

2021/22 資優教育學校網絡計劃

學習領域：數學教育

教學設計

鳴謝：此教學設計改編／摘錄自路德會呂祥光小學黃法穎助理主任的課堂實踐

主要學習領域：	數學教育
級別：	小學六年級
課題：	增潤課題：等差級數之和
學習目標：	<p>資優/高能力學生：</p> <ol style="list-style-type: none">1. 學習找出等差級數之項數。2. 學習找出等差級數之和。 <p>特別資優/高能力學生：</p> <p>學生完成更高階的題目(如涉及兩個等差級數)，並說明計算步驟。</p>
學生已有知識：	懂得利用高斯加法找出連續數之和。
本示例特色：	本課業依「資優資優教育三層架構推行模式」的第二層「校本抽離式培育計劃」設計。參與的學生屬六年級的資優／高能力學生。課業內涉及的數學概念如等差級數的各種運算屬第四學習階段的數學內容。此課業有助建立資優／高能力學生敢於挑戰高難度數學題的正面態度。
本示例採用的教學策略：	<ol style="list-style-type: none">1. 為照顧學習多樣性，本示例透過預習活動、課堂活動及錨式活動，讓不同能力及學習進度的學生，都能在活動中各自有增長知識的層面，並深化所學的內容。2. 最後的錨式活動，啟發特別資優/高能力學生計算更複雜的等差數列之和。

學習活動實施流程	設計理念
<p>一、跟進預習:(5分鐘)</p> <p>1. 重溫高斯加法</p> $1+2+3+\cdots+98+99+100=\frac{(1+100)\times 100}{2}=\frac{101\times 100}{2}=5050$ <p>1. 透過 Padlet 應用：同學拍攝展示自己找出 1+3+5+7+...+95+97+99 之和</p> <p>2. 在課堂上跟進 Padlet，對學生作出回饋。</p>	<p>先與學生重溫高斯加法，再透過觀看同學找出1+3+5+...+97+99的演說，學習計算等差級數之和。</p> <p>提問：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 兩個兩個數一組，每組之和是多少？(101) 2. 在「1+2+3+...+98+99+100」數列中，共有多少個數?(100) 3. 你們如何計總和？$(\frac{101\times 100}{2}=5050)$
<p>二、教學內容與探究活動(第一部分):(12分鐘)</p> <p>教學部分一：</p> <p><u>學習找出等差級數之項數</u></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 老師出示 2 組數列，教導學生找出公差和項數。 <ol style="list-style-type: none"> (1)2, 4, 6, 8 (2)1000, 1100, 1200, 1300, 1400 2. 老師講述等差級數之和是把等差數列用「+」相連 <ol style="list-style-type: none"> (1)2+4+6+8 (2)1000+1100+1200+1300+1400 3. 在「4+5+...+100」共有多少個項數？ $\begin{aligned} \text{項數} &= (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{公差} + 1 \\ &= (100-4) \div 1 + 1 \\ &= 96 \div 1 + 1 \\ &= 96 + 1 \\ &= 97 \end{aligned}$ 4. 在「3 + 6 + ... + 999」共有多少個項數？ 	<p>提問：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 在數列2, 4, 6, 8中，公差是多少?項數是多少? (公差2、項數是4) 2. 在數列1000, 1100, 1200, 1300, 1400中，公差是多少?項數是多少? (公差100、項數是5) <p>老師透過「數線」的描述，讓資優 / 高能力的同學得出以下的公式：</p> $\boxed{\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{公差} + 1}$ <p>老師可向一般能力的同學作以下的提問：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 在「4+5+...+100」這數列中，尾項是甚麼？(100) 2. 首項是甚麼？(4) 3. 公差是甚麼？(1) 4. 計算後，項數是多少？(97) <p>老師可向一般能力的同學作以下的提問：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 在「3 + 6 + ... + 999」這數列中，尾項是甚麼？(999)

活動一：

以下等差級數的項數是多少？

- (1) $4 + 8 + 12 + \dots + 8244$
- (2) $5 + 5.2 + 5.4 + \dots + 18$

學生分享、互評

活動流程：

- 1. 教師著學生利用 Nearpod 計算題目。
- 2. 老師可把全班學生於 Nearpod 的計算結果，展示於電子互動顯示屏。
- 3. 全班學生透過電子互動顯示屏，清楚看到其他同學的學習成果，促進同儕間學習。
- 4. 邀請學生出來進行匯報。
- 5. 邀請其他學生進行評鑑。
- 6. 老師作出即時的回饋，鞏固學生所學的內容。
- 7. 為了照顧高能力學生，他們若早完成課堂活動，可進行錨式活動。

- 2. 首項是甚麼？ (3)
- 3. 公差是甚麼？ (3)
- 4. 計算後，項數是多少？ $((999-3)\div 3 + 1=333)$

老師可向資優 / 高能力的同學作以下的提問：

- (1) $4 + 8 + 12 + \dots + 8244$ 的項數如何計?項數是多少?
 $(8244 - 4)\div 4+1=2061$
- (2) $5 + 5.2 + 5.4 + \dots + 18$ 的項數如何計?項數是多少?
 $(18 - 5)\div 0.2+1=66$

1. 教學內容與探究活動(第二部分)：(12分鐘)

