明愛粉嶺陳震夏中學
Caritas Fanling Chan Chun Ha Secondary School

「資優教育學校網絡」經驗分享會 2022/23（中學）(新辦)

第二部分：專題分享(數學教育)

設計校本抽離式計劃以加強數學資優／高能力學生的解難能力

盧逸龍老師
資優教育統籌，數學科副科主任

資優教育三層架構推行模式

第三層 校外支援	**3E** 特別資優學生	
第二層 校本抽離式計劃	**2C** 擁有特別才能或於學科表現出色的學生	**2D** 於某特定範疇表現出色的學生
第一層 校本全班式教學	**1A** 所有學生	**1B** 於個別學科表現出色的學生

一般性（一般性增潤） 課程內容 專門性（特定範疇）

第三層次：

香港資優教育學院各大院校的資優課程(中大/科大etc)

第二層次：

震夏人學習圈
校內拔尖課程
STEAM
與其他機構合作之課程
(理大/T4HK/友.導向/青協)

第一層次：

各科的適異性教學

震夏人學習圈

- 資優教育組轄下的學生組職
- 由每級的尖子學生組成(共69名)

A類(81%)	B類(15%)	C類(4%)
三科主科的成績於全級名列前茅	個別學科成績非常卓越	受教育心理學家/老師推薦並經資優組老師評估

震夏人學習圈的願景

01 營造一個具學術氣氛的團隊,資優學生能找到學習伙伴,互相砥礪,精益求精。

02 連結不同年級的尖子,讓高中/畢業的優秀學生成為榜樣,為初中尖子有清晰目標。

03 集中資源培訓學生,方便建立資料庫追蹤學員的成長。

04 提升學員的 STEM 能力和自學能力,同時幫助他建立正面價值觀。

成為學習圈成員後:

課外資優培訓

LUMEN成員於課餘時得到包括英語、STEAM、數學等不同增潤課程培訓

獲資助修讀大學課程

表現突出之成員會獲學校推薦至不同大學進行深造,費用由學校資助

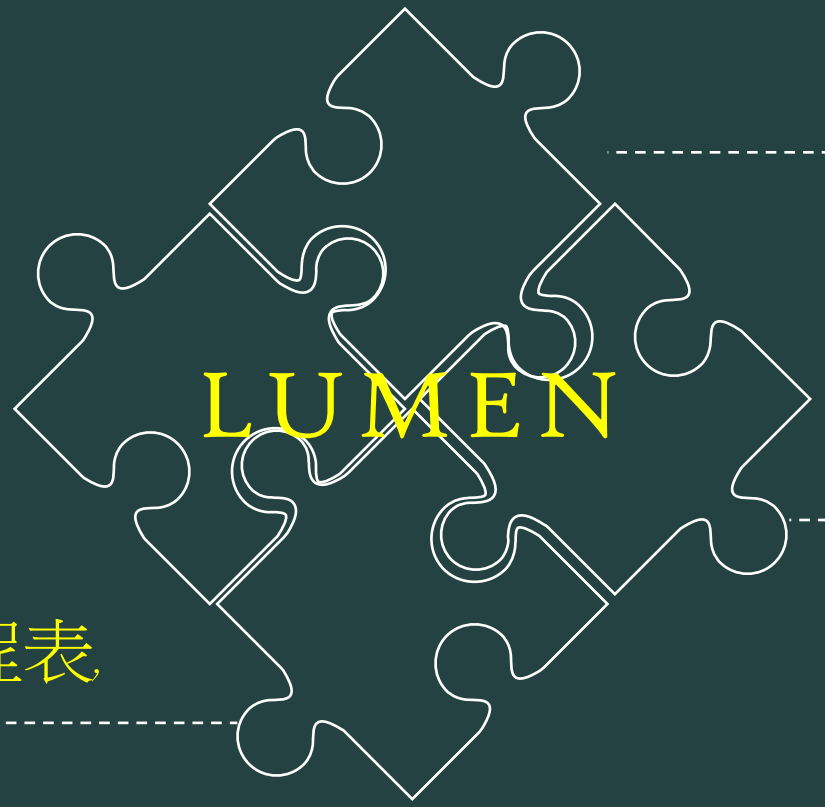
開闊眼界

學員獲更多機會代表學校參與不同交流活動,擴闊眼界

學習圈學員要求

保持優良的學業成績,
持續進步,精益求精。

良好的品格,遵守校
規和老師指示,
考勤良好。



精極投入包括比賽,
交流,評估等課程和
活動。

良好自理能力,包括日程表,
定時檢查電郵等。

第三層 校外支援	**3E** 特別資優學生	
第二層 校本抽離式計劃	**2C** 擁有特別才能或於學科表現出色的學生	**2D** 於某特定範疇表現出色的學生
第一層 校本全班式教學	**1A** 所有學生	**1B** 於個別學科表現出色的學生

一般性
（一般性增潤）

課程內容

專門性
（特定範疇）

本學年實行之校本抽離式計劃(資優教育)

項目	科目範疇	類型	年級
奧數班	數學	課程	中一級中二
英語拔尖班	英文	課程	中四至中六
ICAS評估及訓練	英文、數學、科學	國際評估	中一至中四
35周年公開課:實驗概率與蒙地卡羅算法	數學	課程	中四至中五
35周年公開課:軟餐2.0_軟餐背後的科學探究	STEAM	課程	中三
震夏人學習圈選科攻略	生涯規劃	工作坊	中三
震夏人學習圈學長分享讀書心得	--	工作坊	中一至中六

