



# 中二級數學科 三角學

明愛粉嶺陳震夏中學

# 簡報內容

- 1) 學校背景
- 2) 教案及資源
- 3) 課堂反思



# 班級背景

- ▶ 學校利用分組教學，為減少學習差異，將兩班拆分成三組。
- ▶ 學生人數：32人，該組別為數學能力及成績較強的組別。
- ▶ 另外有25%同學有加入奧數隊(校本抽離式計劃)，學習課程以外的數學知識，例如競賽數學、數論等。
- ▶ 本課堂屬於資優教育第一層：校本全班式教學，期望能讓學生了解三角比的數學原理。



# 課堂教學策略

## 1. 訓練高階思維能力

透過**提問開放性問題**幫助學生建立高階思維。

## 2. 提高學生實作能力以及應用知識的能力

透過課堂活動建立學術知識和現實生活的連繫，如利用三角比測建築物高度，將三角比原理應用於測度問題中。

## 3. 提高學生社交及表達能力

以小組討論提升學生協作、帶領討論的能力，並希望以強帶弱。



# 已有知識

- ▶ 1. 畢氏定理
- ▶ 2. 相似三角形
- ▶ 3. 用尺規量度及繪畫幾何圖像
- ▶ 4. 幾何證明





# 教學目標

## 一般學生

- ▶ 了解三角比的數學原理
- ▶ 訓練手作能力
- ▶ 學習三角比進行間接測量的方法

## 資優生

- ▶ 了解三角比的數學原理
- ▶ 訓練手作及協作能力，帶領討論
- ▶ 以三角比進行間接測量，以及建立公式解應用題，培養高階思維

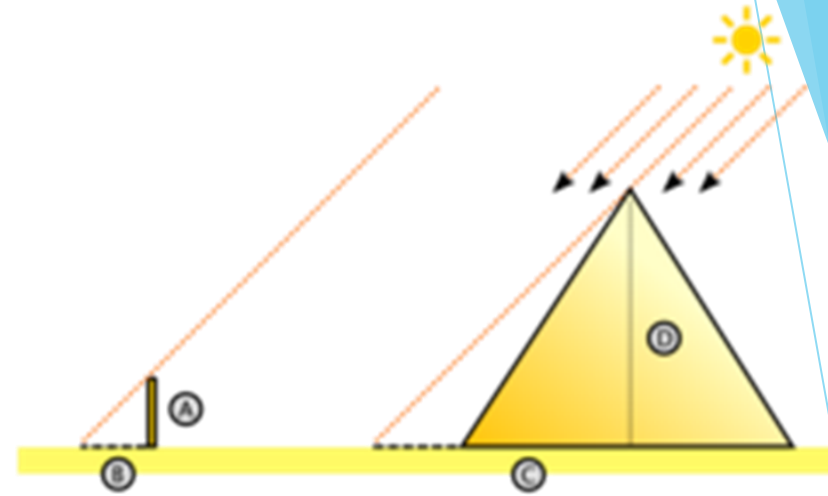
學生將學習使用工具測量長度和角度，以估算建築物及結構物的高度。

# 回顧預習篇章

## 數學閱讀文章(10mins)



- ▶ 據說在2600年前的埃及，有一位法老希望知道剛建好的金字塔有多高，便命令祭司去測量。可是金字塔是斜的，就算爬到塔頂，也測不出垂直高度，大家根本無計可施。法老非常生氣，同時懸賞可以求出答案的人。這個時候，古希臘著名的哲學家及數學家泰利斯正在埃及旅行，知道這件事之後，興致勃勃的想解決這個難題。日子一天一天過去，泰利斯始終想不出方法，苦惱得不得了。有一天，泰利斯走在路上，低頭想著事情，看見自己的影子，就在這時，腦子裡的線路像是突然接通了一樣.....泰利斯命令助手測量金字塔的影長，就這樣測出了金字塔的高度。



