

## 示例九：變換對函數圖像的影響（二）

**目標**：認識函數圖像的水平平移與代數式對應的變化

**學習階段**：4

**學習單位**：函數及其圖像

**所需教材**：(1) 試算表軟件如微軟 *Excel* (*graph.xls*)，繪圖軟件如 *Graphmatica* 和工作紙  
(2) 印有  $y = x^2$  及  $y = x^3$  圖像的膠片及圖表紙

**預備知識**：(1) 認識  $f(x) = x^2$  的圖像  
(2) 懂得繪畫圖像

**教學內容**：

1. 教師與學生重溫  $y = f(x)$  與  $y = f(x) + k$  圖像的關係，並用例子如  $y = f(x) + 3$  考查學生對函數上下平移的認識。
2. 教師讓學生猜測圖像  $y = f(x+3)$  與  $y = f(x)$  有何關係，然後再利用工作紙 1，讓學生完成表內  $x$ 、 $y$  數值及繪出對應圖像。
3. 待學生完成工作紙 1 後，教師與學生討論  $y = x^2$  與  $y = (x+3)^2$  兩者圖像的分別，其中可指出  $y = (x+3)^2$  圖像是  $y = x^2$  圖像左移 3 格而非學生初步猜測為右移 3 格。
4. 若學生難以觀察為左移變動，教師可讓學生使用  $y = x^2$  圖像膠片作移動，並比較他們所畫圖像。
5. 教師讓學生猜想  $y = (x-3)^2$  的圖像與  $y = x^2$  圖像有何關係。教師可讓學生完成工作紙 2 以驗證他們的猜想。
6. 教師待學生完成工作紙 2 後，與學生討論答案並利用 *graph.xls* 軟件展示不同二次及三次函數， $y = f(x)$  與  $y = f(x+h)$  圖像的關

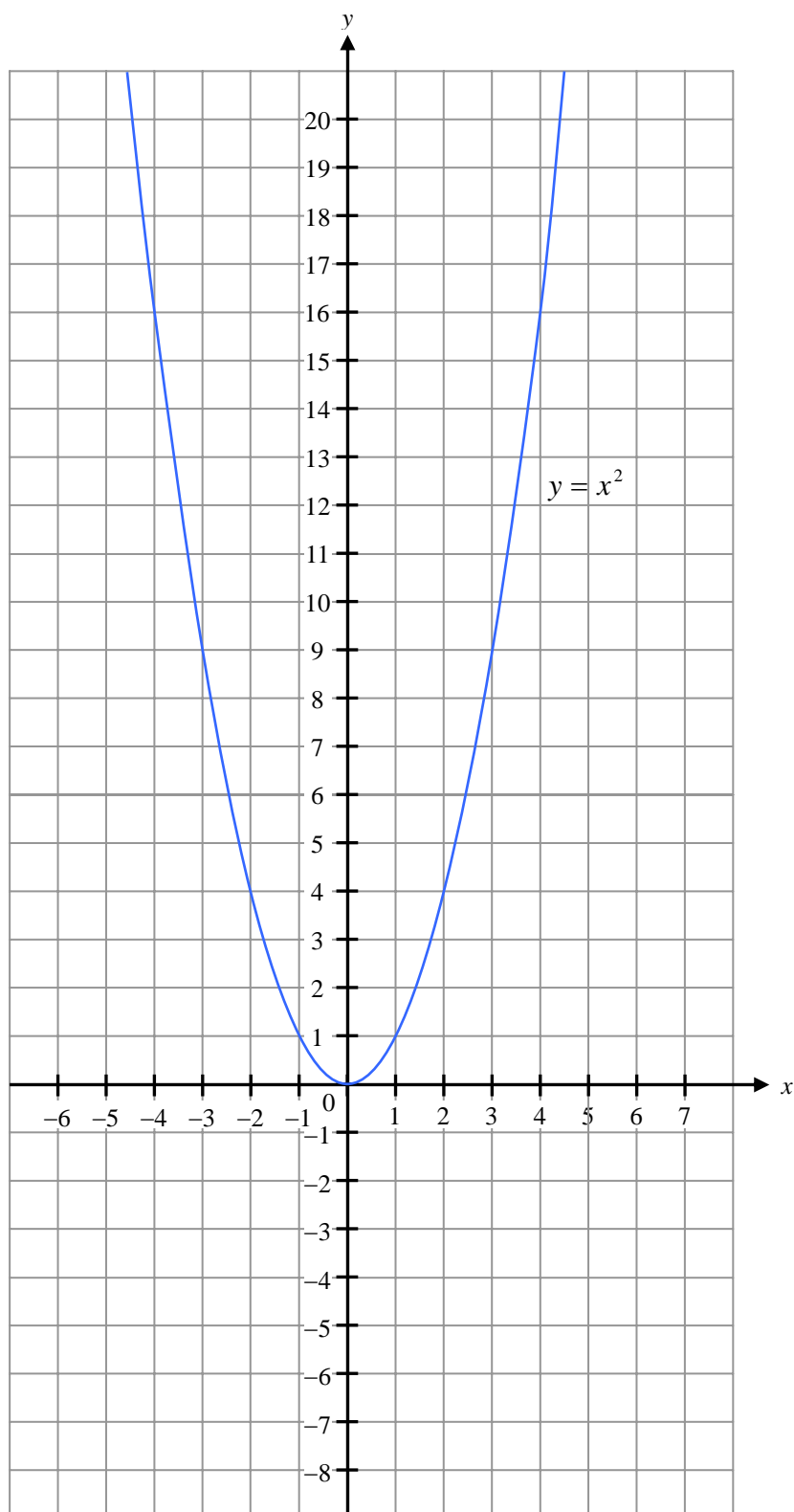
- 係。教師可透過軟件讓學生比較兩個函數
- (a) 表上  $x$ 、 $y$  坐標的分別；
  - (b) 圖像的分別及圖像上各對應點  $x$ 、 $y$  坐標的分別；
  - (c) 代數式的分別。
7. 教師可進一步利用 *Graphmatica* 軟件繪畫其他函數圖像如，
- (a)  $y = x^4$  與  $y = (x+3)^4$  圖像；
  - (b)  $y = \tan x$  與  $y = \tan(x+90^\circ)$  圖像。
- 從而總結，當  $h > 0$ ，
- (i)  $y = f(x+h)$  是將函數  $y = f(x)$  圖像左移  $h$  單位。
  - (ii)  $y = f(x-h)$  是將函數  $y = f(x)$  圖像右移  $h$  單位。
8. 教師透過工作紙 3 第 1 至第 4 題，讓學生由給出圖像的變化，寫出對應的代數式。再利用第 4 題及第 5 題的習題，讓學生鞏固
- (a) 由代數式變化寫出對應圖像的變化；
  - (b) 由圖像的變化寫出對應代數式的變化。
9. 教師待學生完成後，可與學生透過以下遊戲讓學生鞏固函數變換（平移），代數式與圖像的關係。
- (a) 教師可用繪有  $y = x^2$  的直角坐標平面的膠片；
  - (b) 教師再將  $y = x^2$  圖像平移至不同位置，學生按分組討論並於黑板寫下對應的代數式；
  - (c) 同樣地，教師寫出不同的代數式，著每組用  $y = x^2$  或  $y = x^3$  圖像的膠片移出對應的位置；
  - (d) 按每題，每組寫出正確答案得 2 分，錯誤答案扣 1 分。最快 1 組得 10 分勝出。
10. 當學生已相對熟識函數水平平移變換圖像與代數式的關係，教師可考慮將鉛垂平移與水平平移活動結合一起進行，並可考慮函數圖像經兩個變換（如第一次變換為鉛垂平移而第二次變換為水平平移）後，要求學生寫出對應的代數式。活動形式可與第 9 題相若，然後再透過工作紙 4 鞏固學生對圖像變化與代數式轉變的關係。

