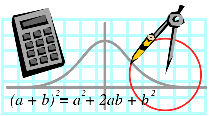


示例七：
二次函數的圖像

目　　標：探究二次函數圖像的特徵及二次函數的性質。

學習階段：4

學習單位：函數及其圖像

所需教材：工作紙、*Excel file(QUAD.XLS)*、*Winplot* 及印有 $y = x^2$ 圖像的膠片

預備知識：在直角坐標平面上讀出鉛垂線的方程。

教學內容：

1. 教師派發工作紙 1，並開啟檔案 *QUAD.XLS*，著學生完成第 1-3 題。

2. 教師幫助學生總結 a 的數值對函數 $y = ax^2 + bx + c$ 圖像的影響。

3. 教師著學生完成第 4-5 題，以探討 b 及 c 值對函數圖像的影響。

4. 教師與學生討論 b 及 c 的值對函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖像的影響，並進一步討論第 6 題以總結 a、b 及 c 的值對函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖像的影響。其中初步得到以下的觀察：
   (a) 無論 a 怎樣改變，只要 $a \neq 0$，函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖像便呈現一具有對稱性質的拋物線；
   (b) 圖像開口的闊、窄及向上或向下只受 a 影響；
   (c) 圖像的 y-軸截距只受 c 值影響；
   (d) 圖像的頂點隨著 b 或 c 值而改變。
   在討論以下觀察時，教師可要求學生解釋有關現象，如為什麼 $a = 0$ 時，它便不是曲線等等。

5. 教師派發工作紙 2，並開啟代數軟件 *Winplot* 以探討 $y = (x+h)^2$ 及 $y = (x + h)^2 + k$ 的圖像的特點。

6. 教師囑學生依工作紙 2 之指示完成各項活動。教師可加以提示並作出適當總結。其中包括：
   (a) 一表達為完全平方式的二次函數如 $y=a(x+h)^2$，a 的值決定圖像的開口方向及極值是極大值抑或是極小值；對稱軸為 $x=-h$ 及頂點的坐標為 $(-h,\ 0)$；
   (b) 若二次函數如 $y=a(x+h)^2+k$，圖像形狀及對稱軸與 $y=a(x+h)^2$ 沒有改變，但頂點則改為 $(-h,\ k)$。

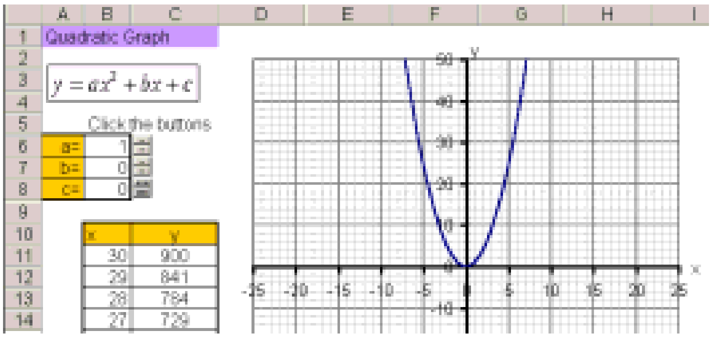
   在討論以上觀察時，教師可要求學生解釋有關現象，如為何完全平方式有助判斷頂點的坐標及為何 a 值完全決定圖像的開口方向等等。教師亦可透過完全平方式對頂點的解釋聯繫工作紙 1 的觀察如“圖像的頂點隨著 b 或 c 值而改變”。

7. 在學生對圖形如二次函數 $y=(x+h)^2+k$ 與頂點及對稱軸的關係有所認識後，教師由此可帶出配方法將 $y=ax^2+bx+c$ 變為 $y=a(x-h)^2+k$ 的必要性及引導學習配方法及其重要性。

工作紙 1：二次函數的圖像的特性（一）

問題：

1. 按 ↓ 或 ↑ 按鈕，將 a、b、c 的值分別調整為 1、0、0。



圖中所示為二次函數 y = _______ 的圖像。

2. 保持 b 和 c 的值為 0，按 ↑ 按鈕將 a 的值由 1 漸漸增至 4。留意圖像的變化，並完成下表。

a 值	圖像的開口方向	開口的闊窄	頂點位置	對稱性質	形狀
2		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線
3		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線
4		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線