本學年實行之校本抽離式計劃(資優教育)

項目	科目範疇	類型	年級
震夏人學習圈BBQ晚會	情意發展	活動	中一至中六
震夏人學習圈泡泡足球減壓日	情意發展	活動	中一至中六
MI Writing Competition	英文	工作坊	中一至中五
ENGLISH YOUTUBER	英文	工作坊	中一至中二
震夏人學習圈結他班	情意發展	活動	中二

本校數學科的資優教育策略

1. 鼓勵學生深入鑽研課題，家課及測考皆設有延伸思考題。
2. 為學能高的同學提供增潤課程，教授課本以外知識。
3. 重視探究式學習，讓學生自己進行實驗，發現數學結果。
4. 推廣數學建模及跨科課程，當中強調數學於日常生活的應用。
5. 積極參與校外數學比賽及交流，增加本校資優生的自信心及眼界。

明愛粉嶺陳震夏中學
35周年校慶公開課

數學科:實驗概率與蒙地卡羅算法

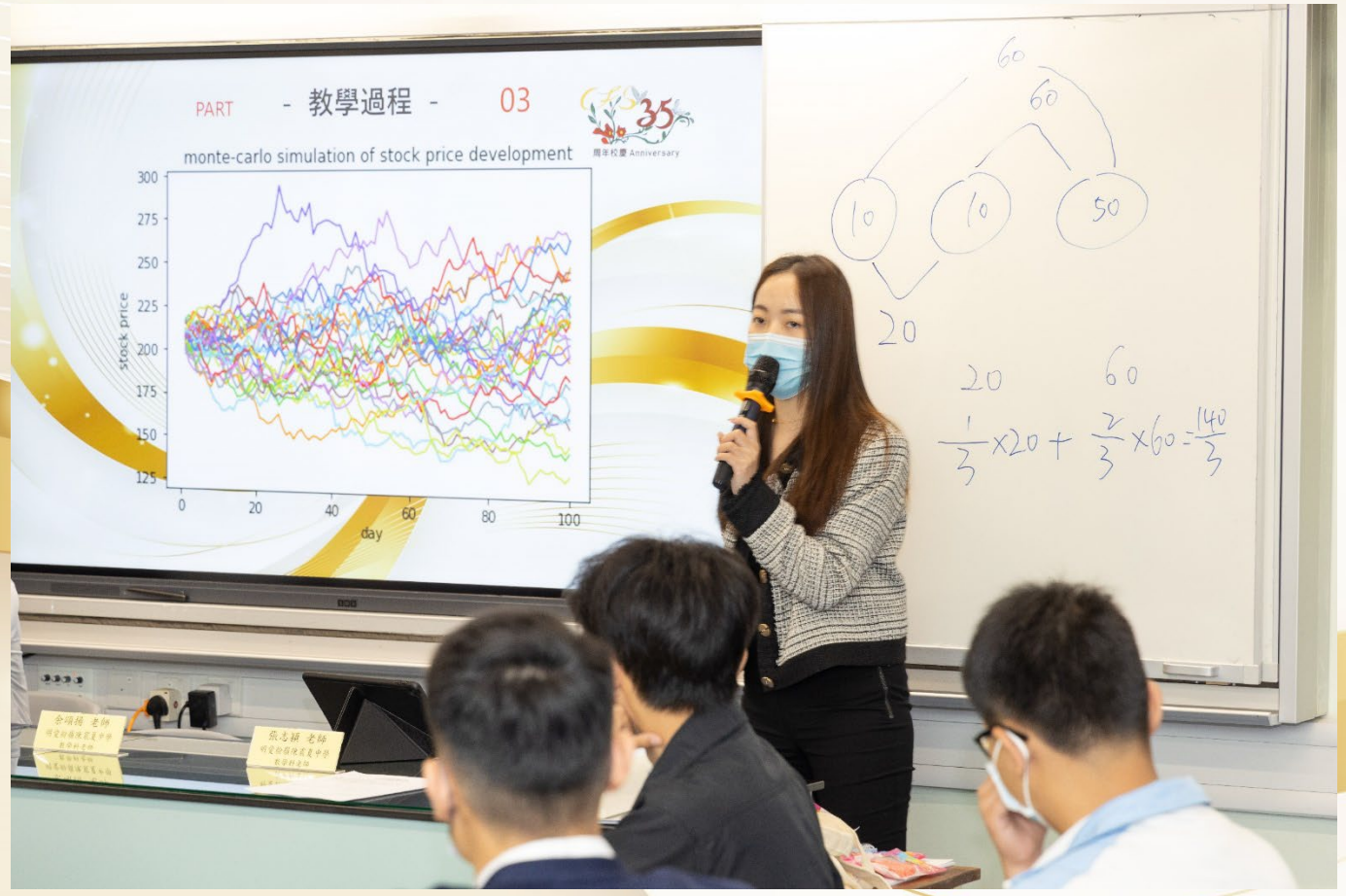
簡介(15mins)

1. 回顧實驗概率與理論概率的關係以及期望值
2. 簡介今天的活動-----進行概率實驗

教案

簡介(15mins)

