

示例八：變換對函數圖像的影響（一）

目 標： 認識函數圖像的上下平移與代數式對應的變化

學習階段： 4

學習單位： 函數及其圖像

所需教材： (1) 試算表軟件如微軟 *Excel* (*graph.xls*)，繪圖軟件如 *Graphmatica* 和工作紙
(2) 印有 $y = x^2$ 及 $y = x^3$ 圖像的膠片及圖表紙

預備知識： (1) 認識 $f(x) = x^2$ 的圖像
(2) 懂得繪畫圖像

教學內容：

1. 教師先與學生複習 $y = x^2$ 的圖像及圖像上的點與代數式的關係。
2. 教師派發工作紙 1 並要求學生從 $y = x^2 + 3$ (即 C_2) 計算對應 x 值的 y 值。然後，讓學生繪畫 $y = x^2 + 3$ 的圖像。
3. 教師與學生核對答案並討論 $y = x^2 + 3$ 圖像各點的 y 值與 $y = x^2$ 圖像各點 y 值的關係。學生需從表內數值比較兩函數的關係。
4. 教師進一步與學生討論若 C_2 方程改為 $y = x^2 + 5$ ，該圖像與 $y = x^2$ 圖像有何關係。其後教師可用膠片 $y = x^2$ 顯示 $y = x^2 + 5$ 的圖像，由 C_1 及 C_2 圖像各點的坐標關係綜合出 $y = x^2 + 5$ 圖像是將 $y = x^2$ 圖像上移 5 格。
5. 教師派發工作紙 2 並要求學生完成第 1 及 2 題，由此帶出 $C_3: y = x^2 - 6$ 圖像與 $y = x^2$ 圖像的關係。
6. 教師邀請學生猜測 $y = x^2 - 10$ 圖像與 $y = x^2$ 圖像的關係，並可用膠片顯示 $y = x^2 - 10$ 圖像及要求學生解釋他們的猜測。