## 工作紙 1

1. 試完成下表。

$x$	$C_1$ $y = x^2$	$C_2$ $y = (x + 3)^2$
-4	16	1
-3	9	
-2	4	
-1	1	4
0	0	
1	1	
2	4	25
3	9	36
4	16	49

2. 在右圖上，繪出新的圖像  $C_2$ 。

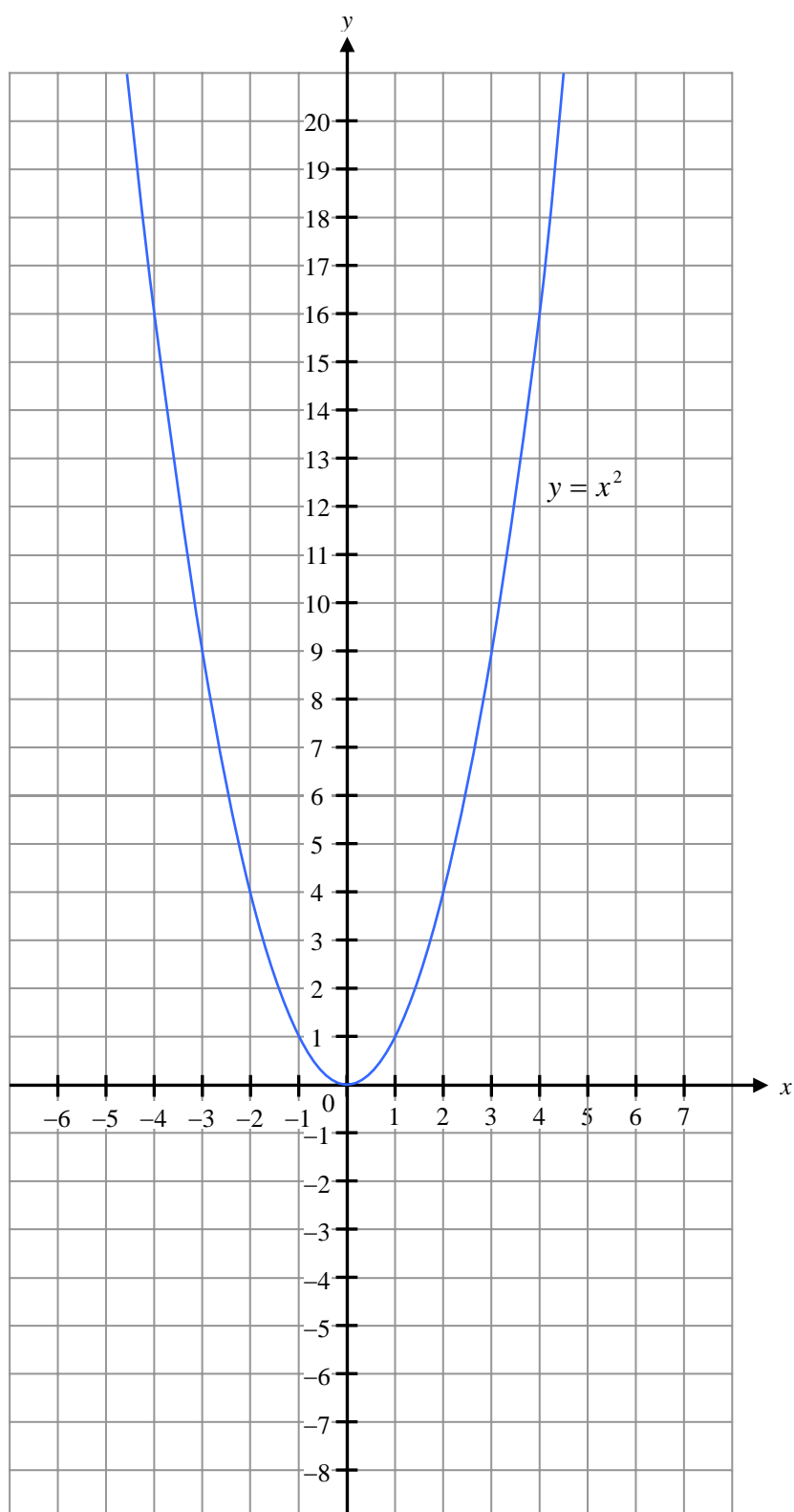


## 工作紙 2

1. 試完成下表。

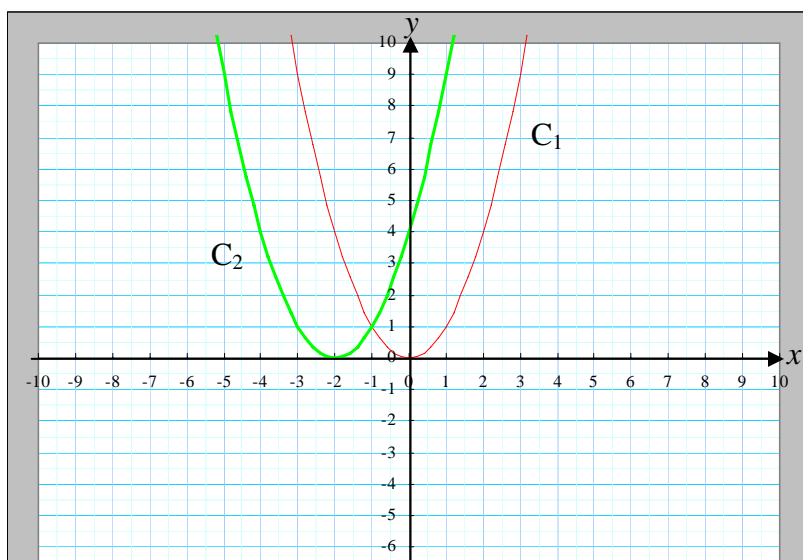
$x$	$C_1$ $y = x^2$	$C_3$ $y = (x-2)^2$
-4	16	36
-3	9	
-2	4	
-1	1	9
0	0	
1	1	
2	4	0
3	9	
4	16	4

2. 在右圖上，繪出新的圖像  $C_3$ 。



## 工作紙 3

1.