3. 根據實例了解實驗概率的重要性
4. 引入蒙地卡羅算法
5. 簡介蒙地卡羅算法於日常生活中的應用



教案

蒙地卡羅的重要性！！

在實行計劃前, 利用蒙地卡羅方法作出大量模擬結果, 作出合理估計可減低實行計劃的風險

隨著科技進步, 電腦性能躍升,蒙地卡羅方的成本更低且更準確。同時, 人們生活足跡電子化, 使得蒙地卡羅方法越見普及

除了模擬出概率分佈, 蒙地卡羅方法亦可找出一些未知數值(如某些函數的積分等)

教案

震夏樂園

以實驗進行探究式學習

抽籤

第一階段遊戲

第一階段屬於探究學習階段
在此階段同學需要針對自己抽籤挑選的遊戲進行實驗探究，
然後根據各組結果進行匯報。

利用數據結果作出決策，贏取最多獎品

第二階段遊戲

第二階段屬於自由遊戲階段
在此階段的遊戲規則將會發生改變，詳情可參閱附件工作紙。

周年校慶 Anniversary

Game 1
幸運大抽獎

Game 2
公平輪盤

Game 3
布豐投針

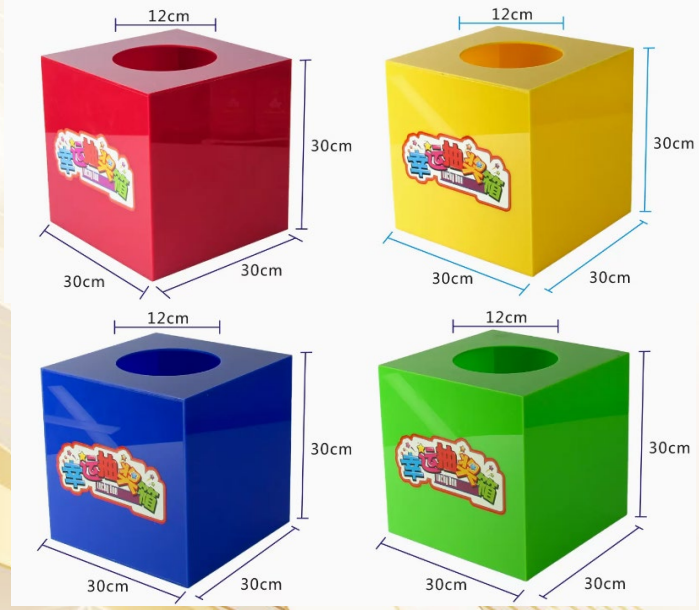
Game 4
擲彩虹

Game 1

幸運大抽獎

了解蒙地卡羅算法的定義

規則/條件



01 每個箱均有100個球。

02 每次只能抽一個球。

03 每次完成抽球後,
需把球放回箱內。

綠球	黃球	紅球	紫球
震夏幣1個	震夏幣10個	震夏幣100個	震夏幣1000個

1. 完成以下表格。

紅箱(1號)：

	綠球	黃球	紅球	紫球	總次數
抽中次數					
	=	=	=	=	=
實驗概率 (準確至4位小數)					
估算數量					100

以實驗進行探究

01

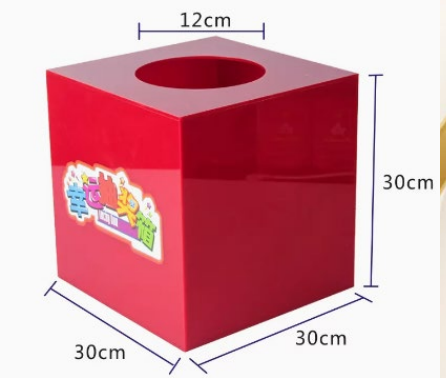
記錄抽球的結果

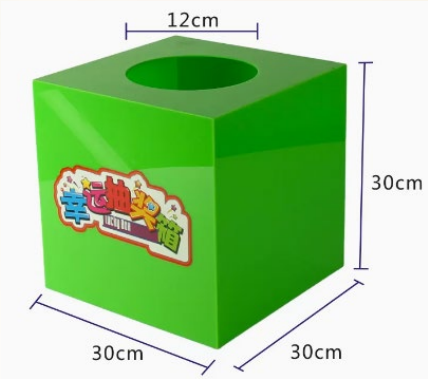
02

根據實驗結果，
估算各箱內
各種顏色球的
數目

03

若每個球被賦予價值，
求期望值





(1號)
55 個綠球
42 個黃球
3 個紅球

(2號)
90 個綠球
2 個黃球
8 個紅球

(3號)
85 個綠球
10 個黃球
5 個紅球

(4號)
93 個綠球
3 個黃球
3 個紅球
1 個藍球

實際上，那一個箱回報最好？

紅箱(1 號)的期望值

$$\frac{55}{100}\times 1+\frac{42}{100}\times 10+\frac{3}{100}\times 100=7.75$$

藍箱(2 號)的期望值

$$\frac{90}{100}\times 1+\frac{2}{100}\times 10+\frac{8}{100}\times 100=9.1$$

綠箱(3 號)的期望值

$$\frac{85}{100}\times 1+\frac{10}{100}\times 10+\frac{5}{100}\times 100=6.85$$

黃箱(4 號)的期望值

$$\frac{93}{100}\times 1+\frac{3}{100}\times 10+\frac{3}{100}\times 100+\frac{1}{100}\times 1000=14.23$$