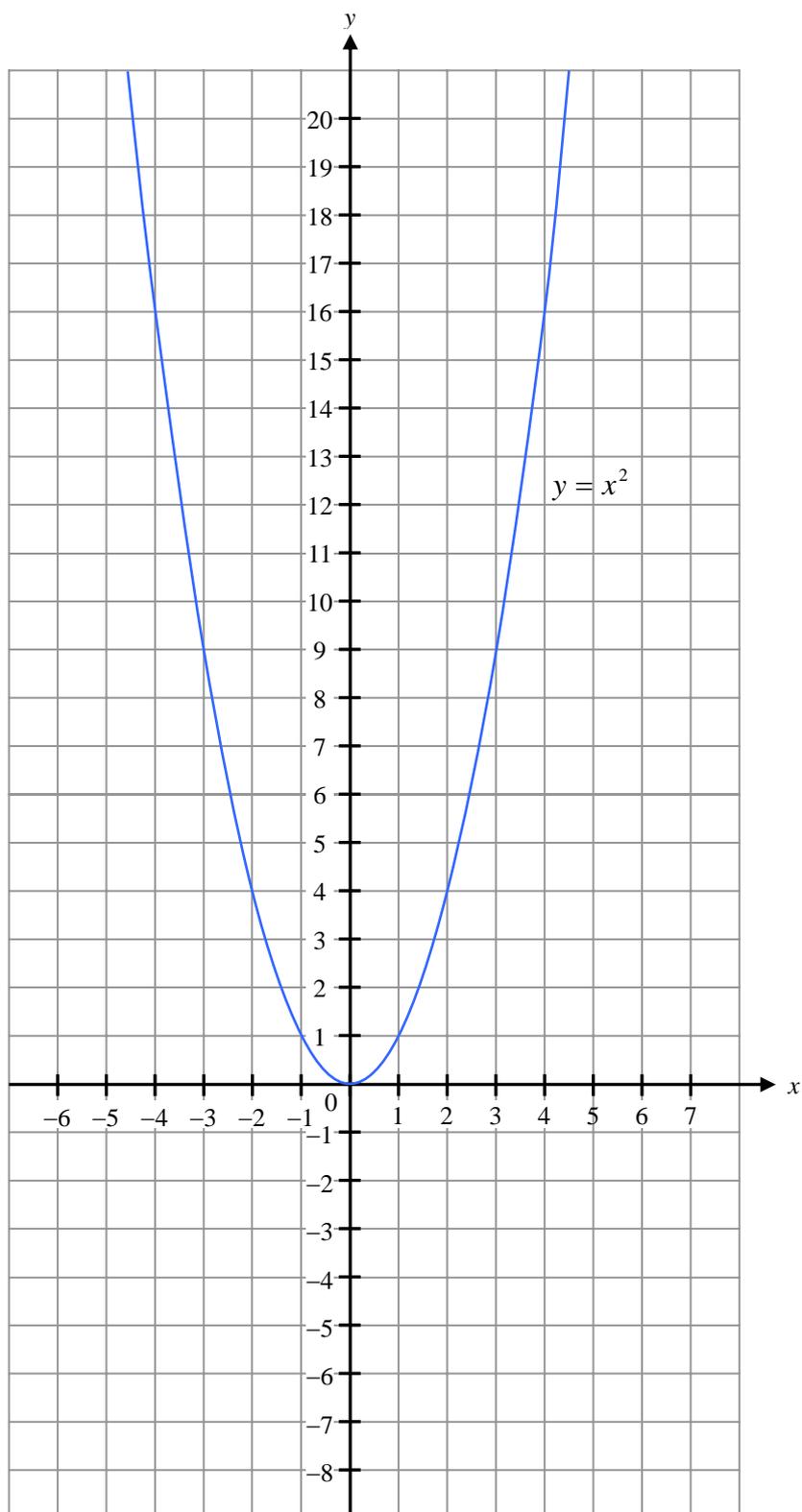
7. 教師再進一步要求學生分組討論以下方程與新方程圖像的關係。
- (a) $C_1 : y = x^2 + 5$ 與 $C_2 : y = x^2 + 10$
- (b) $C_1 : y = x^3$ 與 $C_2 : y = x^3 + 4$
- 教師邀請學生以膠片展示他們的圖像並解釋他們的答案。
8. 教師利用檔案 *graph.xls* 核對學生的答案並解釋函數代數式的變化與圖像各點的對應變化。
9. 教師提問學生若將函數 $y = f(x)$
- (a) $f(x) = x^2 + 2x$; 或
- (b) $f(x) = x^2 + 2x + 4$; 或
- (c) $f(x) = x^3 - 2x$; 或
- (d) $f(x) = x^3 - 2x + 4$ 。
- 的圖像上移 3 格及下移 3 格時，所得圖像的函數的代數式將會有何改變。討論後，教師可利用檔案 *graph.xls* 展示答案。
10. 教師派發工作紙 3，讓學生鞏固對圖像上、下平移與其代數式關係的練習。
11. 教師可利用 *Graphmatica* 軟件與學生探討其他一般函數如 $y = x^4$ 或 $y = \sin x$ 的圖像的上、下平移，從而作出總結。若
- (a) $y = f(x)$ 圖像上移 k 格，則新函數的符號式為 $y = f(x) + k$ 。
- (b) $y = f(x)$ 圖像下移 k 格，則新函數的符號式為 $y = f(x) - k$ 。