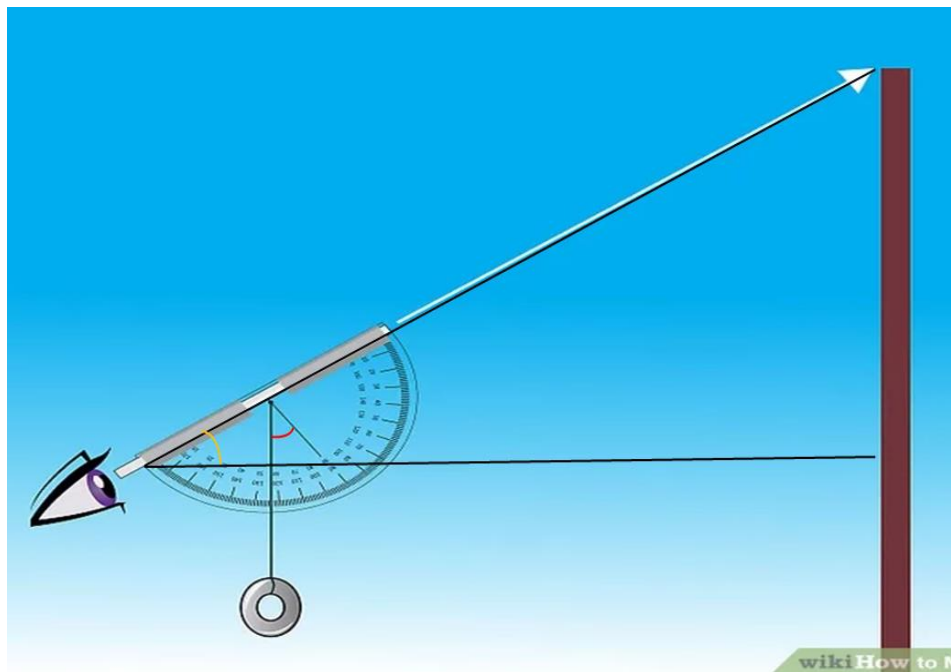
- 利用泰利斯的事跡，以及提問技巧來啟發學生思考數學和現實之聯繫，並引入三角比的定義實際應用。
- 提問例子：
- 1. 泰勒斯利用了大自然的甚麼特性？
- 2. 為甚麼泰勒斯要等到測量值與他的身高完全吻合的時候才測量大金字塔？
- 3. 泰勒斯利用了甚麼三角形？
- 4. 泰勒斯可以用對邊及鄰邊比例不等於1的三角形來進行間接量度？