(a) 試描述圖像的變化。

____

(b) 圖像的頂點位置有甚麼改變？

____

(c) 圖像的開口方向有甚麼改變？

____

3. 保持 b 和 c 的值為 0，按 ↓ 按鈕將 a 的值由 4 減至 -4。留意圖像的變化，並完成下表。

a 值	圖像的開口方向	開口的闊窄	頂點位置	對稱性質	形狀
0.5		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線
0.2		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線
0		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線
–1		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線
–2		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線
–3		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線
–4		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線

(a) 試描述圖像的變化。

(b) 圖像的頂點位置有甚麼改變？

(c) 當 $a > 0$ 時，圖像的開口向________（上／下）
當 $a < 0$ 時，圖像的開口向________（上／下）

4. 保持 $a = 1$ 及 c 的值為 0，按 ↑ 按鈕以將 b 的值由 0 漸漸增至 12 及按 ↓ 按鈕以將 b 的值漸漸減至 -8。留意圖像的變化，並完成下表。

b 值	圖像的開口方向	開口的闊窄	頂點位置	對稱性質	形狀
4		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線
8		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線
12		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線
–4		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線
–8		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線

5. 保持 $a = 1$ 及 b 的值為 0，按 ↑ 按鈕以將 c 的值由 0 漸漸增至 12 及按 ↓ 按鈕以將 c 的值漸漸減至 -8。留意圖像的變化，並完成下表。

c 值	圖像的開口方向	開口的闊窄	頂點位置	對稱性質	形狀
4		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線
8		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線
12		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線
–4		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線
–8		越闊/越窄/不變		有/沒有	直線/曲線

6. 在問題 2 至 5 中，我們發現：

(a) 無論 a 怎樣變化 ($a \neq 0$)，$y = ax^2 + bx + c$ 的圖像都有共同特徵，即是

____

(b) 當 a 的值由正轉為負時，圖像的開口方向會：

____

(c) 當 a 的數值（不考慮正負號）越大時，則圖像的開口越 __________（闊／窄）。

(d) 當 $a = 0$ 時，圖像變成________________，理由是：

____

(e) 當 b 和 c 的數值保持不變時，而 a 的值改變時，則圖像的____（開口的闊窄／頂點的位置／y 軸截距）會有所改變；而____（開口的闊窄／頂點的位置／y 軸截距）並沒有改變。

(f) 當 a 和 c 的數值保持不變而 b 的值改變時，則圖像的____________________________________會有所改變；而____並沒有改變。

(g) 當 a 和 b 的數值保持不變而 c 的值改變時，則圖像的____________________________________會有所改變；而____並沒有改變。

工作紙 2：二次函數的圖像的特性（二）

活動 1

步驟：

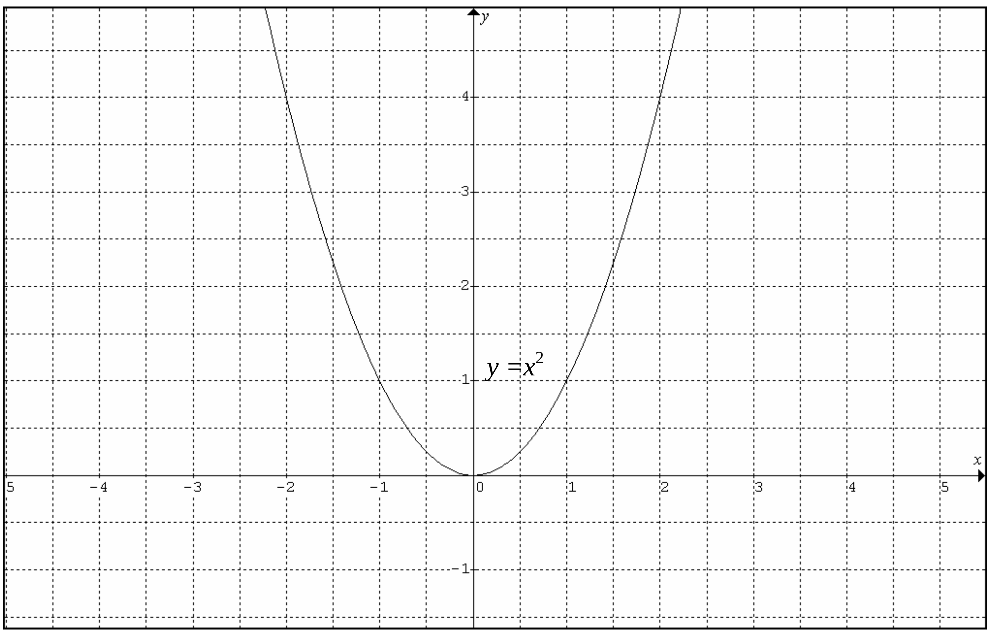
1. 開啟代數軟件 *Winplot*。
2. 按 “**2-dim**”。
3. 按“**Equa**”、 “ **y=f(x)...**”。
4. 輸入 “ x ∧ 2” 以繪畫函數 $y=x^2$ 的圖像。
5. 重複步驟 3，並輸入 “(x－2) ∧ 2” 以繪畫函數 $y=(x-2)^2$ 的圖像。
6. 重複步驟 3，並輸入 “(x－4) ∧ 2” 以繪畫函數 $y=(x-4)^2$ 的圖像。
7. 比較所得的圖像，你有甚麼發現呢？