工作紙 1

1. 試完成下表。

x	C_1 $y = x^2$	C_2 $y = x^2 + 3$
-4	16	19
-3	9	
-2	4	
-1	1	4
0	0	
1	1	
2	4	7
3	9	12
4	16	

2. 在右圖上，繪出圖像 C_2 。

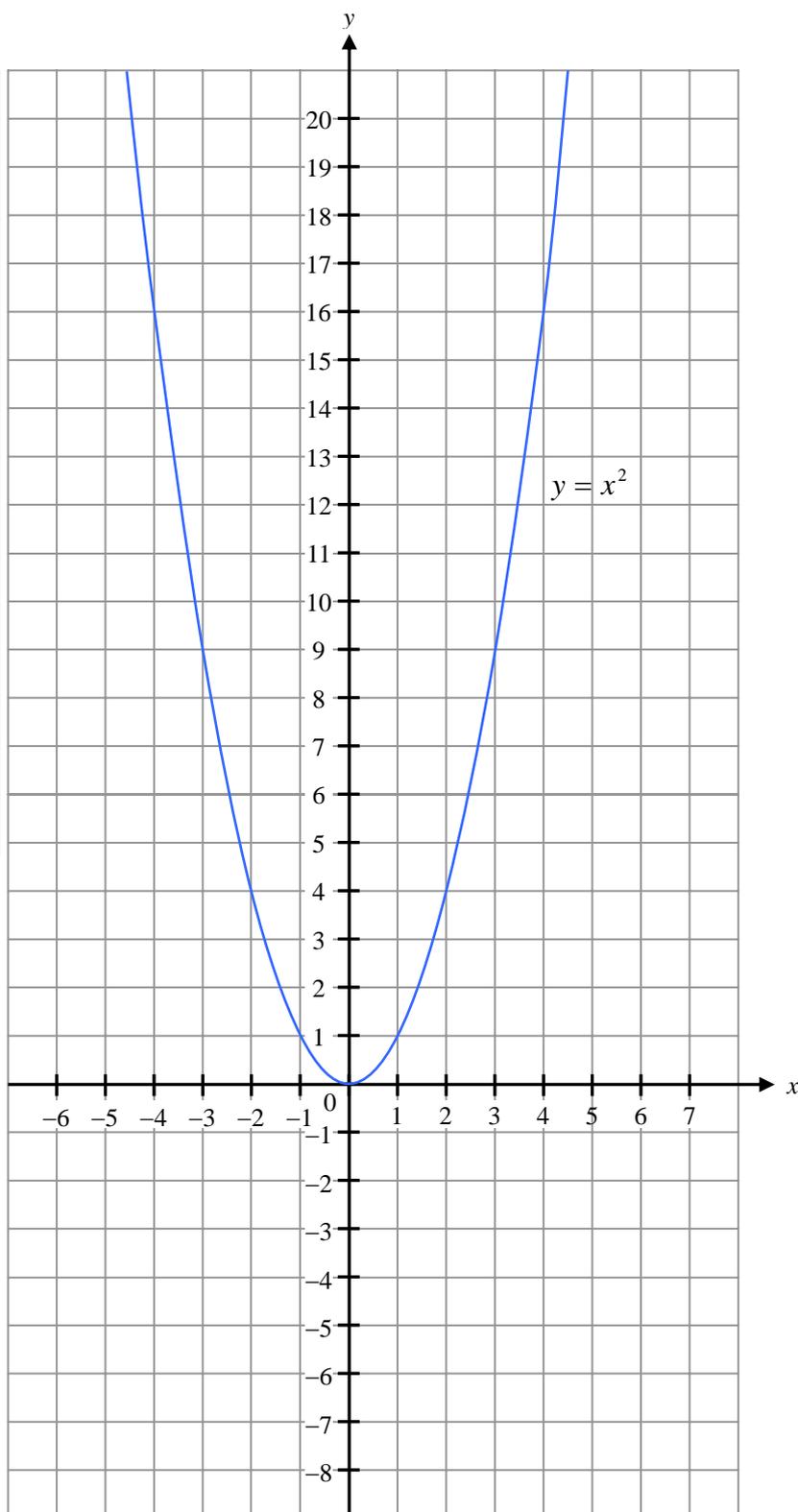


工作紙 2

1. 試完成下表。

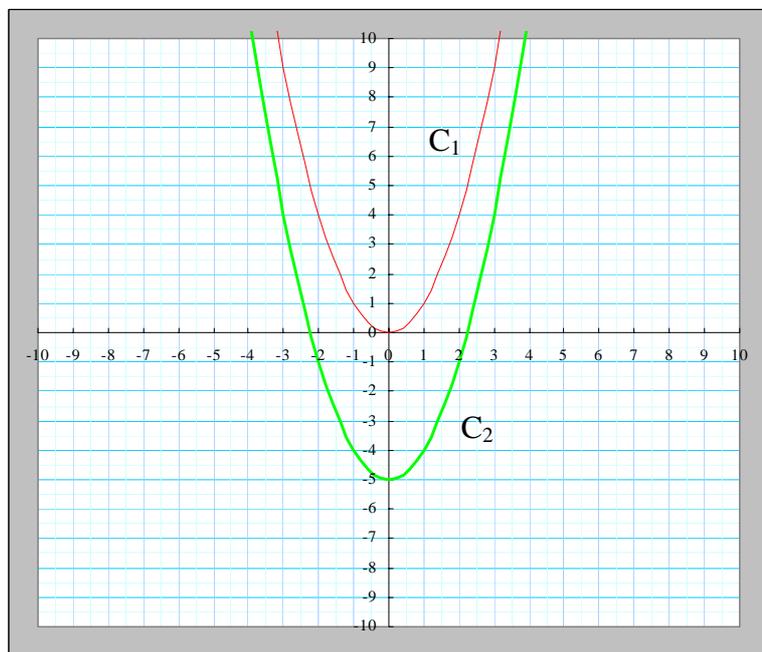
x	C_1 $y = x^2$	C_3 $y = x^2 - 6$
-4	16	10
-3	9	3
-2	4	-2
-1	1	
0	0	-6
1	1	-5
2	4	
3	9	
4	16	10

2. 在右圖上，繪出圖像 C_3 。



工作紙 3

1.