2. 為甚麼泰勒斯要等到測量值與他的身高完全吻合的時候才測量大金字塔在地面的投影處？

先影剛好形成等腰直角△



# 仰角器的運用

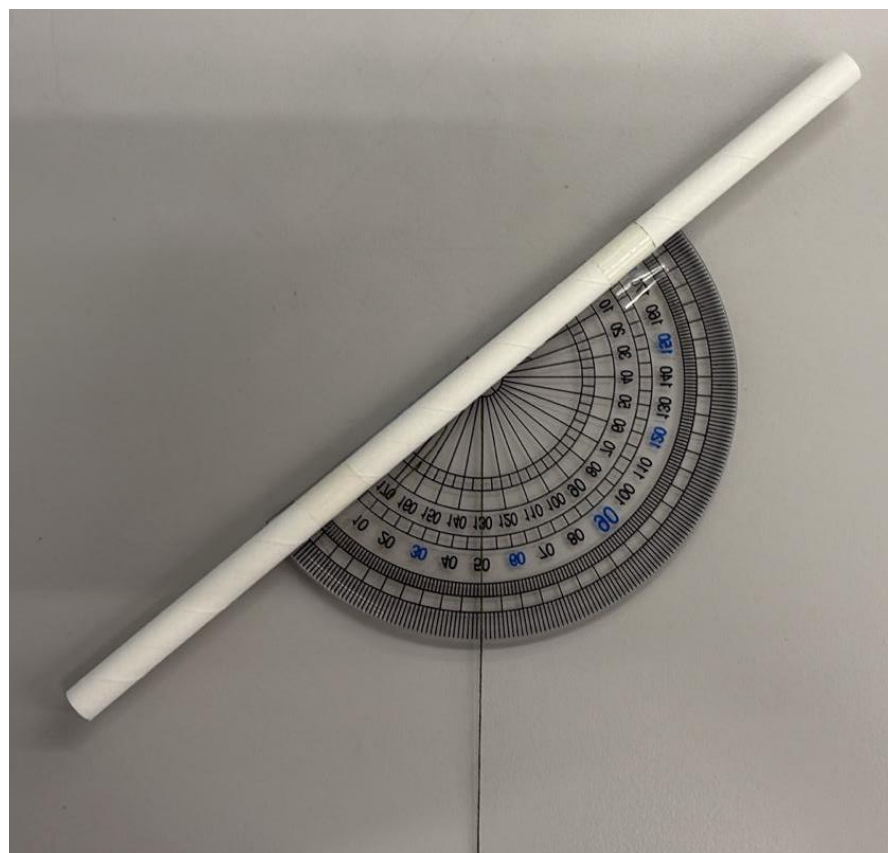
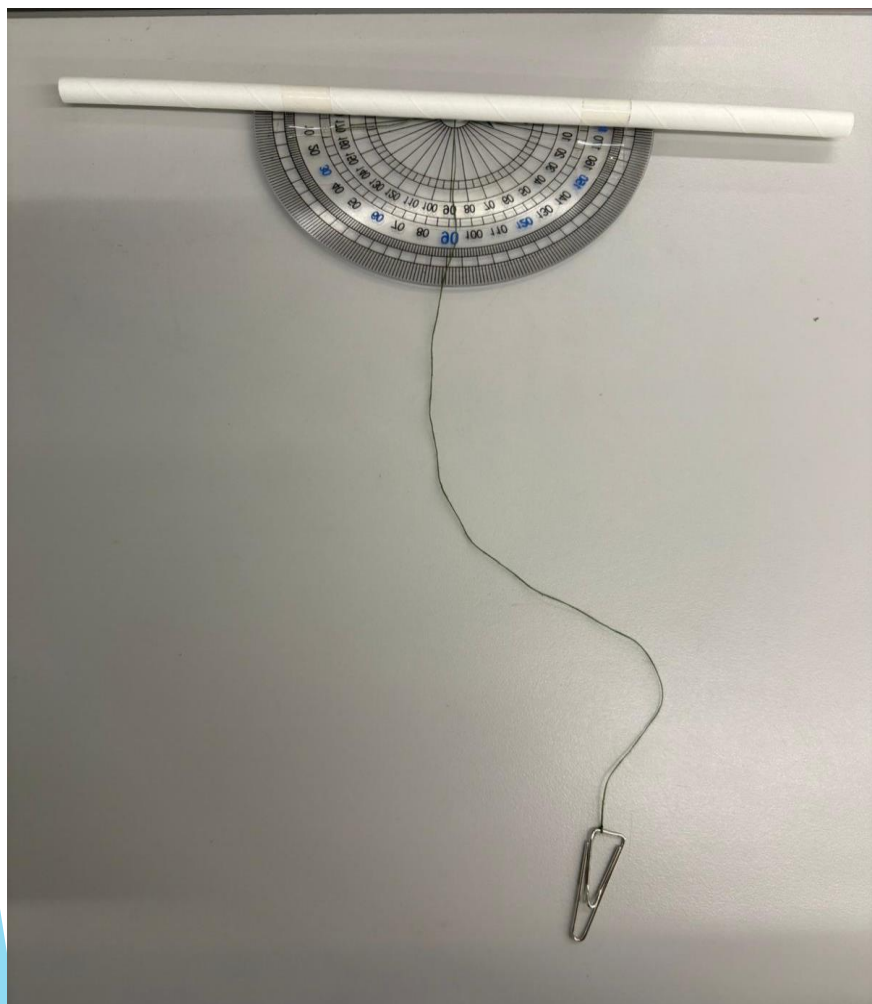