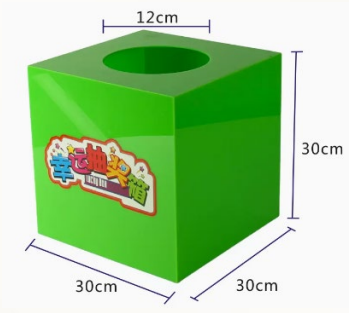
各遊戲分別設有延伸性挑戰題

現在他很想短時間內獲得100個震夏幣，

同學會建議余老師集中抽那一個箱？

(1號)
55 個綠球
42 個黃球
3 個紅球

(2號)
90 個綠球
2 個黃球
8 個紅球



(3號)
85 個綠球
10 個黃球
5 個紅球

(4號)
93 個綠球
3 個黃球
3 個紅球
1 個藍球

Python 模擬結果(1,000次)

main.py

```
1   from itertoo
2   from random
3   from flask i
4
5   #
6   # app = Flas
7   #
8   #
9   # @app.route
10  # def home()
11  run_times =
12  target = 100
13  # ----------
    ------------
14  print("Red B
15  redBox = []
16  redBox.extend(repeat(1, 55))  # green ball 55, score 1
17  redBox.extend(repeat(10, 42))  # yellow ball 42, score 10
18  redBox.extend(repeat(100, 3))  # red ball 3, score 100
```

Line 10 : Col 14 History

Console Shell

```
Run Times:  20
Overall Score:  130
```

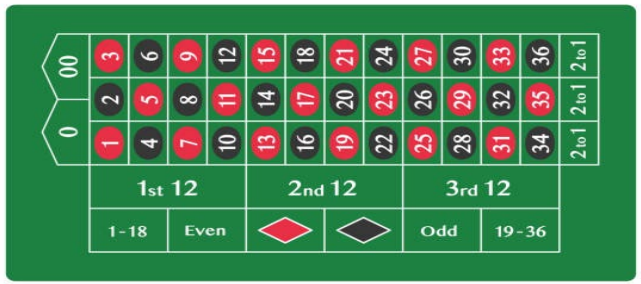
```
----------Conclusion----------
Red Box average times:  15
Blue Box average times:  12
Green Box average times:  18
Yellow Box average times:  23
```

```
----------Conclusion----------
Red Box average times:  15
Blue Box average times:  12
Green Box average times:  18
Yellow Box average times:  23
```

Game2

公平輪盤

Debriefing



規則/條件

01 每次只可投注一枚代幣。

02 每次只可押大/小，紅/黑，單/雙，若押中可得兩枚代幣。若結果是0或00則重擲。

03 輸光代幣之後，必須宣佈破產，提前離場。

注意: 是次活動為數學研究,同學請以學術探究的心態進行遊戲 。

以實驗進行探究

01

每組員於探究階段必須投注。

02

記錄參與場次，以及遊戲結束時所剩餘代幣。

03

根據實驗結果，總結發現。

1. 你認為該遊戲是公平遊戲嗎？

_____

2. 請完成以下表格

組內成員	參與場次	剩餘代幣	是否破產

3. 根據實驗結果，你有什麼發現?

_____

_____

_____

CFS 35 周年校慶 Anniversary

```python
import pandas as pd
import random

sample_list = []
round_num = 100
person_num = 10
for person in range(1, person_num + 1):
    money = 10
    for round in range(1, round_num + 1):
        result = random.randint(0, 1)
        if result == 1:
            money = money + 1
        elif result == 0:
            money = money - 1
        if money == 0:
            break
    sample_list.append([person, round, money])

sample_df = pd.DataFrame(sample_list, columns=['person', 'round', 'money'])
sample_df.set_index('person',inplace=True)

print(sample_df)
```

Python 運行結果

```
round  money
person
1         64      0
2        100     14
3         90      0
4        100     16
5         88      0
6        100     14
7        100      6
8         78      0
9         52      0
10        18      0
```

延伸問題

解釋賭徒輸光理論：

你一開始有代幣m枚，朋友有代幣n枚

設$P(A_i)$為你手上有 i 枚代幣時，最後能贏得所有代幣的概率，$0 \le i \le m+n$

對於任何i，

$$P(A_i) = \frac{1}{2}P(A_{i+1}) + \frac{1}{2}P(A_{i-1})$$

$$2P(A_i) = P(A_{i+1}) + P(A_{i-1})$$

$$P(A_i) - P(A_{i-1}) = P(A_{i+1}) - P(A_{i-1})$$

$$P(A_1) - P(A_0) = P(A_2) - P(A_1) = P(A_3) - P(A_2) = \ldots = P(A_{n+m}) - P(A_{n+m-1})$$

$\therefore$ 對於任意i，$P(A_i) = i \times P(A_1)$

由於$P(A_{m+n}) = 1$， $P(A_1) = \frac{1}{m+n}$

$$P(A_m) = \frac{m}{m+n}$$

$\therefore$ P(贏得所有代幣) $= \frac{m}{m+n}$， P(輸光所有代幣) $= \frac{n}{m+n}$

滲入情意教育元素

解釋賭徒輸光理論：

$$P(\text{輸光所有代幣}) = \frac{n}{m+n}$$

公平輪盤實驗中, 玩家開始時有10枚代幣, 而莊家則有無限個代幣, 所以

$$P(\text{輸光所有代幣}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{10+n} = 1$$