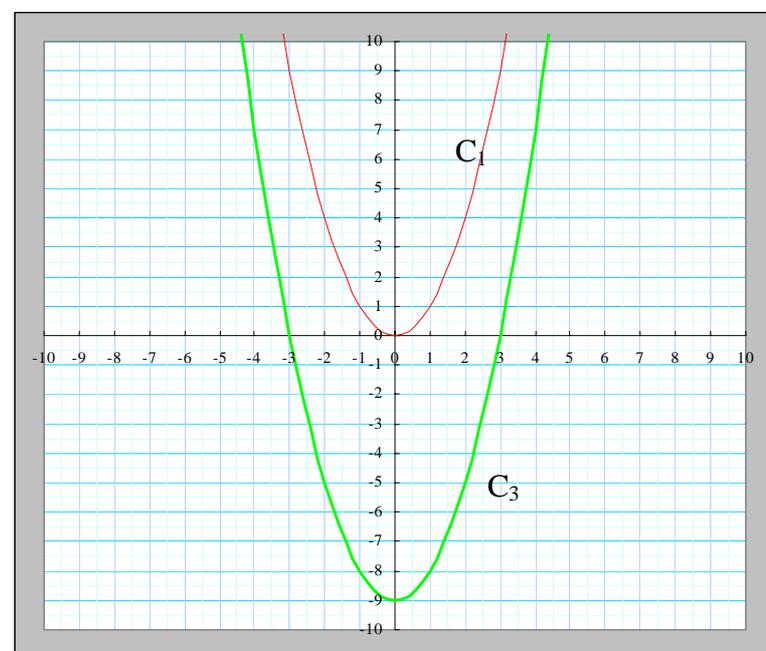


圖中所示為二次函數 $C_1 : y = x^2$ 及 C_2 的圖像。

(a) C_2 的圖像是將 C_1 向 上 / 下 移動 _____ 個單位。

(b) C_2 的方程是 _____。

2.

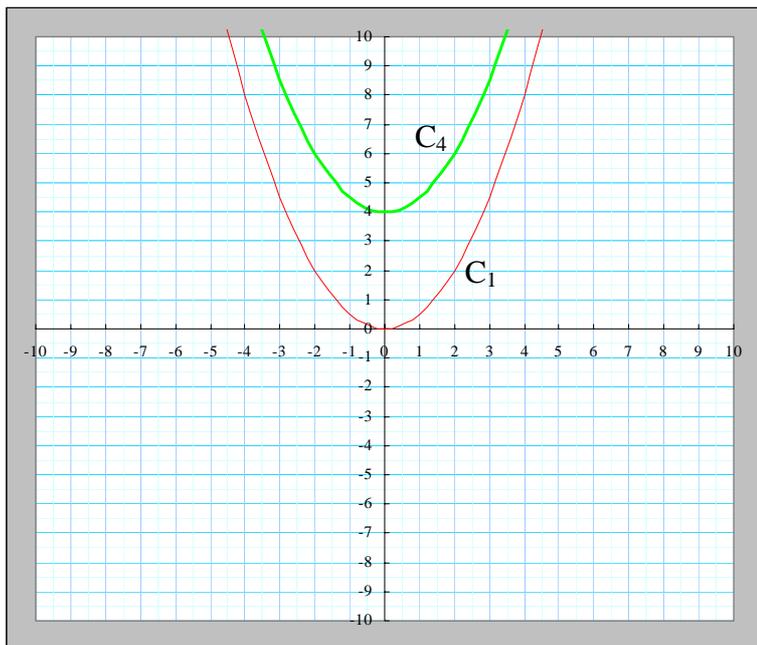


圖中所示為二次函數 $C_1 : y = x^2$ 及 C_3 的圖像。

(a) C_3 的圖像是將 C_1 向 上 / 下 移動 _____ 個單位。

(b) C_3 的方程是 _____。

3.