- ▶ 使用仰角器作量度的步驟：
- ▶ 1. 取仰角器並選擇適當位置觀察物件。
- ▶ 2. 通過吸管找出大樓頂部。
- ▶ 3. 觀察員記錄仰角器上的讀數。(橙色線)
- ▶ 4. 再用90度減去以上讀數，即為上圖紅色或黃色的夾角大小。

## 延伸問題

1. 試解釋為何上圖紅色的夾角與黃色的夾角大小相等。
2. 圖中顯示之配重塊有甚麼用途？

# 仰角器實物





# 活動(一) (10-15mins)

## 製作包含指定銳角的直角三角形

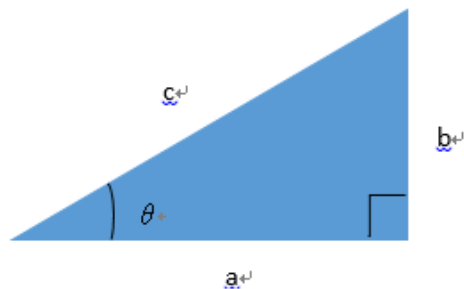
- ▶ 1. 分組活動，利用量角器及剪刀，在廢紙上裁剪出幾個包含45、50、60度銳角的直角三角形等等。
- ▶ 2. 記錄直角三角形的邊長，以及三角比，利用Microsoft Excel 收集數據。
- ▶ 3. 完成小組討論問題
- ▶ 提問例子：(a) 不同組別所裁剪之直角三角形有甚麼相同之處或不同之處？
- ▶ (b) 完成活動後，讓學生嘗試建立猜想。
- ▶ (c) 試證明其猜想。
- ▶ 4. 抽學生彙報討論結果
- ▶ 5. 教師可將各組的直角三角形貼在黑板以展視不同大小的三角形有相同之三角比。從而引出三角比的 **well-defineness**。



活動 (一)

0. 分成 8 組，每組 4 人。

利用量角器及剪刀，裁剪出以下的圖形：



(a) 包含 45 度銳角的直角三角形

(b) 包含 50 度銳角的直角三角形

(c) 包含 60 度銳角的直角三角形

(d) 包含任意銳角的直角三角形

1. 記錄自己裁剪之直角三角形的對邊、鄰邊及斜邊的數據，完成下表。

2. 進行小組彙報，試觀察總結這些三角形邊長及邊長比值的特性。

數值	鄰邊(a)	對邊(b)	斜邊(c)	對邊 斜邊	鄰邊 斜邊	對邊 鄰邊
直角 三角形						
(a) 包含 45 度銳 角的直角三角形						
(b) 包含 50 度銳 角的直角三角形						
(c) 包含 60 度銳 角的直角三角形						
(d) 包含 ___ 度 銳角的直角三角 形						

# 功課舉隅



1. 記錄自己裁剪之直角三角形的對邊、鄰邊及斜邊的數據，完成下表。
2. 進行小組彙報，試觀察總結這些三角形邊長及邊長比值的特性。

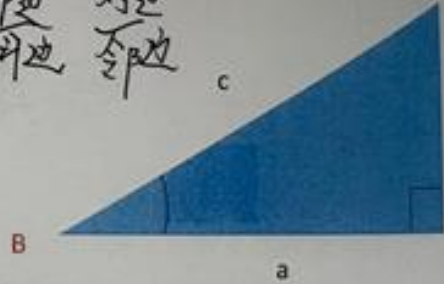
數值 直角 三角形	鄰邊(a)	對邊(b)	斜邊(c)	$\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$	$\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$	$\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$
(a) 包含 45 度銳角的直角三角形	3.3cm	3.3cm	4.7cm	0.70cm	0.70cm	1.0cm
(b) 包含 50 度銳角的直角三角形	3cm	3.3cm	4.5cm	0.73cm	0.67cm	1.1cm
(c) 包含 60 度銳角的直角三角形	2.4cm	4.1cm	4.8cm	0.85cm	0.50cm	1.71cm
(d) 包含 35 度銳角的直角三角形	6cm	3cm	6.5cm	0.46cm	0.92cm	0.50cm