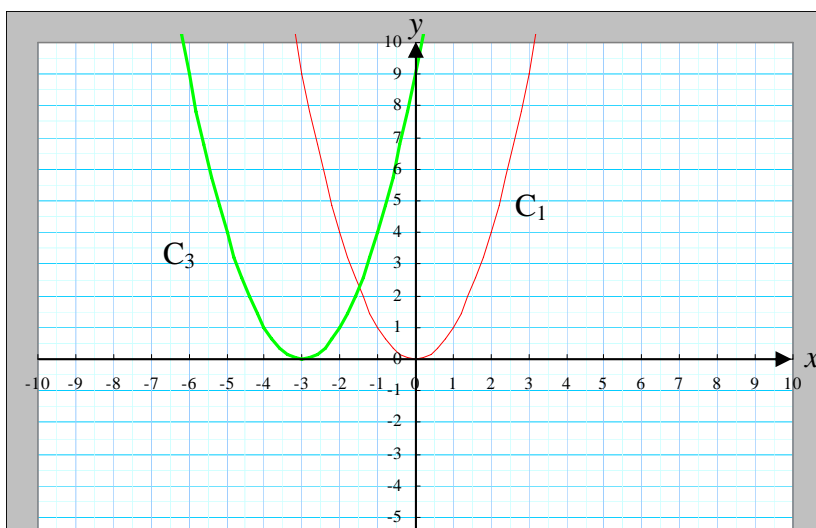


圖中所示為二次函數  $C_1: y = x^2$  及  $C_2$  的圖像。

(a)  $C_2$  的圖像是將  $C_1$  向 左 / 右 \* 移動 \_\_\_\_\_ 個單位。

(b)  $C_2$  的方程是 \_\_\_\_\_。

2.



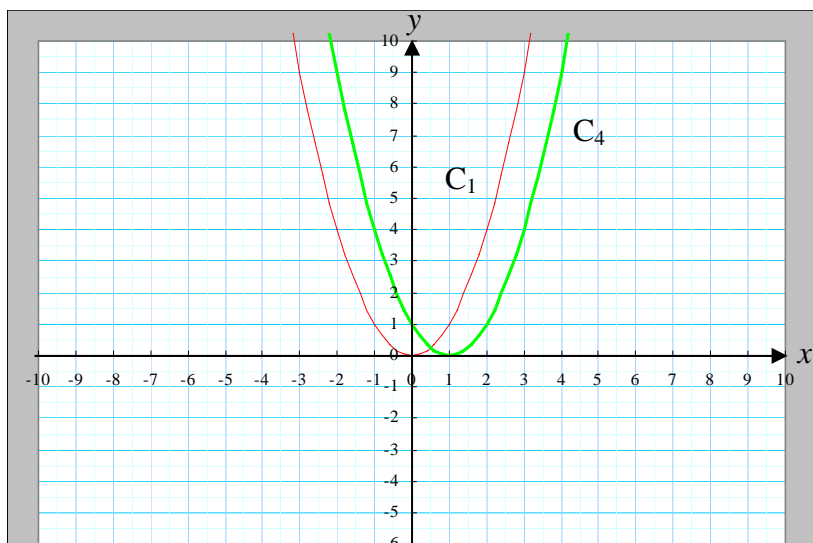
圖中所示為二次函數  $C_1: y = x^2$  及  $C_3$  的圖像。

(a)  $C_3$  的圖像是將  $C_1$  向 左 / 右 \* 移動 \_\_\_\_\_ 個單位。

(b)  $C_3$  的方程是 \_\_\_\_\_。

\* 刪去不適用者

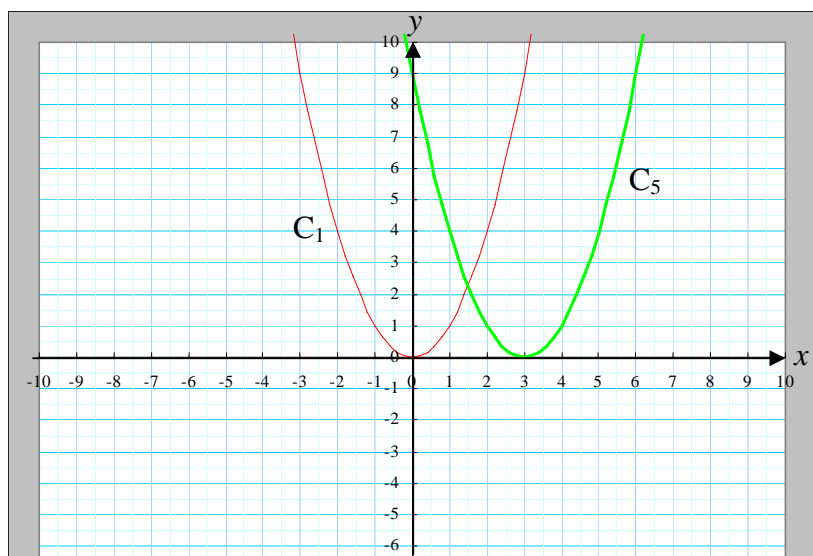
3.