____

8. 圖像的形狀有甚麼改變？

____

9. 在下圖中繪畫函數 $y=(x-3)^2$ 的略圖。



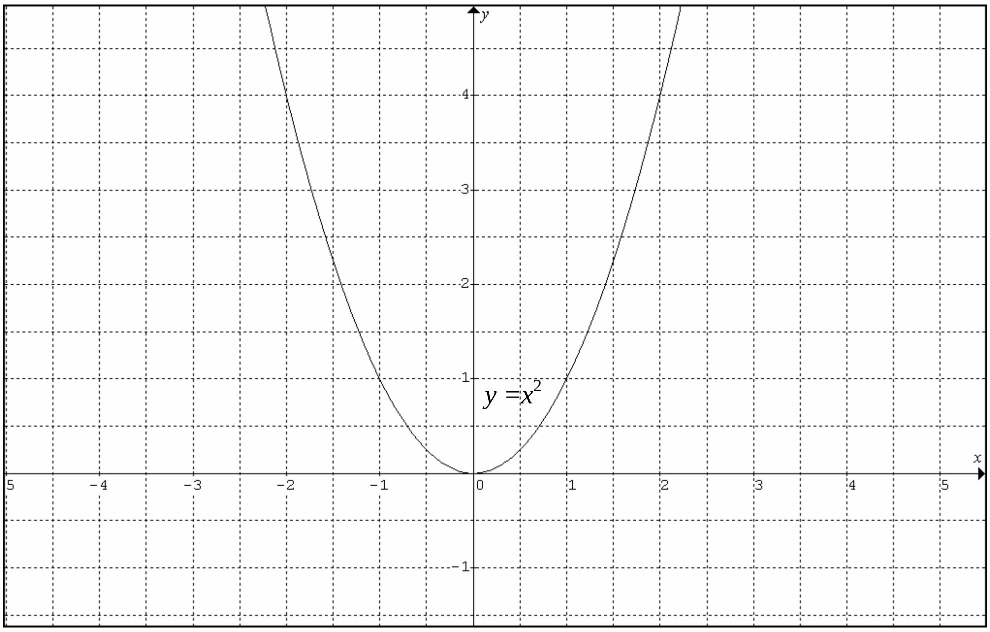
10. 利用 *Winplot* 繪畫函數 $y=(x-3)^2$ 的圖像，結果與步驟 9 中所得的結果是否一致呢？