2. 進行小組彙報，試觀察總結這些三角形邊長及邊長比值的特性。

數值 直角 三角形	鄰邊(a)	對邊(b)	斜邊(c)	$\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$	$\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$	$\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$
(a) 包含 45 度銳角的直角三角形	2.8	2.4	3.4	0.71	0.74	0.96
(b) 包含 50 度銳角的直角三角形	3.3	4	5.2	0.77	0.63	1.21
(c) 包含 60 度銳角的直角三角形	3.8	6.4	7.4	0.86	0.51	1.68
(d) 包含 ___ 度銳角的直角三角形						

2. 觀察黃色格子的統計結果，不同組別所裁剪之直角三角形有甚麼相同之處？  
試總結你的觀察以及統計結果，並給出一個猜想。

每個直角三角形的銳角的對邊 / 斜邊 鄰邊 / 斜邊 對邊 / 斜邊 都是個定值。



3. 試證明以上猜想。

如果兩個三角形是相似三角形，  
那麼它們對應的邊長比例相等

證明：在  $\triangle ABC$  和  $\triangle DEF$  中，

$$\angle B = \angle E$$

$$\angle C = \angle F (90^\circ)$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \quad (\text{相似三角形對應})$$

活動一紀錄 對邊除以斜邊 的數值。

	組別1	組別2	組別3	組別4	組別5	組別6	組別7	組別8
45度銳角								
50度銳角								
60度銳角								

#DIV/0!

#DIV/0!

#DIV/0!

活動二紀錄 總高度 的數值。

	組別1	組別2	組別3	組別4	組別5	組別6	組別7	組別8
物件A								
物件B								
物件C								
物件D								

#DIV/0!

#DIV/0!

#DIV/0!

#DIV/0!