結論: 投機取巧必有損失，踏實做人才是正道！

Game3

布豐投針

蒙地卡羅算法的應用2

物資

一把塑膠籤

玩法

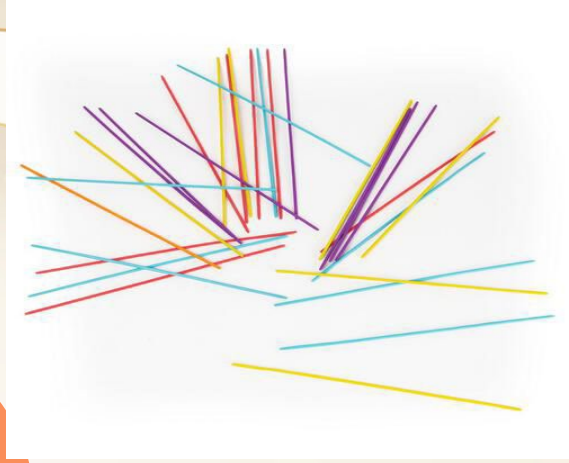
在規定時間內隨意拋出，並記錄籤與版面上任意紋路相交的次數。

相關公式

$$P=\frac{2a}{\pi d}$$

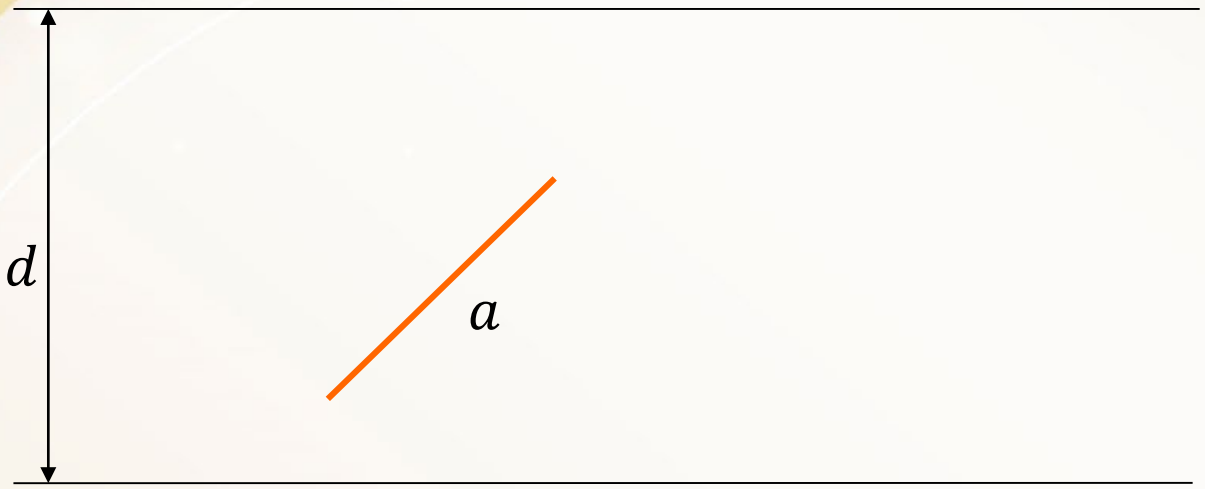
目的

根據實驗結果，推算出圓周率。



圓周率推算過程:

(其中 a 代表塑膠籤的長度, d 代表卡板各平行線之間的距離。)
是次實驗中, 我們把卡板各平行線之間的距離設為膠籤的長度的兩倍



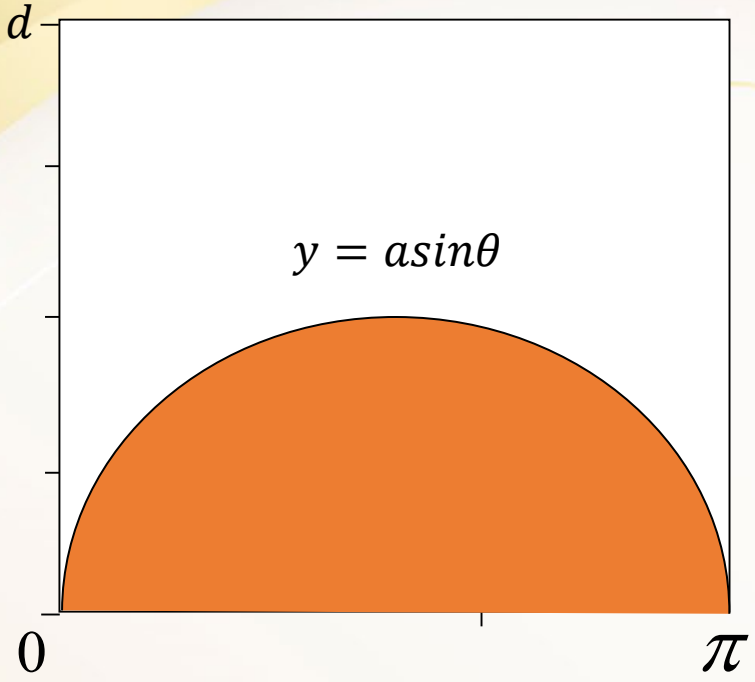
$$\because P_0 = \frac{2a}{\pi d}$$

$$2a = d$$

$$\therefore P_0 = \frac{1}{\pi}$$

$$\pi = \frac{1}{P_0}$$

公式證明:



橙色面積$=a\int_0^{\pi} sin\theta\, d\theta$

$=2a$

總面積 = $d\pi$

$$P(\text{相交}) = \frac{2a}{d\pi}$$

延伸問題

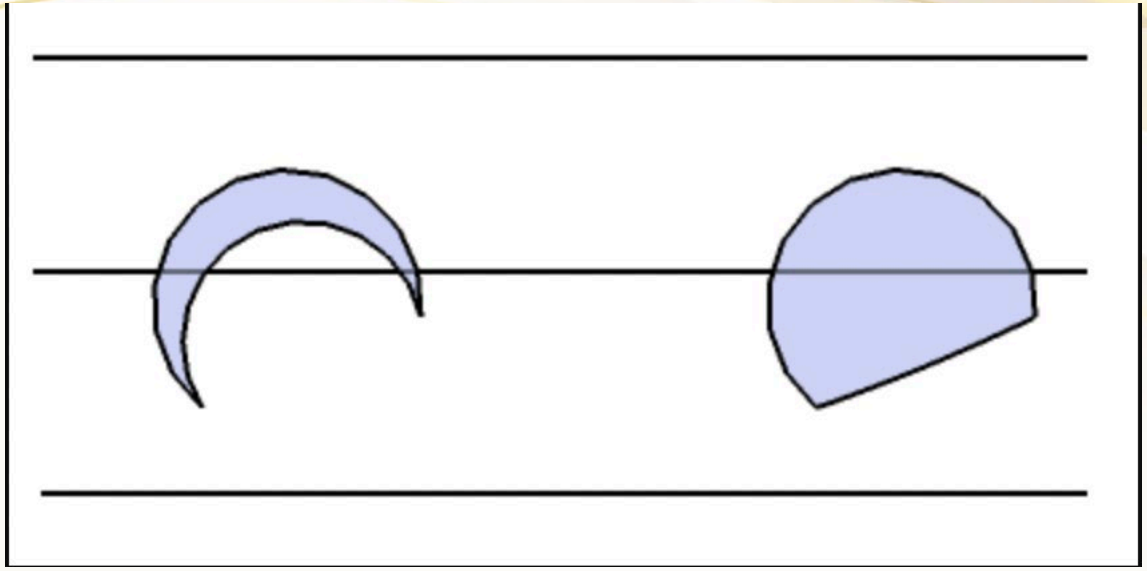
經計算，隨機投擲5枝膠籤，不同事件的概率分佈如下

事件	計算公式	概率
與平行線相交０次	$(1-\frac{1}{\pi})^5$	14.7%
與平行線相交１次	$C_1^5\left(1-\frac{1}{\pi}\right)^4(\frac{1}{\pi})$	34.4%
與平行線相交２次	$C_2^5\left(1-\frac{1}{\pi}\right)^3(\frac{1}{\pi})^2$	32.1%
與平行線相交３次	$C_3^5\left(1-\frac{1}{\pi}\right)^2(\frac{1}{\pi})^3$	15.0%
與平行線相交４次	$C_4^5(1-\frac{1}{\pi})(\frac{1}{\pi})^4$	3.50%
與平行線相交５次	$(\frac{1}{\pi})^5$	0.327%

上述答案符合震夏樂園所搜查的數據嗎？

延伸問題

假如不用塑膠籤投擲，改用其他曲線、凸多邊形等物件。是否能成功估算出圓周率?