____

11. 你的結論是：

____

12. 在下圖中繪畫函數 $y=(x+1)^2$ 和 $y=(x+3)^2$ 的略圖。



13. 利用 *Winplot* 繪畫函數 $y=(x+1)^2$ 和 $y=(x+3)^2$ 的圖像，結果與步驟 12 中所得的略圖是否一致呢？

____

14. 觀察各圖，完成下表：

	$y=(x-3)^2$	$y=(x+1)^2$	$y=(x+3)^2$
對稱軸的方程			
頂點坐標			
y 的最大值／最小值			

15. 綜合以上結果，你有甚麼結論呢？

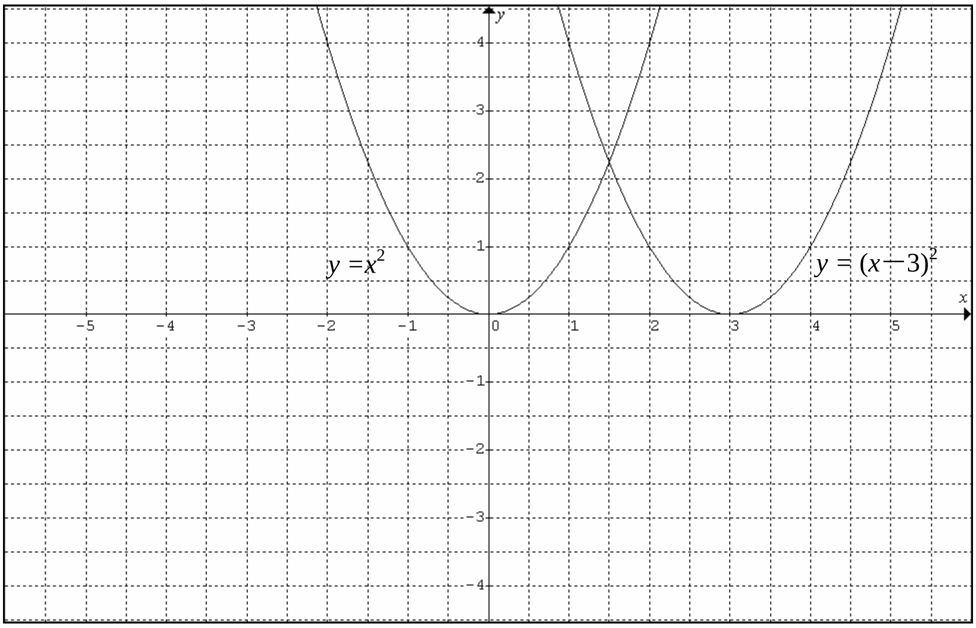
____

____

活動 2

步驟：

1. 在下圖中繪畫函數 $y=(x-3)^2+1$ 的略圖。



2. 與你的同學比較，你們得到相同的圖像嗎？

____

3. 利用繪圖軟件 *Winplot* 來驗証結果，並探討 $y=(x+h)^2+k$ 的圖像的特徵如何隨 h 和 k 的值而改變。留意圖像的對稱軸及頂點的位置。函數 $y=(x+h)^2+k$ 中的 h 值和 k 值如何影響其圖像位置（如其對稱軸的方程及其頂點的位置）？

____

____

4. 試寫出下列各函數所對應的圖像的頂點和對稱軸，並寫出各函數的極小值或極大值。

	頂點坐標	對稱軸的方程	極小值／極大值
(a) $y=(x-3)^2-4$			極（小／大）*值＝________
(b) $y=(x+3)^2-4$			極（小／大）*值＝________

		頂點坐標	對稱軸的方程	極小值／極大值
(c)	$y=(x-3)^2+4$			極（小／大）*值＝________
(d)	$y=(x+3)^2+4$			極（小／大）*值＝________
(e)	$y=(x+2)^2-5$			極（小／大）*值＝________
(f)	$y=(x-12)^2+5$			極（小／大）*值＝________
(g)	$y=(x-7)^2$			極（小／大）*值＝________
(h)	$y=x^2+11$			極（小／大）*值＝________
(i)	$y=-x^2+3$			極（小／大）*值＝________
(j)	$y=-2x^2$			極（小／大）*值＝________
(k)	$y=5(x-8)^2+1$			極（小／大）*值＝________
(l)	$y=3(x-8)^2+1$			極（小／大）*值＝________
(m)	$y=-3(x-1)^2-4$			極（小／大）*值＝________
(n)	$y=-(x+5)^2+7$			極（小／大）*值＝________
(o)	$y=3(5-x)^2-6$			極（小／大）*值＝________

*圈出正確答案

利用 *Winplot* 驗算答案。

5. 綜合而言，函數 $y = a(x+h)^2 + k$ (若 a，h 及 k 為常數)圖像的對稱軸是________________________及頂點是______________________。