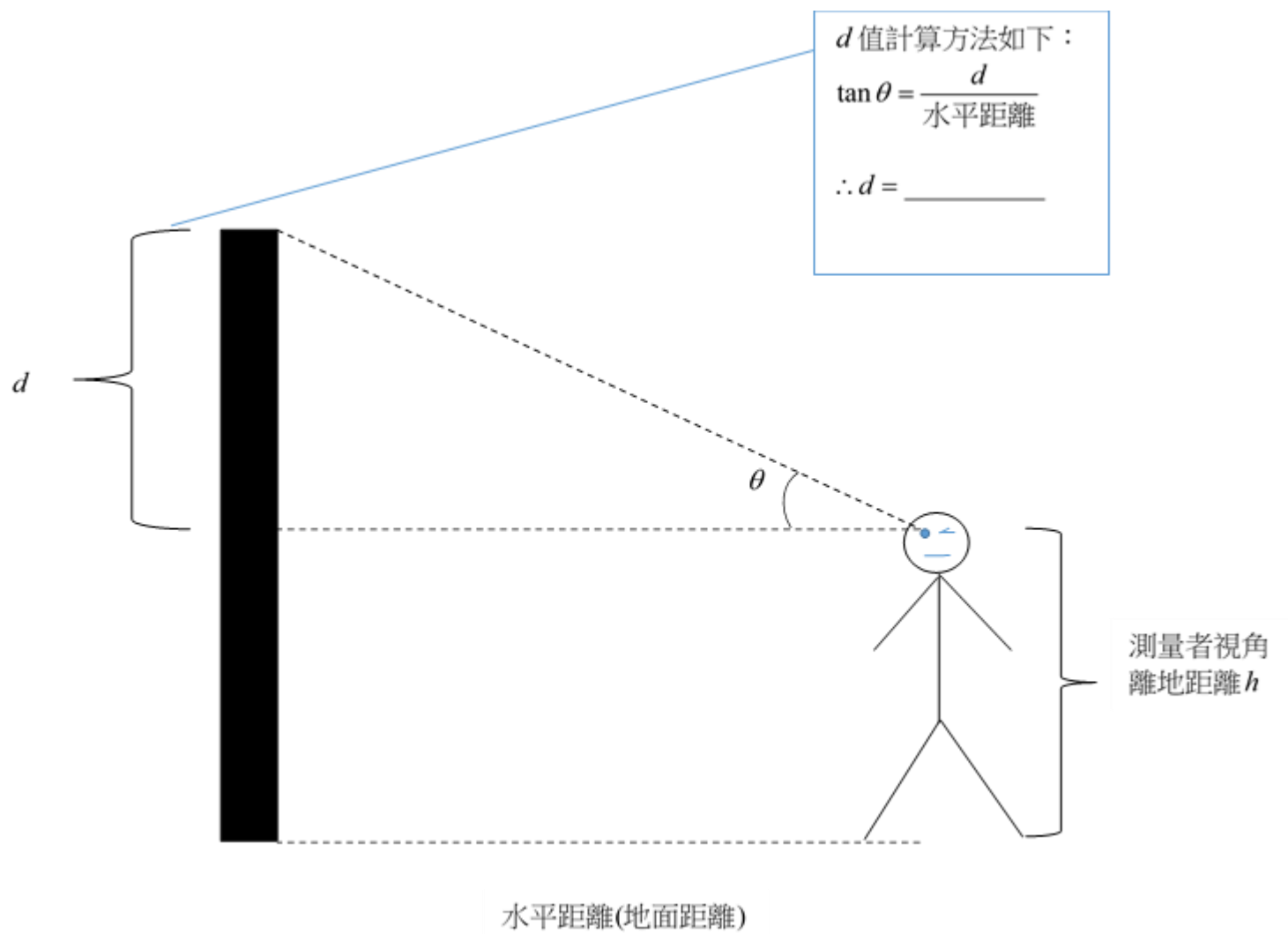
畫圖中...





## 活動(二) 利用仰角器進行間接測量(20-30 mins)

- ▶ 0. 簡單介紹圖像解說，讓學生嘗試自行推演出公式。
  - ▶ 1. 利用仰角器量度班房中實物的高度。
  - ▶ 2. 記錄並完成以下統計圖表，記錄在Microsoft Excel。
  - ▶ 3. 教師可預先量度確實高度，獎勵數值上最接近的組別。
- 
- 善用學生完成的數據，如各組別的數據差異大，可向學生提問有甚麼因素會影響各組所測得的高度，或者要求學生提出提高測量的準確度的建議。



$d$  值計算方法如下：  
 $\tan \theta = \frac{d}{\text{水平距離}}$   
 $\therefore d = \underline{\hspace{2cm}}$

圖像演示

完成下表：

測量 英	物件 A	物件 B	物件 C	物件 D
數值				
仰角 $\theta$				
水平距離(地面距離)				
$d$				
測量者視角的離地距離 $h$				
總高度 $(h+d)$				



# 數值接近真實的學生作品



$d$  值計算方法如下：

$$\tan \theta = \frac{d}{\text{水平距離}}$$

$$\therefore d = \tan \theta \cdot \text{水平距離}$$

完成下表：

測量目標 \ 數值	物件 A (紅點)	物件 B (橙點)	物件 C (黑點)	物件 D 任意物件
仰角 $\theta$	40°	47°	30	63
水平距離(地面距離)	78 <del>180m</del>	89.5	46.5m <del>105m</del>	48m
$d$	<del>70.76m</del> <del>180m</del>	81.4	23.7m <del>111</del>	73.1
測量者視角的離地距離 $h$	1.71	1.71	1.71m	1.71m
總高度 $H$ ( $h+d$ )	<del>24.72</del> <del>30</del>	222.4	194.7	244.1