圖中所示為二次函數  $C_1: y = x^2$  及  $C_4$  的圖像。

- (a)  $C_4$  的圖像是將  $C_1$  向 左 / 右 \* 移動 \_\_\_\_\_ 個單位。  
 (b)  $C_4$  的方程是 \_\_\_\_\_。

4.



圖中所示為二次函數  $C_1: y = x^2$  及  $C_5$  的圖像。

- (a)  $C_5$  的圖像是將  $C_1$  向 左 / 右 \* 移動 \_\_\_\_\_ 個單位。  
 (b)  $C_5$  的方程是 \_\_\_\_\_。

\* 刪去不適用者

5. 試寫出下列各函數變換所對應的圖像變化。

	原有方程 $C_1$	水平平移	新的方程 $C_2$
(a)	$y = x^2$	向右移動 _____ 單位	$y = (x-3)^2$
(b)	$y = x^2 + 1$	向右移動 _____ 單位	$y = (x-7)^2 + 1$
(c)	$y = x^2 + x$	向右移動 _____ 單位	$y = (x-2)^2 + (x-2)$
(d)	$y = x^2 - x$	向右移動 _____ 單位	$y = (x-1)^2 - (x-1)$
(e)	$y = x^2 + x + 3$	向右移動 _____ 單位	$y = (x-5)^2 + (x-5) + 3$
(f)	$y = x^3$	向右移動 _____ 單位	$y = (x-9)^3$
(g)	$y = x^3 + 7$	向右移動 _____ 單位	$y = (x-12)^3 + 7$
(h)	$y = x^2$	向左移動 _____ 單位	$y = (x+5)^2$
(i)	$y = x^2 + 1$	向左移動 _____ 單位	$y = (x+7)^2 + 1$
(j)	$y = x^2 + x$	向左移動 _____ 單位	$y = (x+1)^2 + (x+1)$
(k)	$y = 3x^2 + 2x$	向左移動 _____ 單位	$y = 3(x+5)^2 + 2(x+5)$
(l)	$y = x^3$	向左移動 _____ 單位	$y = (x+2)^3$
(m)	$y = f(x)$	向右/左*移動 _____ 單位	$y = f(x-h)$
(n)	$y = f(x)$	向右/左*移動 _____ 單位	$y = f(x+h)$
(o)	$y = x^2$	向右/左*移動 _____ 單位	$y = (x-12)^2$
(p)	$y = x^2$	向右/左*移動 _____ 單位	$y = (x+2)^2$
(q)	$y = x^2 + 3x$	向右/左*移動 _____ 單位	$y = (x-5)^2 + 3(x-5)$
(r)	$y = x^2 + 3x$	向右/左*移動 _____ 單位	$y = (x+3)^2 + 3(x+3)$
(s)	$y = x^2 - 5x - 7$	向右/左*移動 _____ 單位	$y = (x+2)^2 - 5(x+2) - 7$
(t)	$y = x^3 + 4x^2 + 1$	向右/左*移動 _____ 單位	$y = (x-7)^3 + 4(x-7)^2 + 1$

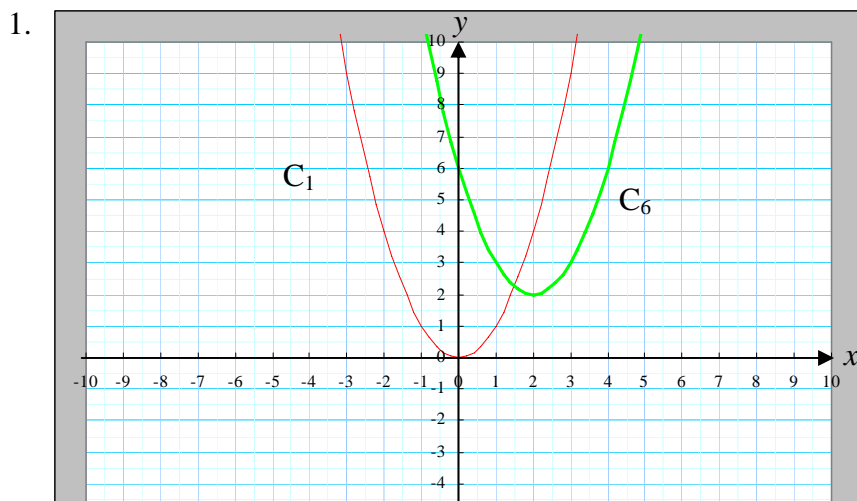
\* 刪去不適用者

6. 由此寫出下列各函數變換所對應的圖像方程。

	原有方程 $C_1$	水平平移	新的方程 $C_2$
(a)	$y = x^2$	向右移動 8 單位	
(b)	$y = x^3$	向右移動 5 單位	
(c)	$y = x^2 + 1$	向右移動 5 單位	
(d)	$y = x^2 - x$	向右移動 3 單位	
(e)	$y = x^2 + 3x + 2$	向右移動 7 單位	
(f)	$y = x^3 + 3x^2 + 2x - 5$	向右移動 7 單位	
(g)	$y = x^2$	向左移動 4 單位	
(h)	$y = x^2 + 1$	向左移動 2 單位	
(i)	$y = x^3 + x$	向左移動 4 單位	
(j)	$y = x^2 + 3x + 2$	向左移動 5 單位	
(k)	$y = x^3 - x^2 + x + 1$	向左移動 7 單位	
(l)	$y = f(x)$	向右移動 $h$ 單位	
(m)	$y = f(x)$	向左移動 $h$ 單位	
(n)	$y = x^4$	向左移動 6 單位	
(o)	$y = x^2 + 5x$	向右移動 4 單位	
(p)	$y = x^3 + 2x$	向左移動 3 單位	