Game 4

擲彩虹

蒙地卡羅算法的應用3

規則/條件

01

將代幣擲在彩虹上，而不觸到黑色邊線才算擲中。

02

代幣滑出遊戲板外不作計算，並重新投擲。

03

有無限代幣 。

04

投擲過程：
(a) 隨機性 及
(b) 目標性

PART Debriefing 04

亂擲可能仲易中過認真咁擲

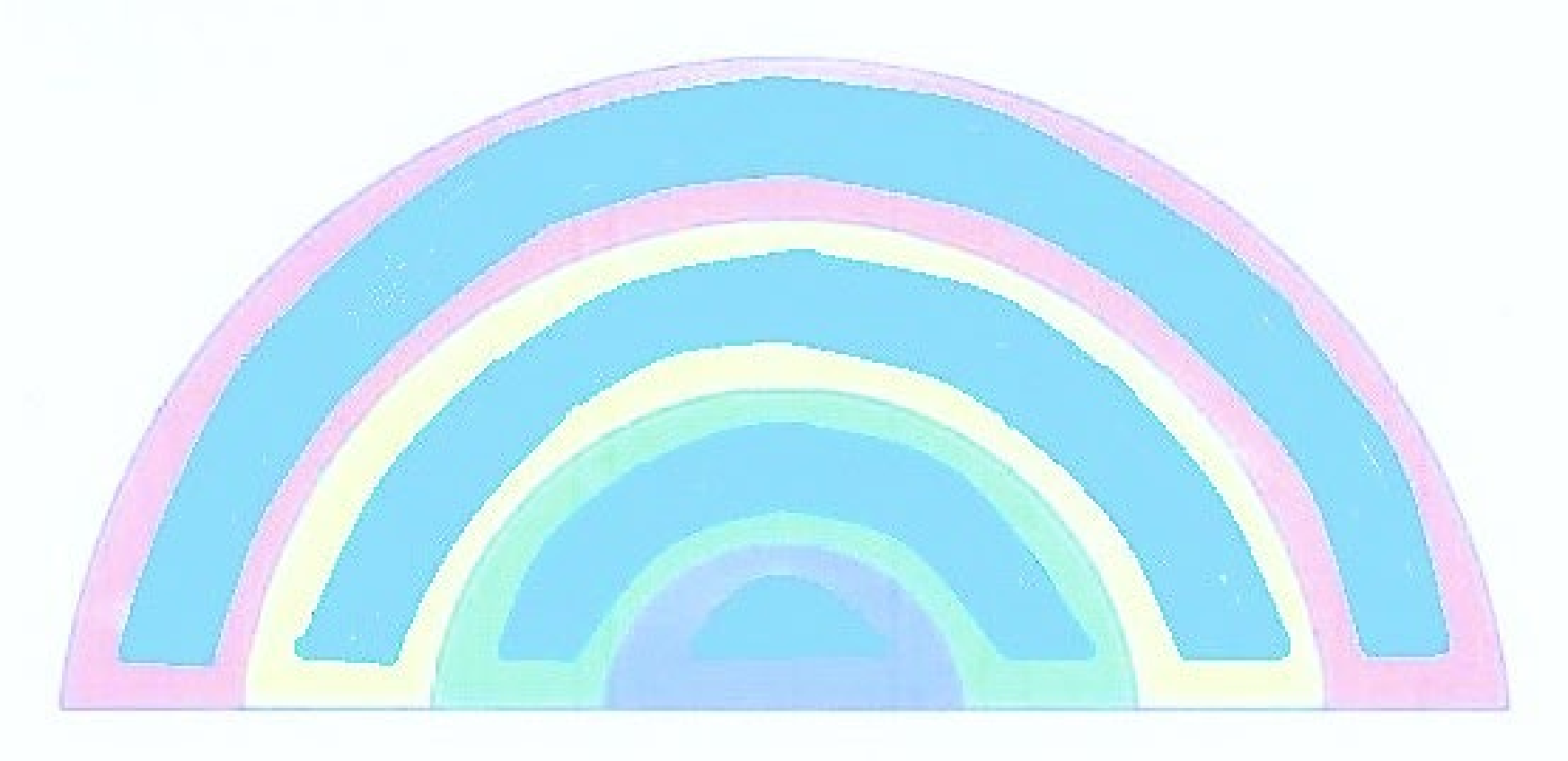
周年校慶 Anniversary

理論概率

安慰獎	細獎	中獎	大獎
(紅色)	(黃色)	(綠色)	(藍色)
=1.49%	=1.17%	=0.67%	=0.35%

延伸題目

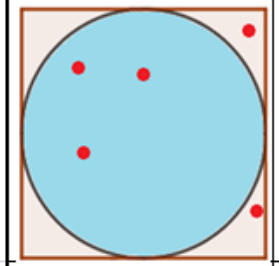
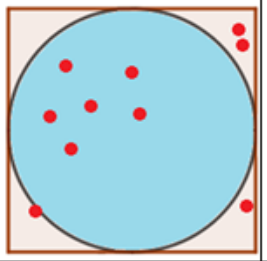
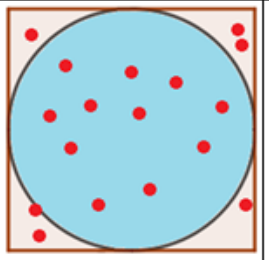
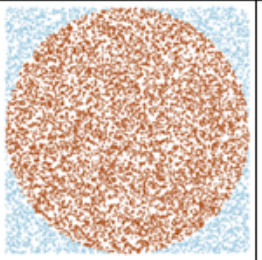
震夏幣的圓心要落在藍色部分才能中獎

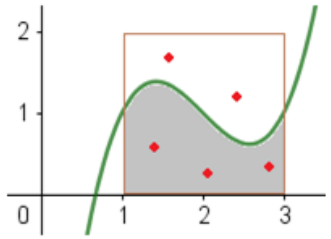
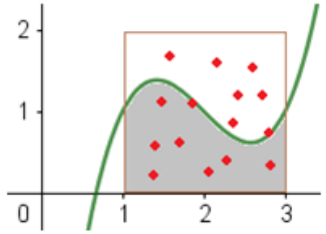
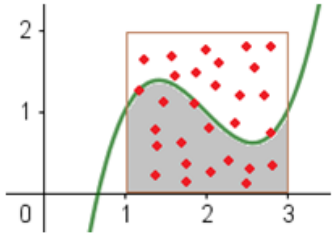
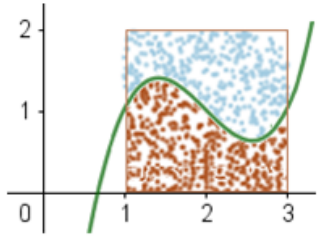


