

2015/16 第七屆香港中學數學創意解難比賽 (決賽)

預備卷

此卷目的為正卷涉及的相關知識作簡介。下列問題雖不作評分用途，其內容對正卷之解答有一定關連，請用心閱讀及解答。各問題之答案印於第 4 頁，請自行核對。

(I) 概率 / 機會率 (Probability / Chance)

一個事件的概率是一個 0 至 1 之間的數值，用以量度這件事情發生可能性。概率的數字越大，這件事情便越有可能發生。

例如:

在一次數學測驗中，志强取得 A 級的機會為 0.2，而取得 B 級的機會為 0.5。

志强取得 B 級的可能性比取得 A 級的可能性大。

1.A 以列出可能結果的方法求概率

某事件的概率 = $\frac{\text{其中能使這事件發生的結果的數目}}{\text{所有可能結果的數目}}$ 。其中所列舉的結果均有同樣可能。

例 1 投擲一顆骰子，求得出結果是單數的概率。

當投擲一顆骰子時，結果可能是: 1、2、3、4、5、6。假設這骰子是「公平」的，這 6 個結果均同樣可能。

6 個結果中 1、3、5 這 3 個結果使得「擲出單數」這事件發生，因此:

$$\text{「擲出單數」的機會} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad (\text{亦可以表示成 } 50\% \text{ 機會})$$

同樣地，「擲出數字大於 4」的概率 = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。

問題 (1):

當投擲一顆骰子，得出 3 的倍數的概率是多少? _____

例 2

有兩疊數字卡，其中一疊有四張卡，卡上分別印有數字 2、4、6 及 10。另一疊有三張卡，分別印有數字 5、7 及 9。

若從每疊都抽出一張數字卡，共有 $4 \times 3 = 12$ 可能結果，所有結果均同樣可能。

可以表格列出所有結果。由於此處關注兩數相加的結果，可於格內計算相加的結果。

	2	4	6	10
5	$2 + 5 = 7$	$4 + 5 = 9$	$6 + 5 = 11$	$10 + 5 = 15$
7	$2 + 7 = 9$	$4 + 7 = 11$	$6 + 7 = 13$	$10 + 7 = 17$
9	$2 + 9 = 11$	$4 + 9 = 13$	$6 + 9 = 15$	$10 + 9 = 19$

事件「抽出的兩數的和大於 16」只發生於 $10 + 7$ 或 $10 + 9$ 這兩種結果之下。

因此，「抽出的兩數的和大於 16」的概率 = $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。

問題 (2):

以例 2 所述的兩疊數字卡，若從每疊抽出一卡，

- 「兩個抽出數字相加成 11」的機會是多少? _____
- 「兩個抽出數字相加大於 10」的機會是多少? _____

1.B 概率的運算

1.B.1

若一事件會發生的概率是 p ，則這事件不會發生的概率是 $(1-p)$ 。

例 3

「今天會下雨」的機會是 20%。

則，「今天不會下雨」的機會是 $= 1 - 20\% = 80\%$ 。

問題 (3):

- 「志明會帶雨傘」的概率是 0.3。「志明不會帶雨傘」的概率是多少? _____
- 陳老師課堂問問題時，問男同學的機會率為 $\frac{3}{4}$ 。問女同學的機會率是 _____。

1.B.2

A 和 B 是兩件獨立事 (independent)。若事件 A 發生的概率是 p 、事件 B 發生的概率是 q ，則 A 和 B 都發生的概率是 $p \times q$ 。

例 4

志强在數學測驗取得 A 級的機會率是 0.9，家恩在這測驗取得 A 級的機會率是 0.2。

志强和家恩兩人都在這測驗取得 A 級的機會率 = $0.9 \times 0.2 = 0.18$ 。

問題(4):

今天會下雨的概率是 0.6。明天會下雨的概率是 0.2。大明會帶雨傘的概率是 0.3。

- a. 今天下雨而大明也帶了雨傘的概率是多少? _____
- b. 今天不下雨而明天下雨的概率是多少? _____

(II) 期望值 (Expected Value)

例 5

陳先生每次外出早餐都有兩個選擇，一個簡單早餐(消費\$22)或一個豐盛早餐(消費\$50)。根據陳先生一向習慣，他選簡單餐的概率是 0.8，選豐盛餐的概率是 0.2。

	簡單早餐	豐盛早餐
消費	\$ 22	\$ 50
概率	0.8	0.2

陳先生的早餐消費中，\$ 22 及 \$ 50 均有可能出現。而他的「早餐消費的期望值」則將這兩個價錢出現的概率均作出考慮，計算如下： $0.8 \times \$22 + 0.2 \times \$50 = \$27.6$ 。

這個數也可視為陳先生這長期習慣下，早餐消費的平均數。

雖然陳先生沒有一次早餐會消費 \$27.6，但這個期望值比 \$22 或 \$50 更合適地描述了他的早餐消費。

若某件事情會出現 n 個可能的結果，每個結果的概率分別為 P_1 、 P_2 、...、 P_n ，這些結果會帶出(或涉及)的價值分別為 V_1 、 V_2 、...、 V_n 。

$$\text{期望值} = P_1 \times V_1 + P_2 \times V_2 + \dots + P_n \times V_n$$

用以綜合各種可能性下這事情可帶出的價值。

例 6

在一個抽獎之中，參加者有機會得到**最高**價值\$100的現金卷。抽得各獎的概率如下：

現金卷價值 (\$)	0	10	50	100
概率	0.875	0.124	0.0009	0.0001

獎金的期望值 = $\$0 \times 0.875 + \$10 \times 0.124 + \$50 \times 0.0009 + \$100 \times 0.0001 = \$ 1.295$

這期望值 \$1.295 相比於那「最高」獎金的 \$100 更公正地反映參加這抽獎的得益。

問題 (5)

- a. 有一個遊戲，結果可以是得 0 分、2 分或 100 分。各種得分的概率如下：

得分	0	2	100
概率	0.8	0.15	0.05

計算這個遊戲的得分的期望值。

答： 得分期望值 = _____

- b. 在一個遊戲中，參加者會拋兩個硬幣。若**兩個**硬幣都出了「正面」，參加者會贏得 \$50，否則只贏得 \$3。這個遊戲的回報的期望值是多少？

兩個硬幣都出了「正面」的率概 = _____

這個遊戲的回報的期望值 = \$ _____

若要付出 \$15 作為這個遊戲的報名費用，值得嗎？

答案：

- (1) [3 的倍數為: 3、6。] 概率 = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。
- (2) a. [符合事件的結果有兩個: 6 + 5, 4 + 7。] 機會率 = $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。
b. [符合事件的結果有 12 - 3 = 9 個] 機會率 = $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ 。
- (3) a. $1 - 0.3 = 0.7$ 。 b. $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ 。
- (4) a. $0.6 \times 0.3 = 0.18$ b. $(1-0.6) \times 0.2 = 0.08$
- (5) a. $0 \times 0.8 + 2 \times 0.15 + 100 \times 0.05 = 5.3$ 分
b. 兩個正面的概率 = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ，期望值 = $\frac{1}{4} \times (\$50) + \frac{3}{4} \times (\$3) = \$14.75$