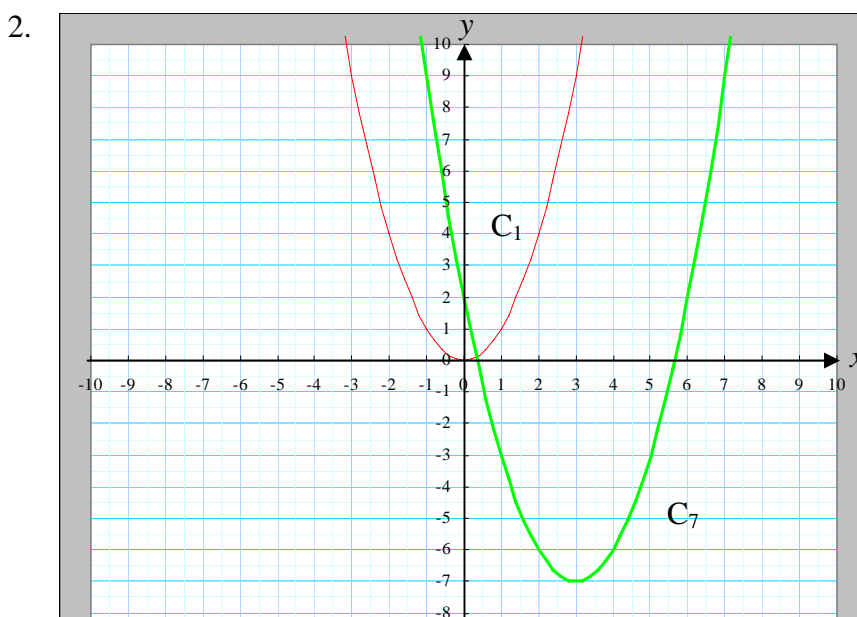


## 工作紙 4



圖中所示為二次函數  $C_1: y = x^2$  及  $C_6$  的圖像。

- (a)  $C_6$  的圖像是將  $C_1$  向 左 / 右 \* 移動 \_\_\_\_\_ 個單位及 上 / 下 \* 移動 \_\_\_\_\_ 個單位。
- (b)  $C_6$  的方程是 \_\_\_\_\_。



圖中所示為二次函數  $C_1: y = x^2$  及  $C_7$  的圖像。

- (a)  $C_7$  的圖像是將  $C_1$  向 左 / 右 \* 移動 \_\_\_\_\_ 個單位及 上 / 下 \* 移動 \_\_\_\_\_ 個單位。
- (b)  $C_7$  的方程是 \_\_\_\_\_。

\* 刪去不適用者

3. 試寫出下列各函數所對應的圖像。

	原有方程 $C_1$	水平平移	鉛垂平移	新的方程 $C_2$
(a)	$y = x^2$	左 / 右* _____單位	上 / 下* _____單位	$y = (x-3)^2 - 4$
(b)	$y = x^2$	左 / 右* _____單位	上 / 下* _____單位	$y = (x+3)^2 + 4$
(c)	$y = x^3$	左 / 右* _____單位	上 / 下* _____單位	$y = (x-4)^3 + 3$
(d)	$y = x^3$	左 / 右* _____單位	上 / 下* _____單位	$y = (x+6)^3 + 4$
(e)	$y = x^3$	左 / 右* _____單位	上 / 下* _____單位	$y = (x-12)^3 - 5$
(f)	$y = f(x)$	左 / 右* _____單位	上 / 下* _____單位	$y = f(x+h) + k$ 當 $h > 0, k > 0$
(g)	$y = f(x)$	左 / 右* _____單位	上 / 下* _____單位	$y = f(x+h) - k$ 當 $h > 0, k > 0$

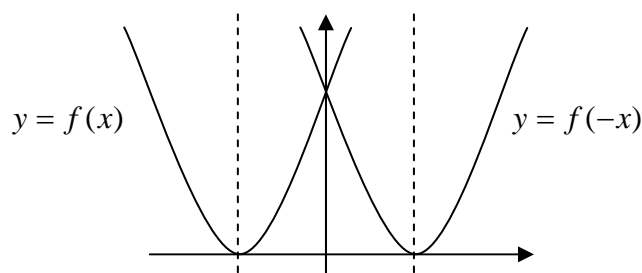
\* 刪去不適用者

4. 試寫出下列各函數所對應的圖像

	原有方程 $C_1$	水平平移	鉛垂平移	新的方程 $C_2$
(a)	$y = x^2$	向右移動 10 單位	向上移動 1 單位	
(b)	$y = x^2$	向右移動 8 單位	向下移動 2 單位	
(c)	$y = x^2$	向左移動 1 單位	向上移動 7 單位	
(d)	$y = x^2$	向左移動 12 單位	向下移動 1 單位	
(e)	$y = x^2 + x - 1$	向右移動 10 單位	向下移動 20 單位	
(f)	$y = x^3$	向左移動 1 單位	向上移動 3 單位	
(g)	$y = x^3$	向右移動 3 單位	向下移動 1 單位	
(h)	$y = x^3 - 4x + 3$	向左移動 10 單位	向下移動 20 單位	
(i)	$y = f(x)$	向左移動 $h$ 單位	向上移動 $k$ 單位	
(j)	$y = f(x)$	向右移動 $h$ 單位	向下移動 $k$ 單位	
(k)	$y = f(x)$	向右移動 $h$ 單位	向上移動 $k$ 單位	

## 教師注意事項：

1. 本示例活動需時約 40-50 分鐘。
2. 學生在學習水平平移時，往往混淆  $y = f(x+h)$  ( $h > 0$ ) 為圖像右移，而當  $h < 0$  時，圖像會左移。這與學生對數線概念認識相關。因數線上數字在右方較左方為大。教師可考慮以表列數字（工作紙 1）讓學生初步認識圖像水平移與代數式的關係。然後可帶出新圖像只須輸入較小的值便得出同一個輸出值，故此對應新代數式的輸入值與輸出值的圖像便左移了。
3. 教師在以二次函數如  $y = (x-1)^2$  圖像作水平平移為  $y = (x+1)^2$  時，有部分時候學生會答是反射，而事實上  $y = [(-x)+1]^2$  的展開式與  $y = (x-1)^2$  是相同的。