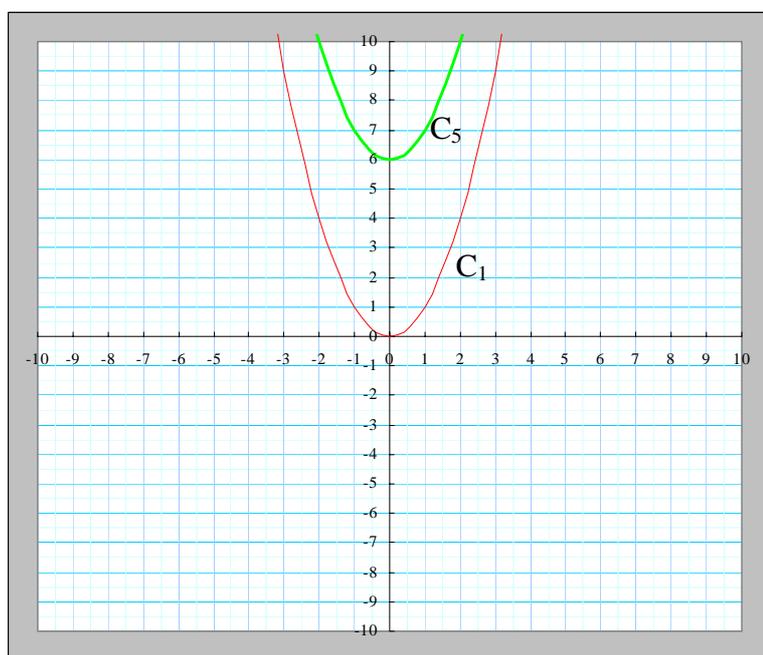


圖中所示為二次函數 $C_1 : y = x^2$ 及 C_4 的圖像。

(a) C_4 的圖像是將 C_1 向 上 / 下 移動 _____ 個單位。

(b) C_4 的方程是 _____。

4.



圖中所示為二次函數 $C_1 : y = x^2$ 及 C_5 的圖像。

(a) C_5 的圖像是將 C_1 向 上 / 下 移動 _____ 個單位。

(b) C_5 的方程是 _____。

5. 試寫出下列各函數變換所對應的圖像。

	方程 C_1	向上 / 下移動	經平移後 C_2 的方程
(a)	$y = x^2 + 1$	向上 / 下 * 移動 _____ 單位	$y = x^2 + 3$
(b)	$y = x^2 + 5$	向上 / 下 * 移動 _____ 單位	$y = x^2 + 2$
(c)	$y = x^2 + x$	向上 / 下 * 移動 _____ 單位	$y = x^2 + x + 1$
(d)	$y = x^2 + 2x + 1$	向上 / 下 * 移動 _____ 單位	$y = x^2 + 2x + 3$
(e)	$y = x^3 + 1$	向上 / 下 * 移動 _____ 單位	$y = x^3 + 4$
(f)	$y = f(x)$	向上 / 下 * 移動 _____ 單位	$y = f(x) + k$
(g)	$y = x^2$	向上 / 下 * 移動 _____ 單位	$y = x^2 - 4$
(h)	$y = x^2 + 2$	向上 / 下 * 移動 _____ 單位	$y = x^2 - 3$
(i)	$y = x^2 - 3$	向上 / 下 * 移動 _____ 單位	$y = x^2 - 8$
(j)	$y = x^2 - 5$	向上 / 下 * 移動 _____ 單位	$y = x^2 - 7$
(k)	$y = x^2 + 3x - 1$	向上 / 下 * 移動 _____ 單位	$y = x^2 + 3x + 5$
(l)	$y = x^3 - 4$	向上 / 下 * 移動 _____ 單位	$y = x^3 - 5$
(m)	$y = f(x)$	向上 / 下 * 移動 _____ 單位	$y = f(x) - k$

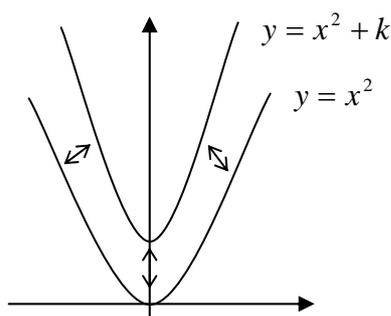
* 圈出適用者

6. 試寫出下列各函數變換所對應的圖像方程。

	方程 C_1	向上 / 下移動	經平移後 C_2 的方程
(a)	$y = x^2 + 1$	向上移動 8 單位	
(b)	$y = x^2 - 1$	向上移動 9 單位	
(c)	$y = x^2 + 2x + 3$	向上移動 10 單位	
(d)	$y = 3x^2 - x + 1$	向上移動 7 單位	
(e)	$y = x^3 + 2$	向上移動 2 單位	
(f)	$y = x^3 - 2$	向上移動 6 單位	
(g)	$y = f(x)$	向上移動 k 單位	
(h)	$y = x^2 - 4$	向下移動 12 單位	
(i)	$y = x^2 + 1$	向下移動 4 單位	
(j)	$y = x^2 + x$	向下移動 3 單位	
(k)	$y = x^2 + 7x - 3$	向下移動 1 單位	
(l)	$y = x^3 - 1$	向下移動 2 單位	
(m)	$y = f(x)$	向下移動 k 單位	

教師注意事項：

1. 本示例活動需時約 30-40 分鐘。
2. 教師在學生計算工作紙 1 及 2 的表內的值時，可考慮不提供數值，完全由學生計算對應的 y 值。本示例提供部分 y 值以減省學生運算的時間。然而，學生透過計算數值及親手畫對應圖像，有助他們明白代數式、表列值與圖像的關係。同時部分學生亦可透過表列值已可觀察到給出 C_1 的 y 值加上 3 便可得到第 1 題內表 C_2 的對應 y 值。
3. 若教師要求所有學生都繪畫 $y = x^2 + 3$ 或 $y = x^2 - 6$ 圖像，會極耗時。教師可考慮同時請半班學生繪畫 $y = x^2 + 3$ ，另外半班學生畫 $y = x^2 - 6$ ，惟須與學生核對兩個圖像的正確畫法。
4. 部分學生會以為 $y = x^2$ 圖像上移 / 下移時，圖像會如下：