教師注意事項：

1. 本示例活動約需時 40-50 分鐘。

2. 在使用應用檔 *QUAD.XLS* 時，教師須提醒學生必須按 ↓ 或 ↑ 按鈕以調整 a、b、c 的值，不得直接於儲存格輸入所需的值，否則檔案將不能正常運作。

3. 在使用應用檔 *QUAD.XLS* 時，教師應與學生解釋圖像、表列式及代數式三者之間的關係，甚至可要求學生計算表列內任意 x 的值，驗算與電腦顯示表列內 y 值是否相同，從而更深刻了解它們的關係；否則學生只感覺圖像不斷改變但不明所以。

4. 教師在使用工作紙 1 時，可考慮以各表內的標題作觀察圖像變化的框架，而無須要求學生完成第 2 至 5 題，但必須與學生作第 6 題的總結活動。

5. 有部分學生在討論「圖像的開口闊窄」時，會不理解其要求，有可能誤以為 $y=x^2$、 $y=x^2+4$（第 5 題）及 $y=x^2+4x$（第 4 題）三幅圖會有不同的開口闊窄。教師須略加說明，有需要時亦可用 $y=x^2$ 圖像膠片作解釋。

6. 因著應用檔 *QUAD.XLS* 每次只出現一個圖像，學生較難比較不同二次函數代數式與圖像的關係，故此工作紙 2 轉用 *Winplot* 以方便顯示數個圖像在同一版面，學生較易將圖像與代數式變化聯繫起來。

7. *Winplot* 軟件是免費軟件，教師可在 http://math.exeter.edu/rparris 下載。

8. 工作紙 1 的建議答案如下：

1. 圖中所示為二次函數 y = x^2 的圖像。

2.

a 值	圖像的開口方向	開口的闊窄	頂點位置	對稱性質	形狀
2	向上	越窄	(0, 0)	有	曲線
3	向上	越窄	(0, 0)	有	曲線
4	向上	越窄	(0, 0)	有	曲線

(a) 當 a 的值越大，圖像的開口越窄。
(b) 沒有改變。
(c) 沒有改變。

3.

a 值	圖像的開口方向	開口的闊窄	頂點位置	對稱性質	形狀
0.5	向上	越闊	(0, 0)	有	曲線
0.2	向上	越闊	(0, 0)	有	曲線
0	／	／	／	／	直線
–1	向下	越窄	(0, 0)	有	曲線
–2	向下	越窄	(0, 0)	有	曲線
–3	向下	越窄	(0, 0)	有	曲線
–4	向下	越窄	(0, 0)	有	曲線

(a) 當 a 的值由正轉為負，圖像的開口方向由向上改為向下。
當 a 的值為負時，a 的值越小，圖像的開口越窄。
(b) 沒有改變。
(c) 當 $a > 0$ 時，圖像的開口向 上 （上／下）
當 $a < 0$ 時，圖像的開口向 下 （上／下）

4.

b 值	圖像的開口方向	開口的闊窄	頂點位置	對稱性質	形狀
4	向上	不變	(–2, –4)	有	曲線
8	向上	不變	(–4, –16)	有	曲線
12	向上	不變	(–5, –25)	有	曲線
–4	向上	不變	(2, –4)	有	曲線
–8	向上	不變	(4, –16)	有	曲線

5.

c 值	圖像的開口方向	開口的闊窄	頂點位置	對稱性質	形狀
4	向上	不變	(0, 4)	有	曲線
8	向上	不變	(0, 8)	有	曲線
12	向上	不變	(0, 10)	有	曲線
–4	向上	不變	(0, –4)	有	曲線
–8	向上	不變	(0, –8)	有	曲線

6.

