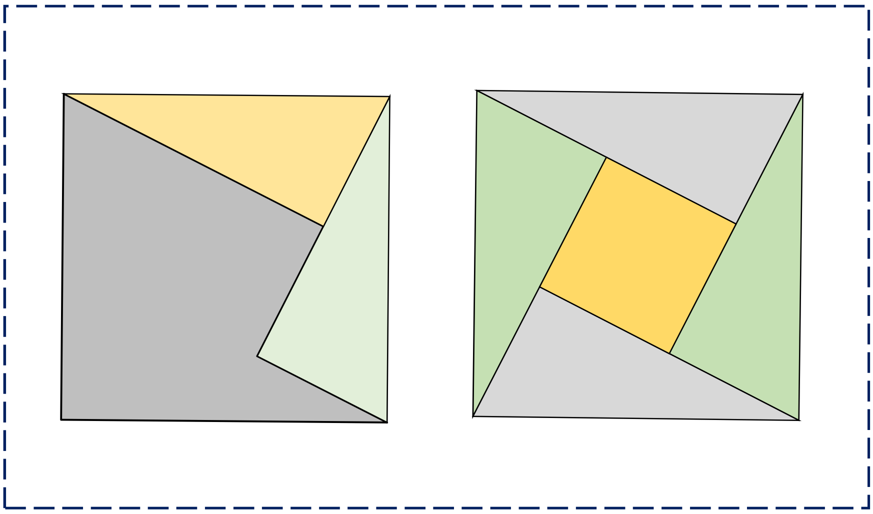
2015/16 第七屆香港中學數學創意解難比賽 (初賽一筆試)

答題紙

學校編號:	試場編號：	比賽場次:	座位編號:	得分:

	答案	分數
1.	S = **2031120**。	/2
2.	當 x = ___ **20**__時，y = ___**16**___ 為最大可能值。	1+1 /2
3.	有 ___**5**___ 名學生沒有修讀地理科同時沒有修讀經濟科。	/2
4.	正立方體共有 __**16**_條「對角線」。	/2
5.	$A + B$ = __**4**_。	/2
6.	$d < b < a < c$	/2
7.	x 的最小值為 __**14**__。y 的最小值為 __**9**____。	1+2 /3
8.	媽媽現在__**61**_歲。女兒現在_**34**_歲。	1 or 3 /3
9.	AF 的長度是_ $8+2\sqrt{32}$ / $8+8\sqrt{2}$ / 19.3。	/3
10.	$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx$ = _**7**_______。	/3

11.	須取出_**2019** 隻襪子。	/3
12.	x = _**149**_ 。	/3
13.	集會中共有 __**64**___ 人。	/3
14.	正方形的周界為 __**72**_ cm。	/3
15.	S 的最小值是 _**125**_ 。	/3
16.	冠軍是 __**1D**__，亞軍是 ___**1B**____，季軍是 ___**1A**___ 。	/3
17.	RS = _$\mathbf{8\sqrt{3}-12}$ _/ **1.86 / 1.9** cm。	/3
18.	$\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{2016}}{x_1+x_2+\ldots+x_{2016}}$ = __**1**____ 。	/4
19.	(圖 19b) 任何滿足條件的答案。 	1 + 3 /4
	總分	**/53**

1. [2031120]

$$S = 2\left(1-\frac{1}{2}\right) + 3\left(1-\frac{1}{3}\right) + \cdots + 2015\left(1-\frac{1}{2015}\right) + 2016\left(1-\frac{1}{2016}\right)$$

$$S = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\right) + \cdots + 2015\left(\frac{2014}{2015}\right) + 2016\left(\frac{2015}{2016}\right)$$

$$S = 1 + 2 + \cdots + 2014 + 2015$$

$$S = \frac{2015}{2}(1 + 2015) = 2031120$$

2. [–20, 16]

$y = -3(x + 20)^2 + 16$

$-3\ (x + 20)^2$ 不可能是正數，最大值是 0。

當 $x = -20$，$y = -3(0) + 16 = 16$ 為最大值。

3. [5]

120 – (70 – 35) – (80 – 35) – 35 = 5

4. [16]

X ，在立方體面上的對角線： 2 x 6 =12

Y，不在立方體面上的對角線： 4

共有 12 + 4 = 16 條「對角線」

5. [4]