教師須提醒學生須比較兩幅圖像點上同一 x 坐標， y 坐標是上移 / 下移同一數量的單位，而並不是兩幅圖像如上圖般有相同的距離。教師可使用膠片示範圖像的上移使學生更能了解是將圖 $y = x^2$ 上移某一單位，其對應圖像並不如上圖所示。學生可因此而理解此錯誤。

5. 學生在求經變換後的新代數式時，往往會以為每一項都加上固定單位如 $y = x^2 + x$ 上移 3 單位變成 $y = (x^2 + 3) + (x + 3)$ 。教師可利用軟件比較 $y = (x^2 + 3) + (x + 3)$ 與 $y = x^2 + x$ ，從而讓學生掌握有關代數式的變化。
6. 學生在比較 $C_1: y = x^2 - 1$ 與 $C_2: y = x^2 - 3$ 時，可能不懂如何入手，教師可建議學生將 $C_2: y = x^2 - 3$ 變成 $y = (x^2 - 1) - 2$ ，從而判斷出下降兩個單位。

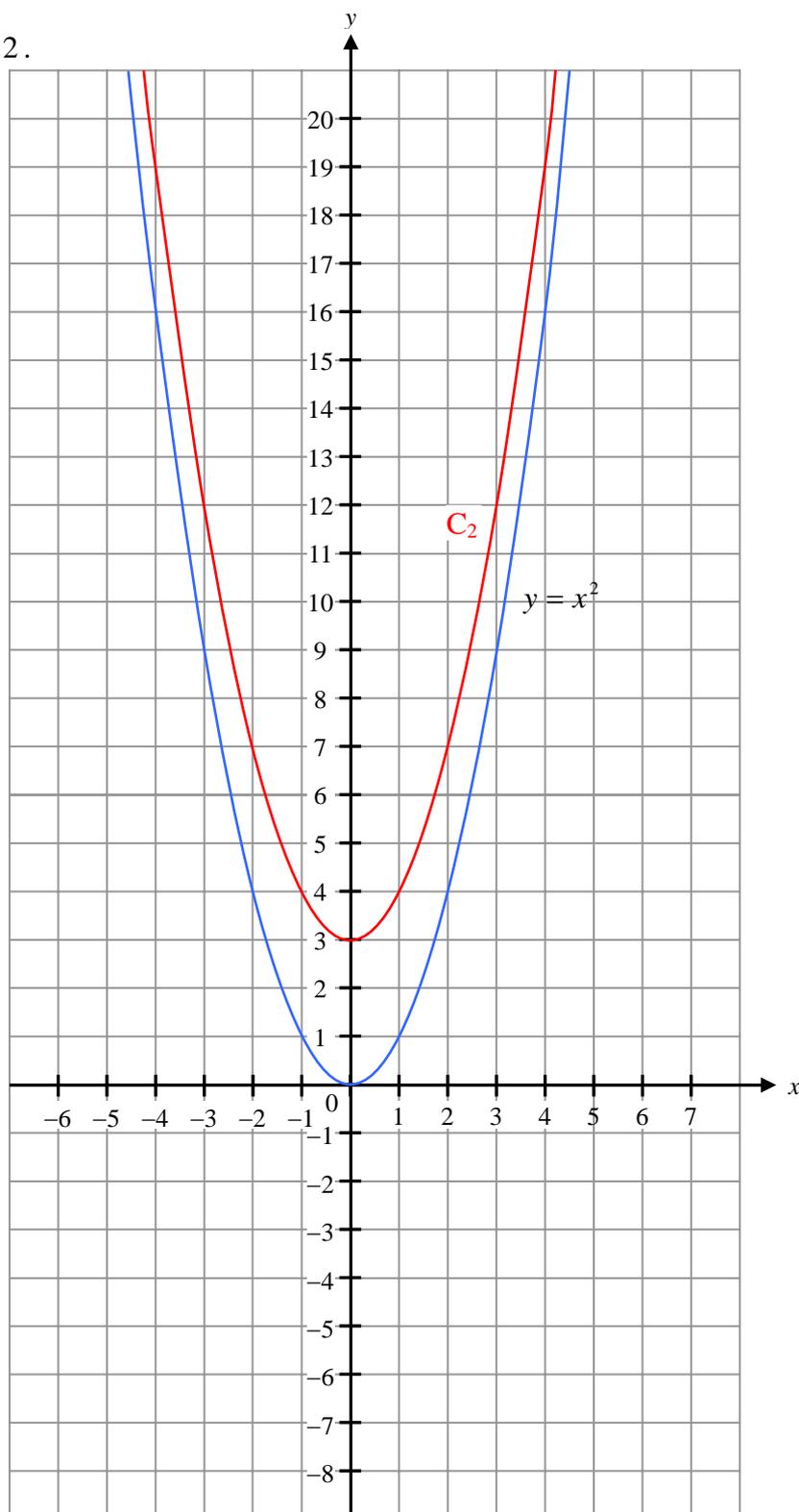
7. 工作紙建議答案如下：

工作紙 1

1. 試完成下表。

x	C_1 $y = x^2$	C_2 $y = x^2 + 3$
-4	16	19
-3	9	12
-2	4	7
-1	1	4
0	0	3
1	1	4
2	4	7
3	9	12
4	16	19

2.

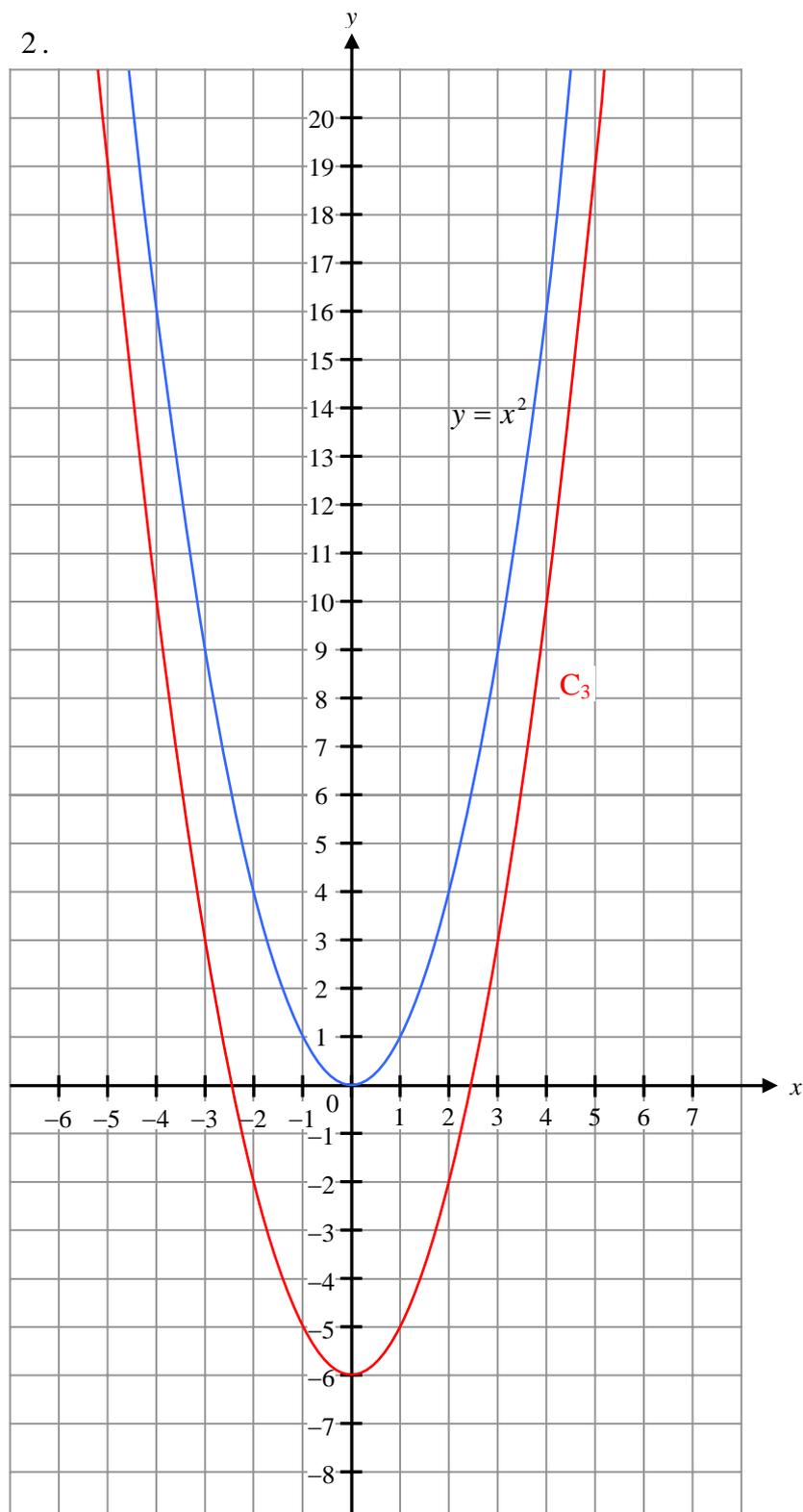


工作紙 2

1. 試完成下表。

x	C_1 $y = x^2$	C_3 $y = x^2 - 6$
-4	16	10
-3	9	3
-2	4	-2
-1	1	-5
0	0	-6
1	1	-5
2	4	-2
3	9	3
4	16	10

2.



