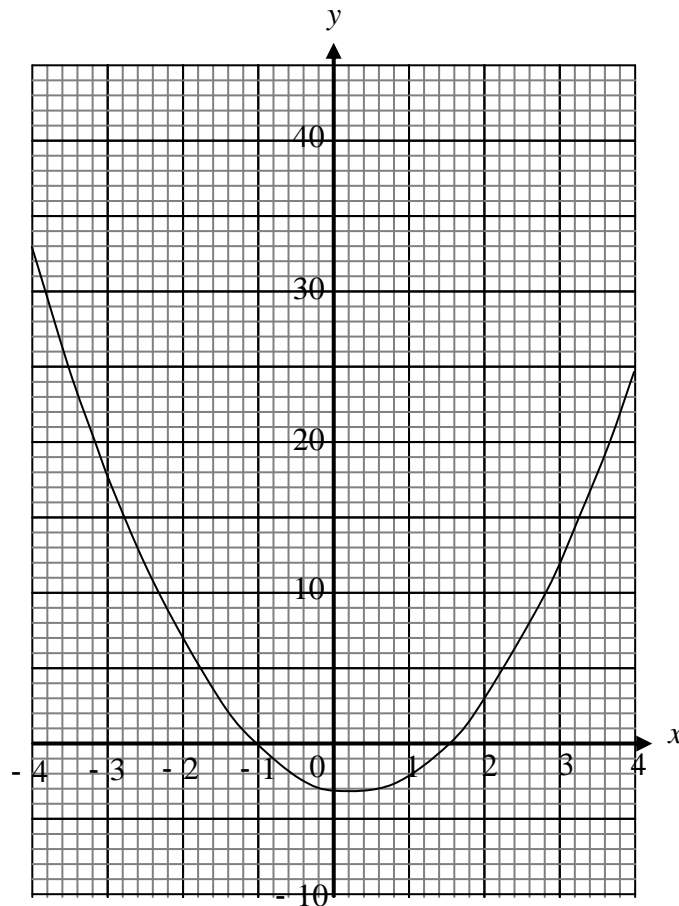
工作紙 1：不同的函數表示的比較

1. 考慮函數 $f(x) = 2x^2 - x - 3$ 。

(I) $f(x)$ 的一個表列表示如下：

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$F(x)$...	33	18	7	0	-3	-2	3	12	25	...

(II) $f(x)$ 在 $-4 \leq x \leq 4$ 的圖像：



(III) 該函數的代數式表示如下：

$$f(x) = 2x^2 - x - 3$$

(a) (i) 寫出 $x = -3$ 時 $f(x)$ 值。

(ii) 寫出 $x = 2.5$ 時 $f(x)$ 值。

(iii) 寫出 $x = 3.7$ 時 $f(x)$ 值。

(iv) 寫出 $x = 6$ 時 $f(x)$ 值。

(b) 求上述各項時，以「✓」在下表表示你選用了函數哪個表達式。

x 值	表列	圖像	代數式
$x = -3$			
$x = 2.5$			
$x = 3.7$			
$x = 6$			

(c) 解釋你的選擇。

2. 對所有正整數定義函數 T 如下:

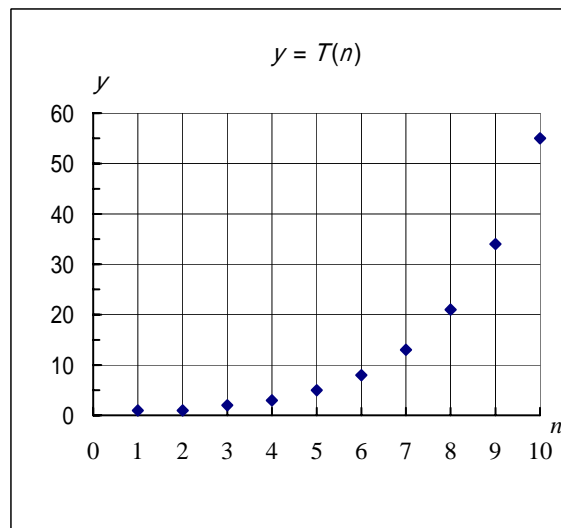
$$\begin{cases} T(1) = T(2) = 1 \\ T(n+2) = T(n) + T(n+1), \text{ 其中 } n \geq 1 \end{cases}$$

明顯地，所有正整數決定唯一一個 $T(n)$ 的值。 $T(n)$ 可稱為第 n 項。

(I) T 的表列表示如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$T(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