因此，教師須適當選擇合適的二次函數及其對應的變換。若有需要，亦可選擇三次函數討論水平平移。

4. 教師宜提醒學生留意變換對直線函數的影響是十分容易引起混淆的。在直線的圖像上，並不容易分辨鉛垂平移和水平平移的分別，換言之，學生較難比較  $f(x)+k$  與  $f(x+k)$  在線性圖像上的分別。在多項式函數（包括直線和二次函數）的圖像上，也不容易分辨沿  $y$  軸方向的伸縮和沿  $x$  軸方向的伸縮的分別，換言之，學生較難比較  $f(kx)$  與  $kf(x)$  在圖像上的分別。
5. 在討論函數變換平移的具體例子時，教師可選擇示例十一（電話收費服務）作討論，這有助學生掌握  $y = f(x+h)$  水平平移的概念。

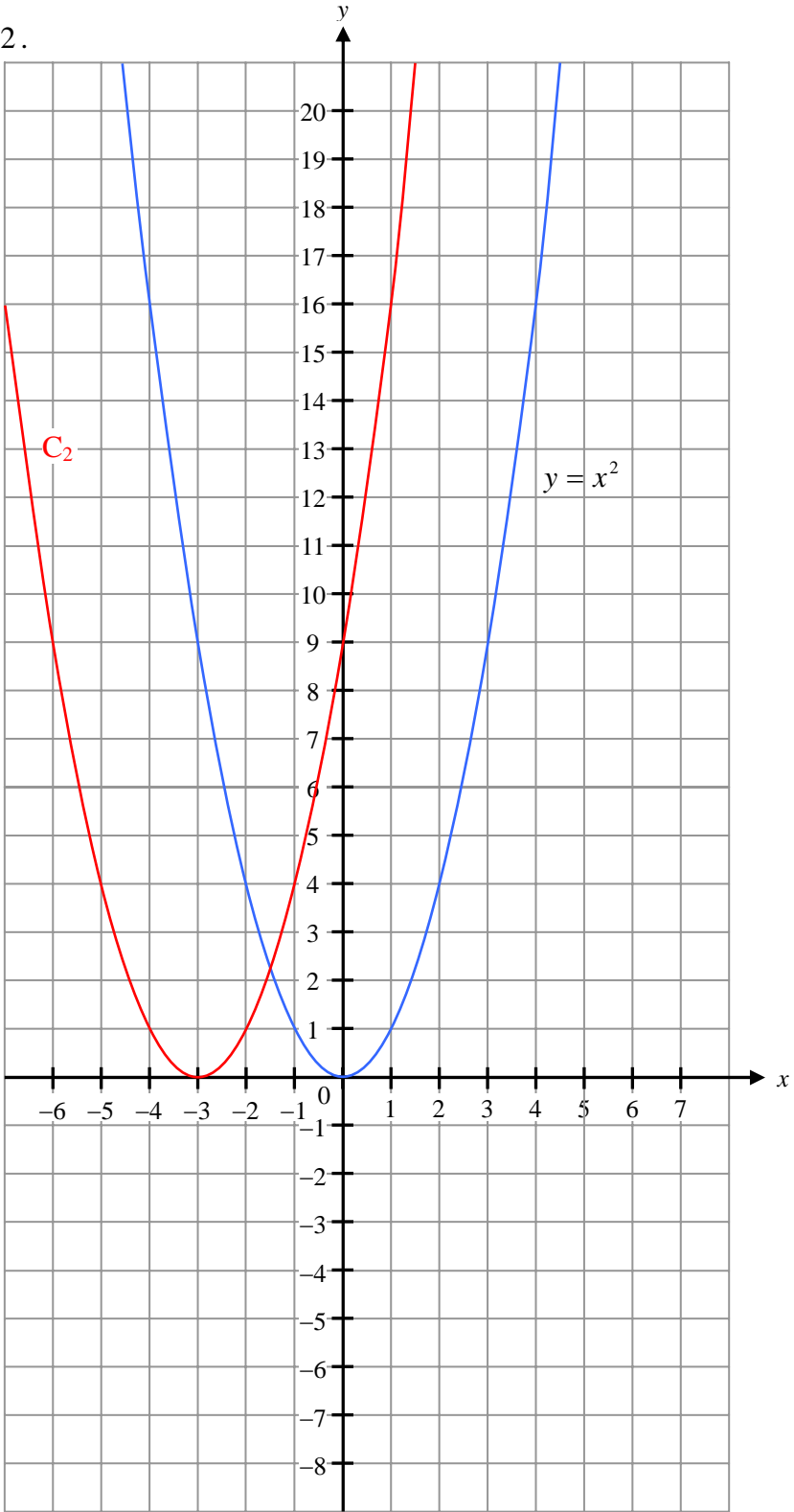
6. 工作紙建議答案如下：

工作紙 1

1. 試完成下表。

$x$	$C_1$ $y = x^2$	$C_2$ $y = (x + 3)^2$
-4	16	1
-3	9	0
-2	4	1
-1	1	4
0	0	9
1	1	16
2	4	25
3	9	36
4	16	49

2.



註：  
 部分學生會在  $x = -5$  及  $x = -6$  上沒有對應的  $y$  坐標，故會漏畫對應曲線部分，因此學生未能觀察新圖像是由圖像  $y = x^2$  平移得出。