工作紙 3

1. (a) C_2 的圖像是將 C_1 向 上 / 下 移動 5 個單位。
(b) C_2 的方程是 $y = x^2 - 5$ 。
2. (a) C_3 的圖像是將 C_1 向 上 / 下 移動 9 個單位。
(b) C_3 的方程是 $y = x^2 - 9$ 。
3. (a) C_4 的圖像是將 C_1 向 上 / 下 移動 4 個單位。
(b) C_4 的方程是 $y = x^2 + 4$ 。
4. (a) C_5 的圖像是將 C_1 向 上 / 下 移動 6 個單位。
(b) C_5 的方程是 $y = x^2 + 6$ 。

5. 試寫出下列各函數變換所對應的圖像

	方程 C_1	向上/下*移動	經平移後 C_2 的方程
(a)	$y = x^2 + 1$	向 \oplus /下*移動 <u>2</u> 單位	$y = x^2 + 3$
(b)	$y = x^2 + 5$	向上/ \ominus *移動 <u>3</u> 單位	$y = x^2 + 2$
(c)	$y = x^2 + x$	向 \oplus /下*移動 <u>1</u> 單位	$y = x^2 + x + 1$
(d)	$y = x^2 + 2x + 1$	向 \oplus /下*移動 <u>2</u> 單位	$y = x^2 + 2x + 3$
(e)	$y = x^3 + 1$	向 \oplus /下*移動 <u>3</u> 單位	$y = x^3 + 4$
(f)	$y = f(x)$	向 \oplus /下*移動 <u>k</u> 單位	$y = f(x) + k$
(g)	$y = x^2$	向上/ \ominus *移動 <u>4</u> 單位	$y = x^2 - 4$
(h)	$y = x^2 + 2$	向上/ \ominus *移動 <u>5</u> 單位	$y = x^2 - 3$
(i)	$y = x^2 - 3$	向上/ \ominus *移動 <u>5</u> 單位	$y = x^2 - 8$
(j)	$y = x^2 - 5$	向上/ \ominus *移動 <u>2</u> 單位	$y = x^2 - 7$
(k)	$y = x^2 + 3x - 1$	向 \oplus /下*移動 <u>6</u> 單位	$y = x^2 + 3x + 5$
(l)	$y = x^3 - 4$	向上/ \ominus *移動 <u>1</u> 單位	$y = x^3 - 5$
(m)	$y = f(x)$	向上/ \ominus *移動 <u>k</u> 單位	$y = f(x) - k$

* 圈出適用者

6. 試寫出下列各函數變換所對應的圖像方程。

	方程 C_1	向上 / 下移動	經平移後 C_2 的 方程
(a)	$y = x^2 + 1$	向上移動 8 單位	$y = x^2 + 9$
(b)	$y = x^2 - 1$	向上移動 9 單位	$y = x^2 + 8$
(c)	$y = x^2 + 2x + 3$	向上移動 10 單位	$y = x^2 + 2x + 13$
(d)	$y = 3x^2 - x + 1$	向上移動 7 單位	$y = 3x^2 - x + 8$
(e)	$y = x^3 + 2$	向上移動 2 單位	$y = x^3 + 4$
(f)	$y = x^3 - 2$	向上移動 6 單位	$y = x^3 + 4$
(g)	$y = f(x)$	向上移動 k 單位	$y = f(x) + k$
(h)	$y = x^2 - 4$	向下移動 12 單位	$y = x^2 - 16$
(i)	$y = x^2 + 1$	向下移動 4 單位	$y = x^2 - 3$
(j)	$y = x^2 + x$	向下移動 3 單位	$y = x^2 + x - 3$
(k)	$y = x^2 + 7x - 3$	向下移動 1 單位	$y = x^2 + 7x - 4$
(l)	$y = x^3 - 1$	向下移動 2 單位	$y = x^3 - 3$
(m)	$y = f(x)$	向下移動 k 單位	$y = f(x) - k$

鳴謝：本示例大部分教學活動取材自中華聖潔會靈風中學，蒙學校慷慨允許於本教學資源套印出，謹此致謝。