$1 + 3 = 4$

圖(5)

Figure (5)

1	3	2	
3	2	1	← ***A***
2	1	3	← ***B***

6. [$d < b < a < c$]

設 $a - 2013 = b + 2014 = c - 2015 = d + 2016 = R$，

得 $a = R + 2013$， $b = R - 2014$，$c = R + 2015$，$d = R - 2016$，

因此，$d < b < a < c$。

7. [14，9]

若 $\sqrt{2016x}$ 為整數 b，則$(2^5)(3^2)(7)\, x = a^2$，故 $x = (2)(7) = 14$ 為最小值。

若 $\sqrt{2016 + y}$ 為整數 a，則 $2016 + y = a^2$。

由於 $44^2 = 1936 < 2016 < 2025 = 45^2$，故 $y = 9$ 為最小值。

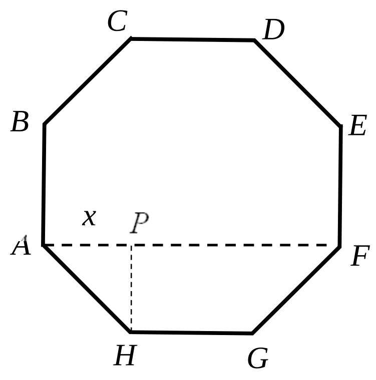
8. [61 歲 ，34 歲]

設媽媽及女兒現在分別是 x 及 y 歲。

$88 - x = x - y = y - 7$，解得 $x = 61$ 及 $y = 34$。

9. [$8+2\sqrt{32}$ / $8+8\sqrt{2}$ / 19.3]

連接 PH 其中 $PH \perp AF$。



APH 為一等腰直角三角形，設 $AP = PH = x$。

$x^2 + x^2 = 8^2$

$x^2 = 32$

$x = \sqrt{32}$

$AF = \sqrt{32} + 8 + \sqrt{32}$

$AF = 8 + 2\sqrt{32}$ 或 $AF = 8 + 8\sqrt{2}$ 或 $AF = 19.3137$

10. [7]

$x + y = 1$， $(x+y)^2 = 1^2$ ，得 $x^2 + y^2 + 2xy = 1$，

$x + z = 2$， $(x+z)^2 = 2^2$ ，得 $x^2 + z^2 + 2xz = 4$ ，

$y + z = 3$， $(y+z)^2 = 3^2$ ，得 $y^2 + z^2 + 2yz = 9$ ，

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 14$，

因此， $x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 7$。

11. [2019]

當某種顏色的 2016 隻襪子全被抽出後，只要再抽出 3 隻襪子，就可肯定當中最少有兩對不同顏色的襪子。即 2016 + 3 = 2019。

12. [149]

$$\frac{14 \times AD}{2} = 49$$

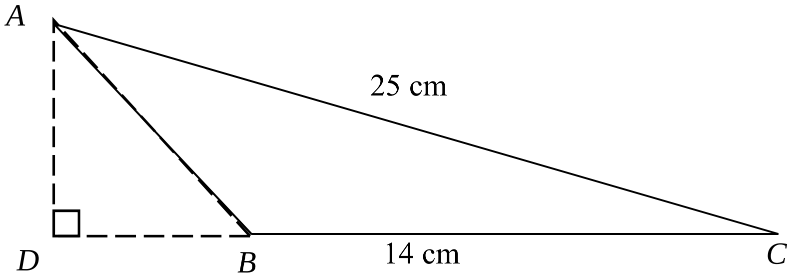
$$AD = 7$$

$$CD = \sqrt{25^2 - 7^2}$$

$$CD = 24$$

$$BD = 24 - 14 = 10$$

$$AB = \sqrt{7^2 + 10^2} = \sqrt{149}$$



13. [64]