教學部分二：

學習找出等差級數之和

1. 老師出示下面的數列，教導學生如何得出計算等差數列之和的公式。

(1) $1+ 2+ 3+\dots+100$

	1	+	2	+	3	+	...	+	98	+	99	+	100	
+)	100	+	99	+	98	+	...	+	3	+	2	+	1	

	101	+	101	+	101	+	...	+	101	+	101	+	101	

老師講解：

- 1. $1+100 +2+99 +3+98 +\dots+99+2 +100+1$ 因為把 1 至 100 連加了兩次，因此得出公式：
 $(\text{首項}+\text{尾項})\times\text{項數}\div 2$
- 2. 在 $5 + 5.2 + 5.4 + \dots + 18$ 中，有多少個項數?
 $(18-5)\div 0.2 + 1 = 66$
- 3. 這數列之和是多少？ $(18+5)\times 66\div 2=759$

活動二：

$$1+3+5+\cdots+2021$$

學生分享、互評

活動流程：

1. 教師著學生利用 Nearpod 計算題目。
2. 老師可把全班學生於 Nearpod 的計算結果，展示於電子互動顯示屏。
3. 全班學生透過電子互動顯示屏，清楚看到其他同學的學習成果，促進同儕間學習。
4. 邀請學生進行匯報。
5. 邀請其他學生進行評鑑。
6. 老師作出即時的回饋，鞏固學生所學的內容。
7. 為了照顧高能力學生，他們若早完成課堂活動，可進行錨式活動。

提問：

1. $1+3+5+\cdots+2021$ 這數列有多少個項數？
 $(2021-1)\div 2 + 1 = 1011$
2. $1+3+5+\cdots+2021$ 這數列之和是多少？
 $(1+2021)\times 1011\div 2 = 2022\times 1011\div 2 = 1\ 022\ 121$

3. 教學內容與探究活動(第三部分)：(12分鐘)

教學部分二：

學習找出較高層次的等差數列之和

1. 老師出示下面的數列
(1) $-1-2-3-4$
(1) $-1-2-3-4\cdots-100$

老師可先以生活化例子(八達通付款)講解負數相加等同於先抽出負號再把數字相加的概念，讓同學先學習並習慣負數分配律，再以首項和公差皆為負數的等差數列給資優 / 高能力學生作挑戰。

1. $-1-2-3-4$ 可看成 $-(1+2+3+4)$ ，因此這數列之和是：
 $-(1+4)\times 4\div 2 = -5\times 4\div 2 = -10$
2. $-1-2-3-4\cdots-100$ 可寫成甚麼？ $-(1+2+3+\cdots+100)$
3. $-1-2-3-4\cdots-100$ 這數列之和是：

$$-(1+2+3+\cdots+98+99+100) = -\frac{(1+100)\times 100}{2} = -\frac{101\times 100}{2} = -5050$$

活動三：

$$5+8+11+\cdots+101 - 7-15-23-\cdots-103$$

活動四：

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + 1\frac{1}{4} + \cdots + 3 = ?$$

學生分享、互評

活動流程：

1. 教師著學生利用 Nearpod 計算題目。
2. 老師可把全班學生於 Nearpod 的計算結果，展示於電子互動顯示屏。
3. 全班學生透過電子互動顯示屏，清楚看到其他同學的學習成果，促進同儕間學習。
4. 邀請學生進行匯報。
5. 邀請其他學生進行評鑑。
6. 老師作出即時的回饋，鞏固學生所學的內容。
7. 為了照顧高能力學生，他們若早完成課堂活動，可進行錨式活動。

提問學生：

1. 若把 $5+8+11+\cdots+101 - 7-15-23-\cdots-103$ 重新整理，可怎樣寫？

$$(5+8+11+\cdots+10) - (7+15+23+\cdots+103)$$

2. 它的和是多少？

$$(5+8+11+\cdots+10) - (7+15+23+\cdots+103)$$

$$=(5+10) \times 33 \div 2 - (7+103) \times 13 \div 2$$

$$=1749-715$$

$$=1034$$

同學掌握以上一式包含兩個等差數列的算式後，老師可以把兩個等差數列的項交替排列出來，進一步挑戰資優 / 高能力的同學的觀察力。

提問學生：

1. 它的和是多少？

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + 1\frac{1}{4} + \cdots + 3$$

$$=(\frac{1}{2} + 3) \times 11 \div 2$$

$$=19\frac{1}{4}$$

四、錨式活動(供資優/高能力學生深入探究)

若學生成功完成之前的課堂活動，老師會派發錨式活動工作紙。

Q1

$$\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + \dots + 100 - 1 - 2 - 3 - \dots - 50 = ?$$

$$\left(\frac{1}{2} + 100\right) \times 200 \div 2 - (1 + 2 + \dots + 50)$$

$$= 10050 + (1 + 50) \times 50 \div 2$$

$$= 10050 + 1275$$

$$= 11325$$

Q2

$$0.12 + 0.23 + 0.34 + \dots + 2.1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \dots - 2\frac{1}{2} = ?$$

$$= (0.12 + 0.23 + 0.34 + \dots + 2.1) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \dots + 2\frac{1}{2}\right)$$

$$= (0.12 + 2.1) \times 19 \div 2 - \left(\frac{1}{6} + 2\frac{1}{2}\right) \times 15 \div 2$$

$$= 21.09 - 20$$

$$= 1.09$$

• 錨式活動挑戰資優/高能力學生的解難能力。

➤ 在過程中，同學需要找出連續兩數的等差、數列的項數和等差數列之和

五、總結(4分鐘)

1. 項數 = (尾項 - 首項) ÷ 公差 + 1

2. 等差數列之和 = (首項 + 尾項) × 項數 ÷ 2

六、鞏固練習

學生完成 wordwall 內的練習，以鞏固學生課堂所學。