(II) T 的圖像表示如下：



(III) T 的代數式表示如下：

$$T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

(a) 求以下各項的值。

(i) 第 11、12 和 13 項。

(ii) 第 41 和 42 項。

(iii) 第 43、44 和 45 項。

(b) (i) 在求(a)部各項的值時，指出你選用了函數的哪個表達式，並用「✓」表示你的選擇。

	表列	圖像	代數式
第 11、12 和 13 項			
第 41 和 42 項			
第 43、44 和 45 項			

(ii) 解釋你的選擇

工作紙 2：認識不同的函數表示方式

1. 考慮下列各表。

設 $0 \leq x \leq 8$ 和 $0 \leq y \leq 8$ 為考慮的範圍。

表 2.1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	1	2	3	4	5	6	7	8

表 2.2

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	1	2	2	4	5	6	7	8

表 2.3

x	0	1	2	3	4	2	4	6	8
y	0	1	4	2	5	3	6	7	8

表 2.4

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	1	2	3	4	2	4	6	8

表 2.5

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	1	2	3	8	4	7	5	6

在下列各情況中，已知 $0 \leq x \leq 8$ 及 $0 \leq y \leq 8$ 。判斷

(a) 「 y 是 x 的函數」是否正確；

(b) 「 x 是 y 的函數」是否正確。

在適當的空格內加上「✓」。

		y 是 x 的函數				x 是 y 的函數				
		當 x 是	整數	整數	實數	實數	整數	整數	實數	實數
		當 y 是	整數	實數	整數	實數	整數	實數	整數	實數
表 2.1	正確									
	不能確定									
	不正確									
表 2.2	正確									
	不能確定									
	不正確									
表 2.3	正確									
	不能確定									
	不正確									
表 2.4	正確									
	不能確定									
	不正確									
表 2.5	正確									
	不能確定									
	不正確									

2. 在下列各題，判斷 y 是否 x 的函數，並加以解釋。

(a) $y = 2x + 1,$

(b) $y = x^2 + 3,$

(c) $y^2 = x^2 + 3,$

(d) $y^3 = x^2 - x + 5.$

3. 在下列各圖，判斷 y 是否 x 的函數，並加以解釋。

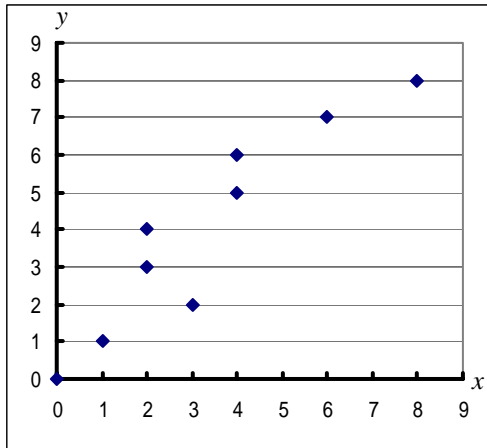


圖 3.1

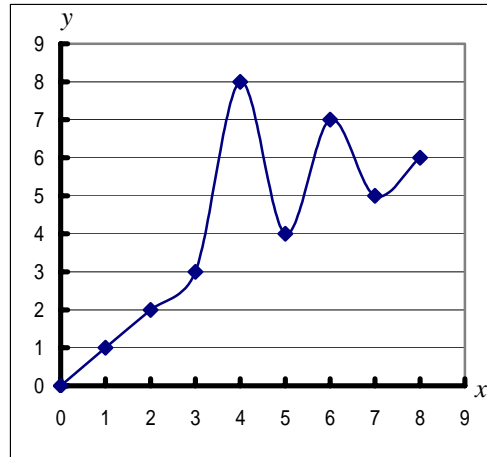


圖 3.2

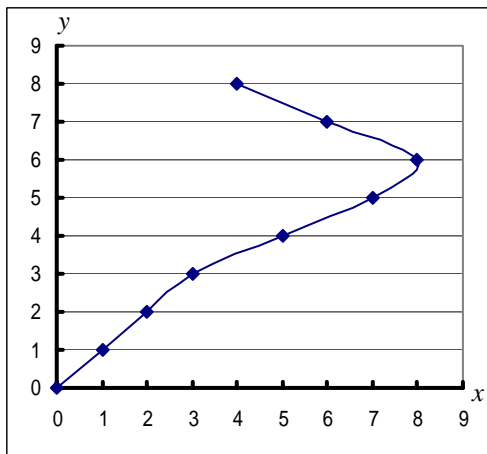


圖 3.3

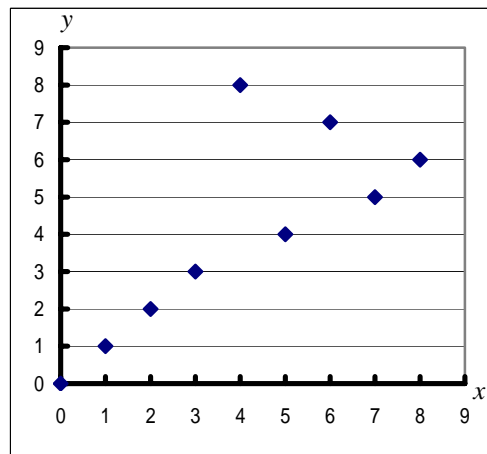


圖 3.4

教師注意事項：

1. 建議教學時數：

工作紙 1 40 分鐘

工作紙 2 40-60 分鐘

2. 工作紙 1 的答案如下。

1. (a)

x	-3	2.5	3.7	6
$f(x)$	18	7	20.68 或 約 20	63

(b)

x	表列	圖像	代數式
$x = -3$	✓	✓	✓
$x = 2.5$		✓	✓
$x = 3.7$		✓	✓
$x = 6$			✓

(c) 選擇的理由如下：

- (i) 該函數的值可直接從表中讀出，也可以從圖像看出來或用代數式試算出來，但後二者的方法較花時間。
- (ii) 函數的值並不能從表中讀出，但較容易從給出的圖像讀取。（部分學生會直接用代數式計算函數的值並指出答案較為準確。）
- (iii) 該函數的值可以用圖像或代數式求得。（教師須提醒學生在利用圖像讀出的值的準確度，教師可進一步指出圖像的比例可影響答案的準確度，從而指出 x 及 y 軸比例的重要性。）

- (iv) 當 $x = 6$ 時，函數的值並未能在給出的表格或圖像內讀取，所以只可用代數式找出答案。（教師可指出選擇 x 值的範圍的重要性。如果圖像已包括了 $x = 6$ 的值，函數的值便可從圖像讀取。）

2.(a)

n	11	12	13	41	42	43	44	45
$T(n)$	89	144	233	165580141	267914296	433494437	701408733	1134903170

2.(b)(i) 學生應提出下面的答案。

	表列	圖像	代數式
第 11、12 和 13 項	✓		
第 41 和 42 項			✓
第 43、44 和 45 項	✓		✓

2.(b)(ii)

- 求第 11、12 和 13 項：
重複運用遞歸關係 $T(n+2)=T(n)+T(n+1)$ 得出第 11、12 和 13 項，這明顯是幾個方式中最簡單的方法。
- 在求第 41 和 42 項：
用迭代法求第 41、42 項是費時和易犯錯的。反而以計算機用代數式求答案更合宜。
- 在求第 43、44 和 45 項：
在這一部分混合使用代數式和迭代法是最佳方法。因由題(b)(ii)，41、42 項已由計算機以代數式求得。然後，以遞歸關係用迭代法便可求第 43、44 和 45 項。

3. 學生選擇方法是開放的。教師須指導學生明白不可瞎猜，必須提出恰當的理由去解釋答案。

4. 工作紙 1 問題 2 內的表格可以用遞歸關係 $T(n+2) = T(n) + T(n+1)$ 和初始條件 $T(1) = T(2) = 1$ 迭代得到，即

$$T(3) = T(1) + T(2) = 1 + 1 = 2$$

$$T(4) = T(2) + T(3) = 1 + 2 = 3$$

⋮

5. 工作紙 1 問題 2 內的代數式可由帶有初始條件的 $T(1) = T(2) = 1$ 及二階差分方程 $T(n+2) = T(n) + T(n+1)$ 得到。