設集會中共有 n 人。

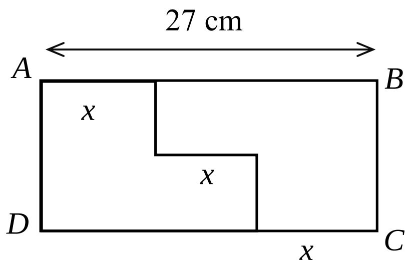
$$\frac{n(n-1)}{2} = 2016$$

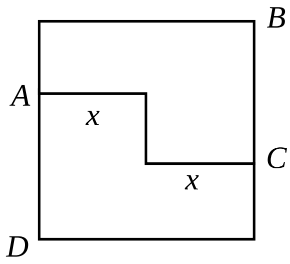
$$n(n-1) = 4032$$

因　　$64 \times 63 = 4032$

得 $n = 64$。

14. [72 cm]





設圖中的重疊長度為 x cm。

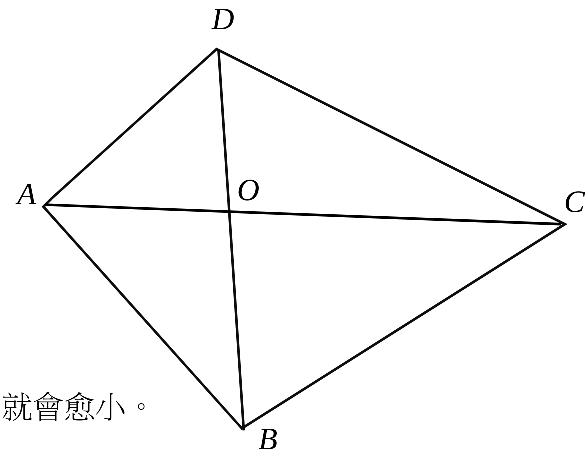
$3x = 27$

$x = 9$

正方形邊長 = 18 cm

正方形周界 = 18 cm × 4 = 72 cm

15. [125]



設 △OAB 的面積 = a 及 △OCD 的面積 = b。

$$\frac{20}{a} = \frac{OD}{OB} = \frac{b}{45}$$

$ab = 900$

當兩數的積固定時，兩數愈接近時，兩數的和就會愈小。

所以，當 $a = b = 30$ 時，$a + b$ 的最小值為 30 +30 = 90。

因此，S 的最小值為 20 + 45 + 60 = 125。

16. [冠軍是 1D、亞軍是 1B、季軍是 1A]

預測做得最好的有多於兩個正確，即全部猜對。

只可能是小明全猜錯，小華全猜對。

即　　冠軍是 1D、亞軍是 1B、季軍是 1A。

17. [$8\sqrt{3}-12$]

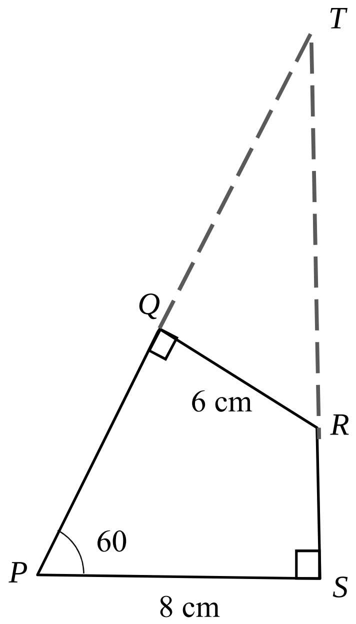
如圖延長 *PQ* 及 *SR* 相交於 *T*。

$\angle TRQ = 60$

在　$\triangle TPS$ 中，$TS = 8 \tan 60 \quad = 8\sqrt{3}$ cm

在　$\triangle TQR$ 中，$TR = 6 \div \cos 60 \quad = 12$ cm

$RS = 8\sqrt{3} - 12$ cm



18. [1]

設 $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2016}$。

$$S - a_{2016} = 2015\, x_1$$

$$S - a_{2015} = 2015\, x_2$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$S - a_1 \quad = 2015\, x_{2016}$$

故 $2016S - S = 2015\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_{2016})$

$$2015S = 2015\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_{2016})$$

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2016}$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2016} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2016}$$

因此，$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2016})/(x_1 + x_2 + \ldots + x_{2016}) = 1$

19.　　解: 面積 = $4^2 + 2^2 = 20$ cm^2。併合之正方形邊長 $\sqrt{20}$ cm，約 4.47 cm。

考慮畢氏定理以$\sqrt{4^2 + 2^2}$ 做出正方形邊長。

以下為兩例: