

路德會呂祥光小學
六年級數學科
等差級數之和



知識重溫-高斯加法

計算 $1+2+3+4+\dots+100$ 的方法:

可以看成是:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ +) 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

知識重溫-高斯加法

$$\bullet \frac{(101 \times 100)}{2} = 50 \times 101$$

2

$$= 5050$$

	1	+	2	+	3	+	...	+	98	+	99	+	100
+)	100	+	99	+	98	+	...	+	3	+	2	+	1
<hr/>													
	101	+	101	+	101	+	...	+	101	+	101	+	101

跟進預習 (Padlet 說數活動)

• $1+3+5+7+\dots+95+97+99=?$



學習目標

- 找等差級數之項數
- 找等差級數之和



等差數列

- 兩個相鄰的數都有相同的差的數列

- 如 (1) 2, 4, 6, 8

公差是2，項數是4。

(2) 1000, 1100, 1200, 1300, 1400。

公差是100，項數是5。

等差級數之和

- 把等差數列內的數用「+」相連，
- 如 (1) $2+4+6+8$
(2) $1000+1100+1200+1300+1400$

教學部分1:等差級數之項數

以 $4+5+\dots+100$ 為例:

首項=4，尾項=100，公差 = 1

$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{公差} + 1$$

$$= (100 - 4) \div 1 + 1$$

$$= 96 \div 1 + 1$$

$$= 96 + 1$$

$$= 97$$

教學部分1:等差級數之項數

以 $3 + 6 + 9 + \dots + 999$ 為例:

首項 = 3 , 尾項 = 999 , 公差 = 3

$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{公差} + 1$$

$$= (\text{■} - \text{■}) \div \text{■} + 1$$

教學部分1:等差數列之項數

以 $3 + 6 + 9 + \dots + 999$ 為例:

首項 = 3 , 尾項 = 999 , 公差 = 3

$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{公差} + 1$$

$$= (999 - 3) \div 3 + 1$$

$$= 333$$

$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{公差} + 1$$

課堂練習1

• 以下的數列的項數是多少？

(1) $4 + 8 + 12 + \dots + 8244$

(2) $5 + 5.2 + 5.4 + \dots + 18$



$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{公差} + 1$$

課堂練習1

- 以下的數列的項數是多少？

$$(1) 4 + 8 + 12 + \dots + 8244$$

$$= (8244 - 4) \div 4 + 1$$

$$= 2061$$

$$(2) 5 + 5.2 + 5.4 + \dots + 18$$

$$= (18 - 5) \div 0.2 + 1$$

$$= 66$$

$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{公差} + 1$$

教學部分2:等差級數之和

考慮:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

- 首項是1，尾項是100
- 首項與尾項之和
 $= 1 + 100 = 101$
- 公差是1
- 項數 $= (100 - 1) \div 1 + 1$
 $= 100$

$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{公差} + 1$$

教學部分2:等差級數之和

考慮:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ +) 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

$$1 + 100 + 2 + 99 + 3 + 98 \dots + 99 + 2 + 100 + 1 \\ = (1 + 100) \times 100。$$

由於這數列把1至100連加了兩次，若只計算
 $1 + 2 + 3 \dots + 100$ ，要把 $(1 + 100) \times 100 \div 2$
得出公式: $= (\text{首項} + \text{尾項}) \times \text{項數} \div 2$

$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{公差} + 1$$

$$\text{等差級數之和} = (\text{首項} + \text{尾項}) \times \text{項數} \div 2$$

教學部分2:等差級數之和

考慮:

$$5 + 5.2 + 5.4 + \dots + 18$$

項數

$$\begin{aligned} &= (18 - 5) \div 0.2 + 1 \\ &= 66 \end{aligned}$$

等差級數之和

$$\begin{aligned} &= (18 + 5) \times 66 \div 2 \\ &= 759 \end{aligned}$$

$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{公差} + 1$$

$$\text{等差級數之和} = (\text{首項} + \text{尾項}) \times \text{項數} \div 2$$

課堂練習2:

提示: 先找 (1) 項數 (考慮公差)
再找 (2) 之和

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2021 = ?$$

(1) 項數: _____

(2) 和: _____



$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{項差} + 1$$

$$\text{等差級數之和} = (\text{首項} + \text{尾項}) \times \text{項數} \div 2$$

課堂練習2:

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2021 = ?$$

(1) 項數: $(2021 - 1) \div 2 + 1 = 1011$

(2) 和:

$$\begin{aligned} & (1 + 2021) \times 1011 \div 2 \\ & = 2022 \times 1011 \div 2 \\ & = 1022121 \end{aligned}$$



自我評估



$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{項差} + 1$$

$$\text{等差級數之和} = (\text{首項} + \text{尾項}) \times \text{項數} \div 2$$

教學部分3:

$$\begin{aligned} -1 - 2 - 3 - 4 &= - (1 + 2 + 3 + 4) \\ &= - [(1 + 4) \times 4 \div 2] \\ &= -10 \end{aligned}$$

$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{項差} + 1$$

$$\text{等差級數之和} = (\text{首項} + \text{尾項}) \times \text{項數} \div 2$$

教學部分3:

$$\begin{aligned} -1 - 2 - 3 - 4 - \dots - 100 &= - (1 + 2 + 3 + 4 \dots + 100) \\ &= - [(1 + 100) \times 100 \div 2] \\ &= - 5050 \end{aligned}$$

$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{項差} + 1$$

$$\text{等差級數之和} = (\text{首項} + \text{尾項}) \times \text{項數} \div 2$$

課堂練習3:

找出以下等差級數之和

$$5 + 8 + 11 \dots + 101 - 7 - 15 - 23 \dots - 103$$



$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{項差} + 1$$

$$\text{等差級數之和} = (\text{首項} + \text{尾項}) \times \text{項數} \div 2$$

課堂練習3:

找出以下等差級數之和

$$5+8+11\dots+101-7-15-23\dots-103$$

$$5+8+\dots+101 - (7+15+23\dots+103)$$

$$= (5+101) \times 33 \div 2 - (7+103) \times 13 \div 2$$

$$= 1749 - 715$$

$$= 1034$$



自我評估



$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{項差} + 1$$

$$\text{等差級數之和} = (\text{首項} + \text{尾項}) \times \text{項數} \div 2$$

課堂練習4:

$$\bullet \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + 1\frac{1}{4} \dots + 3 = ?$$

和:

= _____

= _____

提示:

1. 公差是多少?

2. 項數是多少?



$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{項差} + 1$$

$$\text{等差級數之和} = (\text{首項} + \text{尾項}) \times \text{項數} \div 2$$

課堂練習4：

$$\bullet \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + 1\frac{1}{4} \dots + 3 = ?$$

提示：

1. 公差是多少？ $\frac{1}{4}$

2. 項數是多少？

$$\begin{aligned} & (3 - \frac{1}{2}) \div \frac{1}{4} + 1 \\ & = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + 1\frac{1}{4} \dots + 3 \\ & = (\frac{1}{2} + 3) \times 11 \div 2 \\ & = 19\frac{1}{4} \end{aligned}$$

自我評估



$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{項差} + 1$$

錨式活動:

$$\text{等差級數之和} = (\text{首項} + \text{尾項}) \times \text{項數} \div 2$$

$$\frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + 100 - 1 - 2 - 3 - \dots - 50 = ?$$

提示:

1. 有多少個等差級數?
2. 各自的公差是多少?
3. 各自的項數?

$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{項差} + 1$$

$$\text{等差級數之和} = (\text{首項} + \text{尾項}) \times \text{項數} \div 2$$

錨式活動:

$$\frac{1}{2} + 1 + 1 \frac{1}{2} + \dots + 100 - 1 - 2 - 3 - \dots - 50 = ?$$

$$\left(\frac{1}{2} + 100\right) \times 200 \div 2 - (1 + 2 + \dots + 50)$$

$$= 10050 + (1 + 50) \times 50 \div 2$$

$$= 10050 + 1275$$

$$= 11325$$

$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{項差} + 1$$

$$\text{等差級數之和} = (\text{首項} + \text{尾項}) \times \text{項數} \div 2$$

錨式活動:

$$\bullet 0.12 + 0.23 + 0.34 + \dots + 2.1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \dots - 2\frac{1}{2} = ?$$

提示:

1. 有多少個等差級數?
2. 各自的公差是多少?
3. 各自的項數?

$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{項差} + 1$$

$$\text{等差級數之和} = (\text{首項} + \text{尾項}) \times \text{項數} \div 2$$

錨式活動:

$$\bullet 0.12 + 0.23 + 0.34 + \dots + 2.1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \dots - 2\frac{1}{2} = ?$$

$$= (0.12 + 0.23 + 0.34 + \dots + 2.1) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \dots + 2\frac{1}{2} \right)$$

$$= (0.12 + 2.1) \times 19 \div 2 - \left(\frac{1}{6} + 2\frac{1}{2} \right) \times 15 \div 2$$

$$= 21.09 - 20$$

$$= 1.09$$

自我評估



總結:

項數 = _____

等差級數之和 = _____

總結:

$$\text{項數} = (\text{尾項} - \text{首項}) \div \text{項差} + 1$$

$$\text{等差級數之和} = (\text{首項} + \text{尾項}) \times \text{項數} \div 2$$