(a) 有對稱性質，形狀為曲線。

(b) 向上轉為向下。

(c) 當 a 的數值（不考慮正負號）越大時，則圖像的開口越 ___窄___（闊／窄）。

(d) 當 $a = 0$ 時，圖像變成 ___直線___ ，理由是：
當 $a = 0$ 時， $y = ax^2 + bx + c$ 變成 $y = bx + c$，它是線性方程。

(e) 當 b 和 c 的數值保持不變時，而 a 的值改變時，則圖像的開口的闊窄、頂點的位置（開口的闊窄／頂點的位置／y-軸截距）會有所改變；而 y-軸截距（開口的闊窄／頂點的位置／y-軸截距）並沒有改變。

(f) 當 a 和 c 的數值保持不變而 b 的值改變時，則圖像的頂點位置會有所改變；而開口的闊窄、y-軸截距並沒有改變。

(g) 當 a 和 b 的數值保持不變而 c 的值改變時，則圖像的頂點位置、y-軸截距會有所改變；而開口的闊窄並沒有改變。

9. 工作紙 2 的建議答案如下：

活動 1

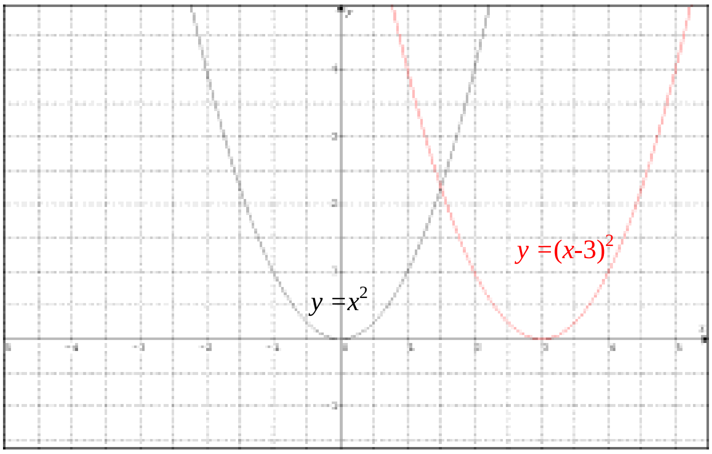
7.

與 $y=x^2$ 的圖像比較， $y=(x-2)^2$ 及 $y=(x-4)^2$ 圖像分別向右移 2 及 4 個單位。

8.

形狀保持不變。

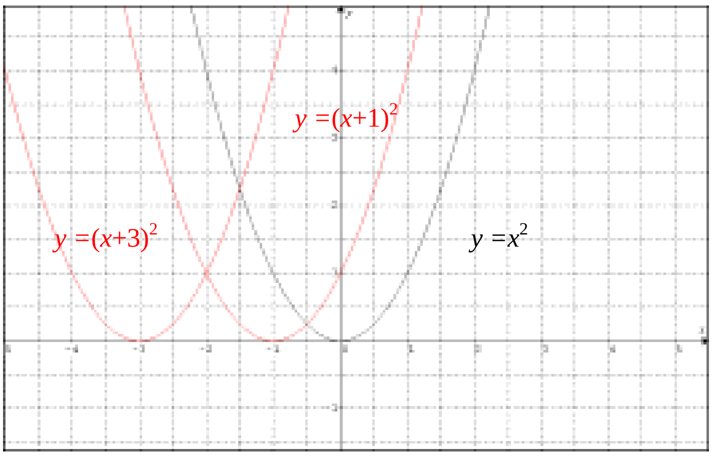
9. 在下圖中繪畫函數 $y=(x-3)^2$ 的略圖。



11.

與 $y=x^2$ 的圖像比較，如果 $a>0$， $y=(x-a)^2$ 圖像向右移 a 個單位。形狀保持不變。

12. 在下圖中繪畫函數 $y=(x+1)^2$ 和 $y=(x+3)^2$ 的略圖。



14.