要解這個方程，先考慮輔助方程 $t^2 - t - 1 = 0$ 。此輔助方程的根是 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 和 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 。所以

$$T(n) = A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (*)$$

，其中 A 和 B 是常數。要找出 A 和 B 的值，先代 $n=1$ 和 2 入 $(*)$ 以得出兩條線性方程。解此聯立方程，得

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

最後對所有正整數 $T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ 。

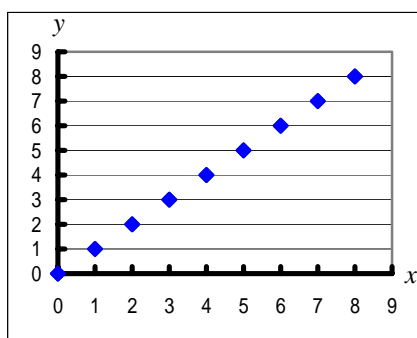
6. 工作紙 2 問題 1 的答案：

1.(a)及(b)

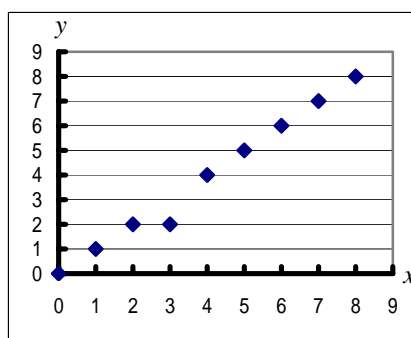
		y 是 x 的函數				x 是 y 的函數				
		當 x 是	整數	整數	實數	實數	整數	整數	實數	實數
		當 y 是	整數	實數	整數	實數	整數	實數	整數	實數
表 2.1	正確	✓	✓			✓		✓		
	不能確定			✓	✓		✓		✓	
	不正確									
表 2.2	正確	✓	✓							
	不能確定			✓	✓					
	不正確					✓	✓	✓	✓	
表 2.3	正確					✓		✓		
	不能確定						✓		✓	
	不正確	✓	✓	✓	✓					
表 2.4	正確	✓	✓							
	不能確定			✓	✓					
	不正確					✓	✓	✓	✓	
表 2.5	正確	✓	✓			✓		✓		
	不能確定			✓	✓		✓		✓	
	不正確									

7. 由表 2.1 至 2.5 數據所對應圖像如下：

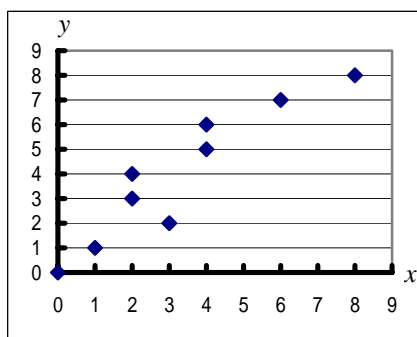
(a)



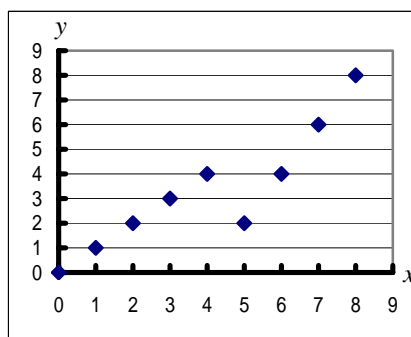
(b)



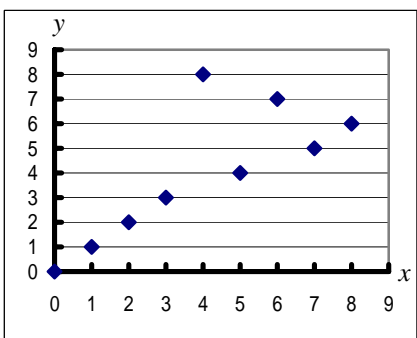
(c)



(d)

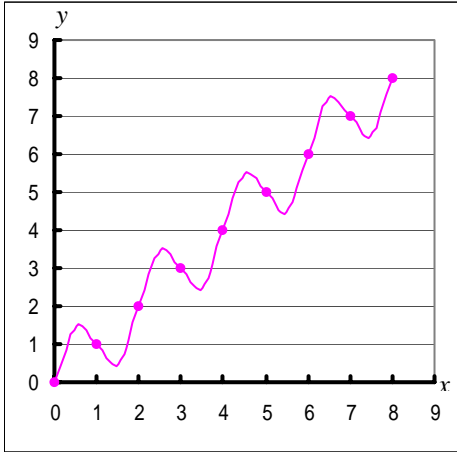


(e)