# 數值誤差非常大的學生作品

完成下表：

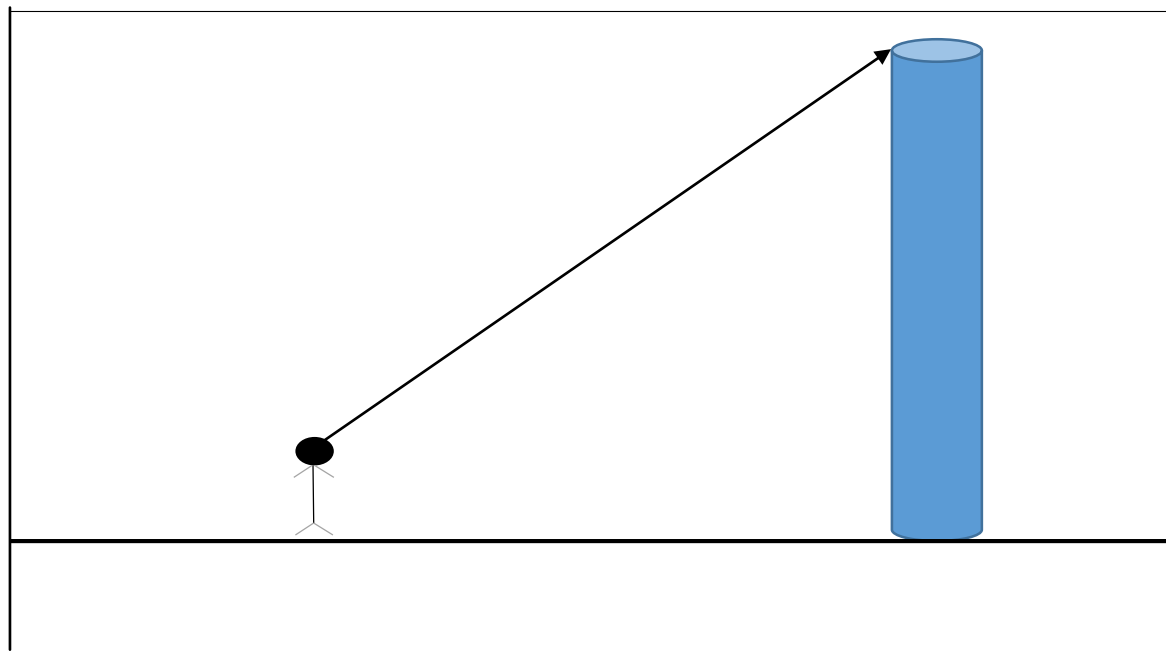
測量目標 數值	物件 A (紅點)	物件 B (橙點)	物件 C (黑點)	物件 D 任意物件
仰角 $\theta$	75	58	68	
水平距離(地面距離)	150	150	148	
$d$	559.8	240	366.3	
測量者視角的離地距離 $h$	150	150	150	
總高度 $H$ ( $h+d$ )	709.8	390	516.3	

1. 出錯就是學習的機會，老師可以提問引導學生發現錯誤的根源所在。
2. 老師亦可透過指出不合理之處、並以教室的參考點(門的高度約兩米)，提醒學生驗算之重要性。



# 延伸問題

- ▶ 假設我想量度學校外的社區中心的建築高度，在不離開學校範圍的情況下，如何能測量得到其建築高度？
- ▶ 老師可給予適量提示，提議學生利用聯立方程以及從不同角度測量。



# 課後反思及改善計劃

- ▶ 1. 學生能掌握、辨認圖形，但學生的手作能力偏弱，較少機會使用測量工具，特別是量角器。
- ▶ 2. 由於場地所限，本次課堂在課室進行，以課室內的物件作測量目標。如場地許可，可帶學生到操場量度學校建築高度，更進一步提起學生的興趣。
- ▶ 3. 可考慮刪減工作紙上的圖像解說，並要求同學自己繪畫，加強其空間想像力及觀察力。