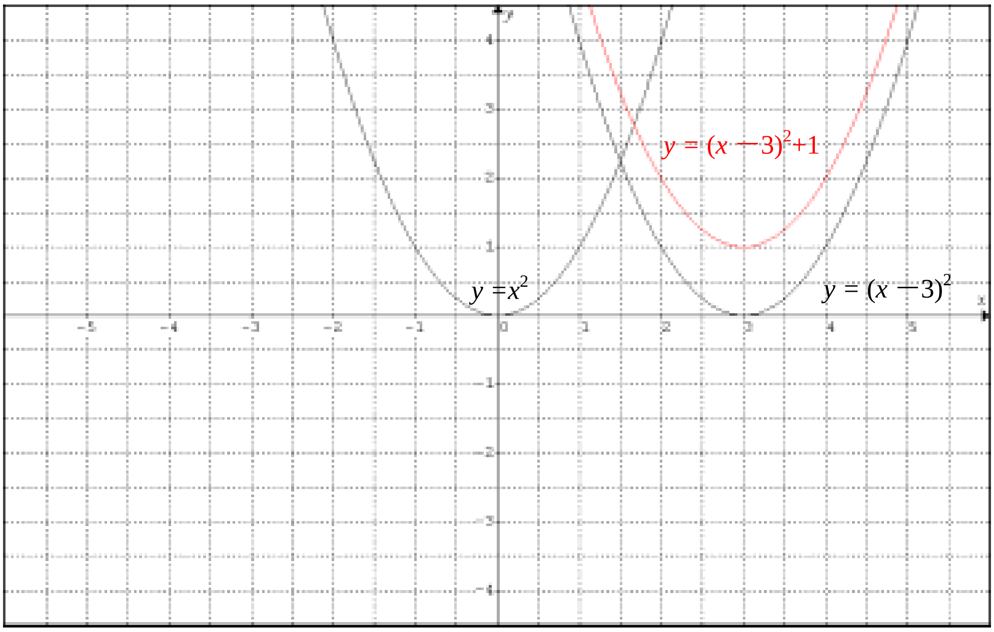
	$y=(x-3)^2$	$y=(x+1)^2$	$y=(x+3)^2$
對稱軸的方程	$x=3$	$x=-1$	$x=-3$
頂點坐標	(3, 0)	(−1, 0)	(−3, 0)
y 的最大值／最小值	0	0	0

15.

與 $y=x^2$ 的圖像比較，當 $h>0$，$y=(x-h)^2$ 的圖像向右移 h 個單位，$y=(x+h)^2$ 的圖像向左移 h 個單位，而兩者圖像的對稱軸為 $x=h$ 及 $x=-h$，頂點為 $(h, 0)$，形狀保持不變，最小值仍是 0。

活動 2

1. 在下圖中繪畫函數 $y=(x-3)^2+1$ 的略圖。



3.

與 $y=x^2$ 的圖像比較， $y=(x-3)^2+2$ 的圖像向右移 3 個單位，向上移 2 個單位，對稱軸為 x = 3，但頂點坐標則為(3, 2)，形狀保持不變。

4.

	頂點坐標	對稱軸的方程	極小值／極大值
(a) $y=(x-3)^2-4$	(3, –4)	$x = 3$	極 (小／大) *值＝ –4
(b) $y=(x+3)^2-4$	(–3, –4)	$x = -3$	極 (小／大) *值＝ –4
(c) $y=(x-3)^2+4$	(3, 4)	$x = 3$	極 (小／大) *值＝ 4
(d) $y=(x+3)^2+4$	(–3, 4)	$x = -3$	極 (小／大) *值＝ 4
(e) $y=(x+2)^2-5$	(–2, –5)	$x = -2$	極 (小／大) *值＝ –5
(f) $y=(x-12)^2+5$	(12, 5)	$x = 12$	極 (小／大) *值＝ 5
(g) $y=(x-7)^2$	(7, 0)	$x = 7$	極 (小／大) *值＝ 0
(h) $y=x^2+11$	(0, 11)	$x = 0$	極 (小／大) *值＝ 11

	頂點坐標	對稱軸的方程	極小值／極大值
(i) $y=-x^2+3$	(0, 3)	$x=0$	極（小／大）*值＝ 3
(j) $y=-2x^2$	(0, 0)	$x=0$	極（小／大）*值＝ 0
(k) $y=5(x-8)^2+1$	(8, 1)	$x=8$	極（小／大）*值＝ 1
(l) $y=3(x-8)^2+1$	(8, 1)	$x=8$	極（小／大）*值＝ 1
(m) $y=-3(x-1)^2-4$	(1, –4)	$x=1$	極（小／大）*值＝ –4
(n) $y=-(x+5)^2+7$	(–5, 7)	$x=-5$	極（小／大）*值＝ 7
(o) $y=3(5-x)^2-6$	(5, –6)	$x=5$	極（小／大）*值＝ –6

*圈出正確答案

5. 綜合而言，函數 $y = a(x+h)^2 + k$ (若 a，h 及 k 為常數)圖像的對稱軸是 $x = -h$ 及頂點是 $(-h, k)$。