Extra

推算橢圓面積公式

蒙地卡羅方法求面積

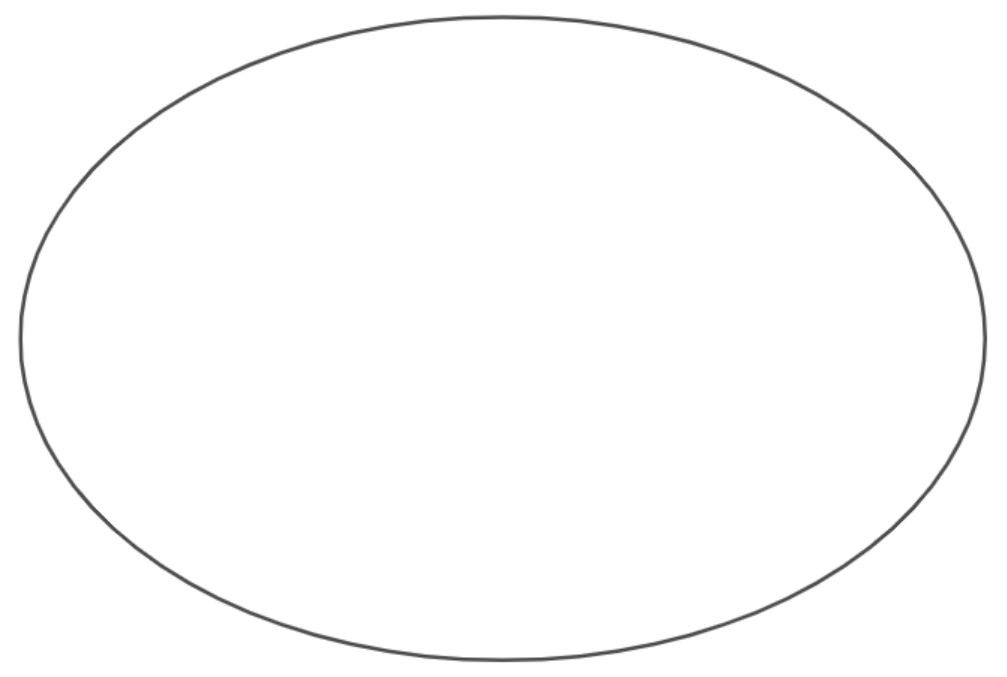
	圓內點	正方形內部點	比例	正方形面積x比例=圓面積
	3	5	0.600	2.400
	7	10	0.700	2.800
	12	17	0.706	2.824
	31435	40000	0.786	3.1435

	曲線下的點	正方形內部點	比例	正方形面積x比例=曲線下面積
	3	5	0.600	2.400
	9	15	0.600	2.400
	15	30	0.500	2.000
	20240	40000	0.506	2.024

PART

應用時間

各組同學會收到不同的橢圓形，
設計一個實驗，以推算該橢圓的面積。



main.py

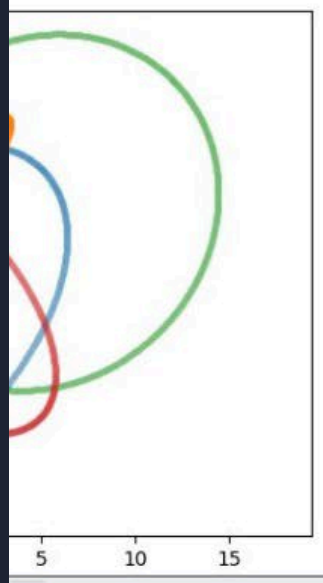
```python
import random
import matplotlib.pyplot a
import numpy as np

# 定義不同的半長軸和半短軸參數
parameters = [(12, 7), (11

# 定義隨機點的數量
n = 1000000

# 遍歷不同的參數組合，併計算概率
for a, b in parameters:
    # 計數器，記錄落在橢圓形內
    count = 0
    # 生成隨機點的x和y坐標
    x = np.random.uniform(
    y = np.random.uniform(
    # 判斷隨機點是否在橢圓形內
    for i in range(n):
        if (x[i] / a) ** 2
            count += 1

    # 計算概率的估計值
    probability = count / n

    # 計算橢圓形面積的估計值
    area = 4.0 * a * b * count / n
    # 輸出結果
    print("\n橢圓形面積的估計值為：", area)
    print("半長軸為{}，半短軸為{}的橢圓形概率的估計值為：{}".format(a, b, probability))

    # 繪製橢圓形
    t = np.linspace(0, 2 * np.pi, 1000)
    Ell = np.array([a * np.cos(t), b * np.sin(t)])
    R_rot = np.array([[np.cos(np.pi / 4), -np.sin(np.pi / 4)], [np.sin(np.pi / 4), np.cos(np.pi / 4)]])
```

Ln 44, Col 11 History

```
橢圓形面積的估計值為： 263.688432
半長軸為12，半短軸為7的橢圓形概率的估計值為：0.784787

橢圓形面積的估計值為： 69.0778
半長軸為11，半短軸為2的橢圓形概率的估計值為：0.784975

橢圓形面積的估計值為： 282.86856
半長軸為10，半短軸為9的橢圓形概率的估計值為：0.785746

橢圓形面積的估計值為： 156.948
半長軸為5，半短軸為10的橢圓形概率的估計值為：0.78474
```

Output

Figure 1



Console Shell

```
橢圓形面積的估計值為： 263.688432
半長軸為12，半短軸為7的橢圓形概率的估計值為：0.784787

橢圓形面積的估計值為： 69.0778
半長軸為11，半短軸為2的橢圓形概率的估計值為：0.784975

橢圓形面積的估計值為： 282.86856
半長軸為10，半短軸為9的橢圓形概率的估計值為：0.785746

橢圓形面積的估計值為： 156.948
半長軸為5，半短軸為10的橢圓形概率的估計值為：0.78474
```

明愛粉嶺陳震夏中學
Caritas Fanling Chan Chun Ha Secondary School

設計校本抽離式計劃以加強數學資優／高能力學生的解難能力

謝謝聆聽!