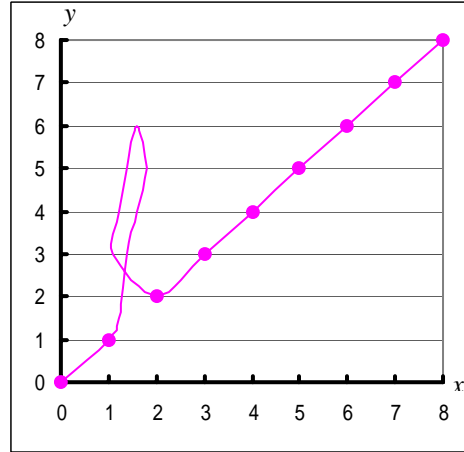


8. 當 x 和 y 都是實數時，以下各圖都是按表 2.1 內各 x 、 y 值畫出來而可能出現以下的圖像。

y 是 x 的函數

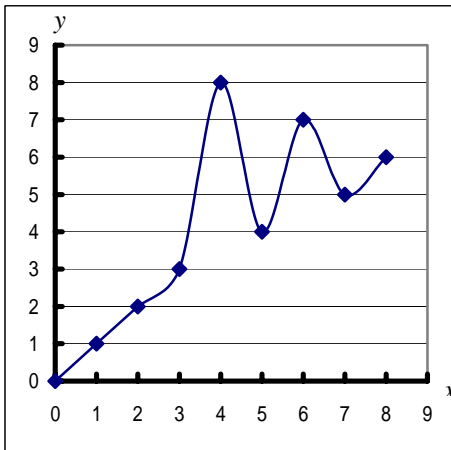


y 不是 x 的函數

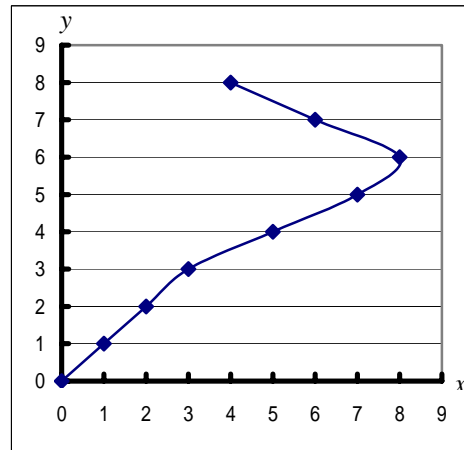


同樣地，下列各圖均可以是表 2.5 所對應的其中兩個圖像。

y 是 x 的函數



y 不是 x 的函數



因此，教師須提醒學生在判斷一個關係是否函數時，要留意問題給出的條件和函數的基本定義。例如，在問題 1 表 2.1 中，當 x 取整數值， y 是 x 的函數；但當 x 為實數時， y 則不能確定是否 x 的函數。

9. 教師由此 2 例便可與學生討論表列式表示函數的限制。可是在現實數據中，往往得到有限數量表列出來，而其後嘗試找出其對應的圖像及以代數式表示其關係。

10. 工作紙 2 問題 2 及 3 的答案。

2. (a) 是。

對每一個 x ，只有唯一一個 $2x+3$ 的值與之對應，所以 y 的值是唯一的。因此 y 是 x 的函數。

(b) 是。

對每一個 x ，只有唯一一個 x^2+3 的值與之對應，所以 y 的值是唯一的。因此 y 是 x 的函數。

(c) 否。

對每一個 x ，只有唯一一個 x^2+3 的值與之對應。而且對任意一個正數 a ，方程 $y^2=a$ 均有兩個解，即每個 a 有兩個對應的 y 值。當 $x=1$ 時， $y^2=1^2+3=4$ ，即 y 可取值為 $+2$ 或 -2 。故對於任意一個 x 值並不能給出唯一的 y 值，因此 y 不是 x 的函數。

(d) 是。

對每一個 x ，只有唯一一個 x^2-x+5 的值與之對應。而且對任意一個正數 a ，方程 $y^3=a$ 的 y 值是唯一的，所以 y 是 x 的函數。

3. 圖像 3.1： y 不是 x 的函數，在輸入值 $x=4$ 時，得出兩個不同的輸出值。

圖像 3.2： y 是 x 的函數

圖像 3.3： y 不是 x 的函數，在輸入值由 $x=4$ 至 $x=8$ 的區域內，每一 x 輸入值都有超過一個 y 輸出值。

圖像 3.4： y 是 x 的函數

11. 由第 3 題圖 3.3 及 3.4 的類似問題，教師可進一步鞏固學生了解 x 值的選取範圍對判斷“ y 是 x 的函數”的重要性。