## 工作紙 2

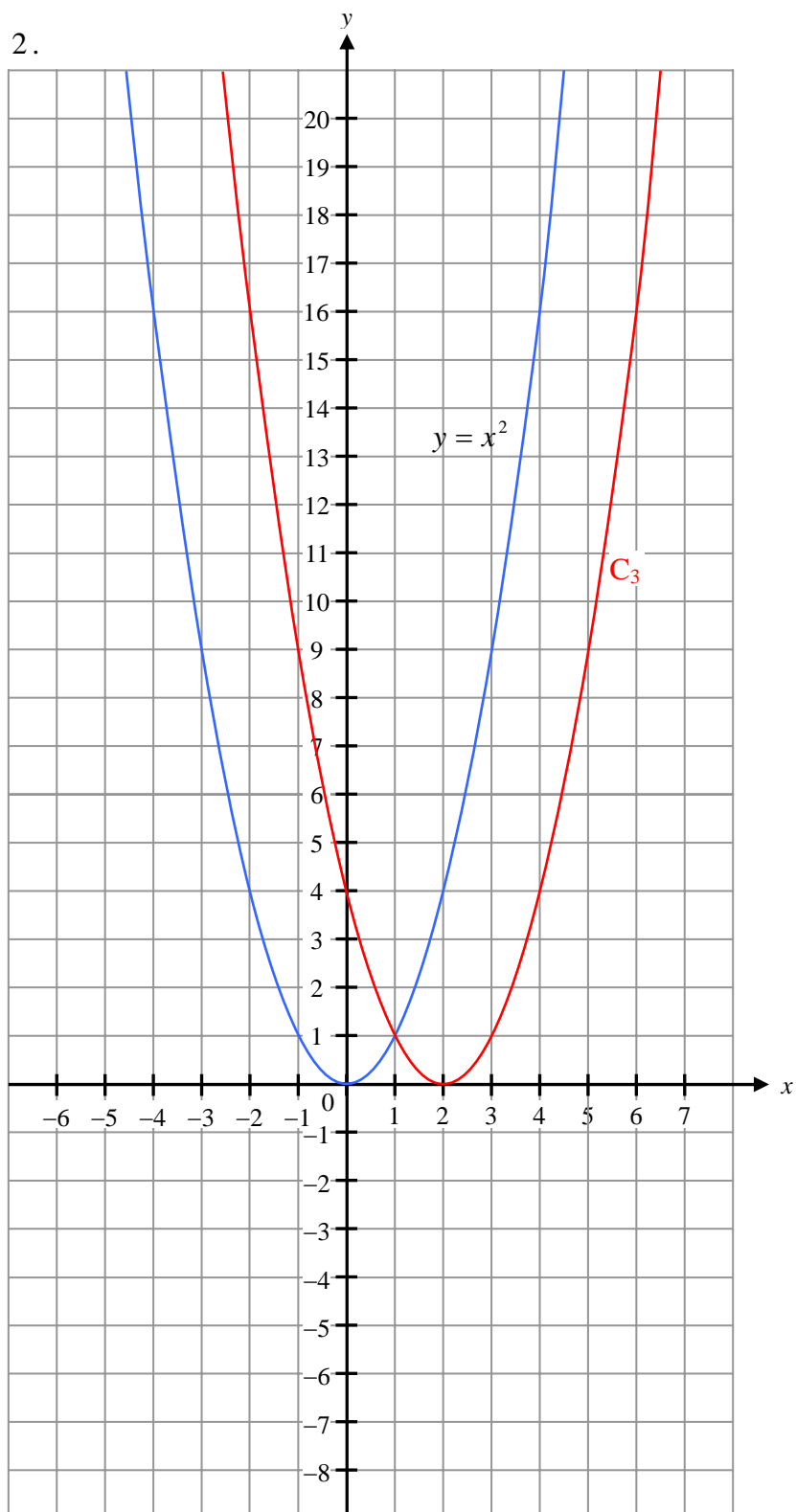
1. 試完成下表。

$x$	$C_1$ $y = x^2$	$C_3$ $y = (x-2)^2$
-4	16	36
-3	9	25
-2	4	16
-1	1	9
0	0	4
1	1	1
2	4	0
3	9	1
4	16	4

註：

部分學生會在  $x = -5$  及  $x = -6$  上沒有對應的  $y$  坐標，故會漏畫對應曲線部分，因此學生未能觀察新圖像是由圖像  $y = x^2$  平移得出。

2.



## 工作紙 3

1. (a)  $C_2$  的圖像是將  $C_1$  向 左 / 右 移動 2 個單位。  
(b)  $C_2$  的方程是  $y = (x+2)^2$ 。
  
2. (a)  $C_3$  的圖像是將  $C_1$  向 左 / 右 移動 3 個單位。  
(b)  $C_3$  的方程是  $y = (x+3)^2$ 。
  
3. (a)  $C_4$  的圖像是將  $C_1$  向 左 / 右 移動 1 個單位。  
(b)  $C_4$  的方程是  $y = (x-1)^2$ 。
  
4. (a)  $C_5$  的圖像是將  $C_1$  向 左 / 右 移動 3 個單位。  
(b)  $C_5$  的方程是  $y = (x-3)^2$ 。

5. 試寫出下列各函數變換所對應的圖像。

	原有方程 $C_1$	水平平移	新的方程 $C_2$
(a)	$y = x^2$	向右移動 <u>3</u> 單位	$y = (x-3)^2$
(b)	$y = x^2 + 1$	向右移動 <u>7</u> 單位	$y = (x-7)^2 + 1$
(c)	$y = x^2 + x$	向右移動 <u>2</u> 單位	$y = (x-2)^2 + (x-2)$
(d)	$y = x^2 - x$	向右移動 <u>1</u> 單位	$y = (x-1)^2 - (x-1)$
(e)	$y = x^2 + x + 3$	向右移動 <u>5</u> 單位	$y = (x-5)^2 + (x-5) + 3$
(f)	$y = x^3$	向右移動 <u>9</u> 單位	$y = (x-9)^3$
(g)	$y = x^3 + 7$	向右移動 <u>12</u> 單位	$y = (x-12)^3 + 7$
(h)	$y = x^2$	向左移動 <u>5</u> 單位	$y = (x+5)^2$
(i)	$y = x^2 + 1$	向左移動 <u>7</u> 單位	$y = (x+7)^2 + 1$
(j)	$y = x^2 + x$	向左移動 <u>1</u> 單位	$y = (x+1)^2 + (x+1)$
(k)	$y = 3x^2 + 2x$	向左移動 <u>5</u> 單位	$y = 3(x+5)^2 + 2(x+5)$
(l)	$y = x^3$	向左移動 <u>2</u> 單位	$y = (x+2)^3$
(m)	$y = f(x)$	向右/ <u>左</u> *移動 <u><math>h</math></u> 單位	$y = f(x-h)$
(n)	$y = f(x)$	向 <u>右</u> / <u>左</u> *移動 <u><math>h</math></u> 單位	$y = f(x+h)$
(o)	$y = x^2$	向右/ <u>左</u> *移動 <u>12</u> 單位	$y = (x-12)^2$
(p)	$y = x^2$	向 <u>右</u> / <u>左</u> *移動 <u>2</u> 單位	$y = (x+2)^2$
(q)	$y = x^2 + 3x$	向右/ <u>左</u> *移動 <u>5</u> 單位	$y = (x-5)^2 + 3(x-5)$
(r)	$y = x^2 + 3x$	向 <u>右</u> / <u>左</u> *移動 <u>3</u> 單位	$y = (x+3)^2 + 3(x+3)$
(s)	$y = x^2 - 5x - 7$	向 <u>右</u> / <u>左</u> *移動 <u>2</u> 單位	$y = (x+2)^2 - 5(x+2) - 7$
(t)	$y = x^3 + 4x^2 + 1$	向右/ <u>左</u> *移動 <u>7</u> 單位	$y = (x-7)^3 + 4(x-7)^2 + 1$

\* 刪去不適用者

6. 由此寫出下列各函數變換所對應的圖像方程。

	原有方程 $C_1$	水平平移	新的方程 $C_2$
(a)	$y = x^2$	向右移動 8 單位	$y = (x - 8)^2$
(b)	$y = x^3$	向右移動 5 單位	$y = (x - 5)^3$
(c)	$y = x^2 + 1$	向右移動 5 單位	$y = (x - 5)^2 + 1$
(d)	$y = x^2 - x$	向右移動 3 單位	$y = (x - 3)^2 - (x - 3)$
(e)	$y = x^2 + 3x + 2$	向右移動 7 單位	$y = (x - 7)^2 + 3(x - 7) + 2$
(f)	$y = x^3 + 3x^2 + 2x - 5$	向右移動 7 單位	$y = (x - 7)^3 + 3(x - 7)^2 + 2(x - 7) - 5$
(g)	$y = x^2$	向左移動 4 單位	$y = (x + 4)^2$
(h)	$y = x^2 + 1$	向左移動 2 單位	$y = (x + 2)^2 + 1$
(i)	$y = x^3 + x$	向左移動 4 單位	$y = (x + 4)^3 + (x + 4)$
(j)	$y = x^2 + 3x + 2$	向左移動 5 單位	$y = (x + 5)^2 + 3(x + 5) + 2$
(k)	$y = x^3 - x^2 + x + 1$	向左移動 7 單位	$y = (x + 7)^3 - (x + 7)^2 + (x + 7) + 1$
(l)	$y = f(x)$	向右移動 $h$ 單位	$y = f(x - h)$
(m)	$y = f(x)$	向左移動 $h$ 單位	$y = f(x + h)$
(n)	$y = x^4$	向左移動 6 單位	$y = (x + 6)^4$
(o)	$y = x^2 + 5x$	向右移動 4 單位	$y = (x - 4)^2 + 5(x - 4)$
(p)	$y = x^3 + 2x$	向左移動 3 單位	$y = (x + 3)^3 + 2(x + 3)$



## 工作紙 4

1. (a)  $C_6$  的圖像是將  $C_1$  向 左 / 右 移動 2 個單位及 上 / 下 移動 2 個單位。  
 (b)  $C_6$  的方程是  $y = (x-2)^2 + 2$ 。
2. (a)  $C_7$  的圖像是將  $C_1$  向 左 / 右 移動 3 個單位及 上 / 下 移動 7 個單位。  
 (b)  $C_7$  的方程是  $y = (x-3)^2 - 7$ 。

3. 試寫出下列各函數所對應的圖像。

	原有方程 $C_1$	水平平移	鉛垂平移	新的方程 $C_2$
(a)	$y = x^2$	<u>左 / 右</u> * <u>3</u> 單位	<u>上 / 下</u> * <u>4</u> 單位	$y = (x-3)^2 - 4$
(b)	$y = x^2$	<u>左 / 右</u> * <u>3</u> 單位	<u>上 / 下</u> * <u>4</u> 單位	$y = (x+3)^2 + 4$
(c)	$y = x^3$	<u>左 / 右</u> * <u>4</u> 單位	<u>上 / 下</u> * <u>3</u> 單位	$y = (x-4)^3 + 3$
(d)	$y = x^3$	<u>左 / 右</u> * <u>6</u> 單位	<u>上 / 下</u> * <u>4</u> 單位	$y = (x+6)^3 + 4$
(e)	$y = x^3$	<u>左 / 右</u> * <u>12</u> 單位	<u>上 / 下</u> * <u>5</u> 單位	$y = (x-12)^3 - 5$
(f)	$y = f(x)$	<u>左 / 右</u> * <u><math>h</math></u> 單位	<u>上 / 下</u> * <u><math>k</math></u> 單位	$y = f(x+h) + k$ 當 $h > 0, k > 0$
(g)	$y = f(x)$	<u>左 / 右</u> * <u><math>h</math></u> 單位	<u>上 / 下</u> * <u><math>k</math></u> 單位	$y = f(x+h) - k$ 當 $h > 0, k > 0$

\* 刪去不適用者

4. 試寫出下列各函數所對應的圖像

	原有方程 $C_1$	水平平移	鉛垂平移	新的方程 $C_2$
(a)	$y = x^2$	向右移動 10 單位	向上移動 1 單位	$y = (x - 10)^2 + 1$
(b)	$y = x^2$	向右移動 8 單位	向下移動 2 單位	$y = (x - 8)^2 - 2$
(c)	$y = x^2$	向左移動 1 單位	向上移動 7 單位	$y = (x + 1)^2 + 7$
(d)	$y = x^2$	向左移動 12 單位	向下移動 1 單位	$y = (x + 12)^2 - 1$
(e)	$y = x^2 + x - 1$	向右移動 10 單位	向下移動 20 單位	$y = (x - 10)^2 + (x - 10) - 21$
(f)	$y = x^3$	向左移動 1 單位	向上移動 3 單位	$y = (x + 1)^3 + 3$
(g)	$y = x^3$	向右移動 3 單位	向下移動 1 單位	$y = (x - 3)^3 - 1$
(h)	$y = x^3 - 4x + 3$	向左移動 10 單位	向下移動 20 單位	$y = (x + 10)^3 - 4(x + 10) - 17$
(i)	$y = f(x)$	向左移動 $h$ 單位	向上移動 $k$ 單位	$y = f(x + h) + k$
(j)	$y = f(x)$	向右移動 $h$ 單位	向下移動 $k$ 單位	$y = f(x - h) - k$
(k)	$y = f(x)$	向右移動 $h$ 單位	向上移動 $k$ 單位	$y = f(x - h) + k$

鳴謝：本示例大部分教學活動取材自中華聖潔會靈風中學，蒙學校慷慨允許於本教學資源套印出，謹此致謝。