2015/16 第七屆香港中學數學創意解難比賽 (決賽)

限時: 40 分鐘

A. 田忌賽馬 (30 分)

昔戰國時，齊田忌數與齊諸公子馳逐重射。孫臏見其馬足不甚相遠，馬有上、中、下輩。於是臏謂忌曰：「君第重射，臣能令君勝。」忌信然之，與王及諸公子逐射千金。及臨質，臏曰：「今以君之下駟與彼上駟，取君上駟與彼中駟，取君中駟與彼下駟。」 既馳三輩畢，而田忌一不勝而再勝，卒得王千金。 <史記:孫子吳起列傳>

上文出自《史記・孫子吳起列傳》，大意是這樣的 :

田忌經常和齊威王賽馬， 馬分上、中、下三等，齊威王的上馬比田忌的上馬略為優勝，中馬和下馬都是這樣子 ; 然而田忌的上馬是可以跑贏齊威王的中馬和下馬的， 而中馬亦可以跑贏齊威王的下馬。

賽制是這樣 :
雙方在上、中、下三等馬中，每個等級揀取一匹參賽， 比賽共分三場，贏得兩場或以上者勝。

每次對壘，田忌總是輸多贏少，後來孫臏給田忌獻計，田忌果然得勝。

孫臏的方法就是用自己的下馬和對方的上馬比試，先輸一場，但之後用上馬對中馬、中馬對下馬，接著連贏兩場，於是總場數二比一，贏了這次對壘。

問題(1)

a. 將上、中、下三等馬，安排在三場比賽中，其中一個安排方法是 :(上中下) ，即第一場出上馬 ; 第二場出中馬 ; 第三場出下馬。請問田忌安排馬匹出賽，共有多少種安排的方法？
請用(上中下)這種表達形式，把安排的方法全部列舉出來。

(上中下)，(上下中)，(中上下)，(中下上)，(下上中)，(下中上)。

(6A)

b. 下表用以表示田忌與齊威王雙方採用各種的排列方式下賽馬的結果。其中，若田忌以他的「上中下」對齊威王的「上中下」，則齊威王得勝。
請完成下表。

賽馬結果 (齊: 齊威王勝; 田: 田忌勝)

		田忌					
		上中下	上下中	中上下	中下上	下上中	下中上
齊威王	上中下	齊	齊	齊	齊	田	齊
	上下中	齊	齊	齊	齊	齊	田
	中上下	齊	田	齊	齊	齊	齊
	中下上	田	齊	齊	齊	齊	齊
	下上中	齊	齊	齊	田	齊	齊
	下中上	齊	齊	田	齊	齊	齊

(6A)

問題(2)

a. 田忌與齊威王對壘，如果大家都是「隨機」安排馬匹的出場次序，也就是雙方均不對任何次序有特別偏好。田忌勝出的機會是多少%？

機會率 = 6/ 36 = 1/6 = 16.7% (3A)

b. 如果田忌和齊威王一年中都總有 30 次對壘，試估計田忌大約可以勝出多少次。

30 × 1/ 6 = 5 (3A)

問題(3)

假設齊威王總是將上馬留在最後一場出賽， 那麼田忌應該怎樣安排自己馬匹的出場次序從而使勝算儘可能增加？這情況下獲勝的機會又是多少% ？

		田忌					
		上中下	上下中	中上下	中下上	下上中	下中上
齊威王	上中下	齊	齊	齊	齊	田	齊
	上下中	齊	齊	齊	齊	齊	田
	中上下	齊	田	齊	齊	齊	齊
	中下上	田	齊	齊	齊	齊	齊
	下上中	齊	齊	齊	田	齊	齊
	下中上	齊	齊	田	齊	齊	齊

田忌只用「上中下」或 「中上下」這兩種次序。獲勝的機會 = 2/4 = 50% (3A + 3A)

問題(4)

倘若齊威王從不將上馬留在最後一場出賽，田忌獲勝的最大機會又是多少% ？

		田忌					
		上中下	上下中	中上下	中下上	下上中	下中上
齊威王	上中下	齊	齊	齊	齊	田	齊
	上下中	齊	齊	齊	齊	齊	田
	中上下	齊	田	齊	齊	齊	齊
	中下上	田	齊	齊	齊	齊	齊
	下上中	齊	齊	齊	田	齊	齊
	下中上	齊	齊	田	齊	齊	齊

田忌只用 「下上中」、「下中上」、「上下中」、「中下上」4 種次序。 (3A)

獲勝的機會 = 4/16 = 25% (3A)

B. 二人對奕 (44 分)

老師對小明和小芳說 ：「想跟兩位玩一個遊戲，你們各自握拳，當我說開始的時候，雙方各把右手伸出，手上豎一隻手指或兩隻手指。
如果大家都豎起一隻，小明得 0 分，小芳得 6 分。
如果大家都豎起兩隻，小明得 2 分，小芳得 4 分。
如果小明豎起一隻而小芳豎起兩隻，則小明 4 分小芳 2 分。
如果小明豎起兩隻而小芳豎起一隻，則小明 5 分小芳 1 分。」

上面的資料可以表列如下 ：

遊戲得分 (小明得分, 小芳得分)

		小芳	
		一隻手指	兩隻手指
小明	一隻手指	(0 , 6)	(4 , 2)
	兩隻手指	(5 , 1)	(2 , 4)

他們兩人明白遊戲規則後便經常對玩。

問題(1)

假設小明是隨機地豎起手指，也就是對於兩種選擇均無特別偏好。

a. 若小芳選擇豎起一隻手指，她得分的期望值是多少？

若小芳豎起一隻手指，
小明豎起一隻手指，概率 = 0.5，小芳得分 = 6
小明豎起兩隻手指，概率 = 0.5，小芳得分 = 1
得分期望值 = 0.5 × 6 + 0.5 × 1 = 3.5 分 **(3A)**

b. 這種情況下，小芳應該豎起一隻還是兩隻手指，方為上算？試詳細解釋。

若小芳豎起兩隻手指，
小明豎起一隻手指，概率 = 0.5，小芳得分 = 2
小明豎起兩隻手指，概率 = 0.5，小芳得分 = 4
得分期望值 = 0.5 × 2 + 0.5 × 4 = 3 分 **(3A)**

3.5 分 > 3 分
所以，小芳豎起一隻手指較為上算。 **(2A)**

問題(2)

若小明改變了習慣，他只有 0.25 的機會率豎起一隻手指，卻有 0.75 的機會率豎起兩隻手指。

這種情況下，小芳應該豎起一隻還是兩隻手指，方為上算？請詳細解釋。

若小芳豎起一隻手指，

小明豎起一隻手指，概率 = 0.25，小芳得分 = 6

小明豎起兩隻手指，概率 = 0.75，小芳得分 = 1

得分期望值 $= 0.25 \times 6 + 0.75 \times 1 = 2.25$ 分 **(3A)**

若小芳豎起兩隻手指，

小明豎起一隻手指，概率 = 0.25，小芳得分 = 2

小明豎起兩隻手指，概率 = 0.75，小芳得分 = 4

得分期望值 $= 0.25 \times 2 + 0.75 \times 4 = 3.5$ 分 **(3A)**

3.5 分 > 2.25 分

所以，小芳豎起兩隻手指較為上算。 **(2A)**

問題(3)　　遊戲熟習後，小明開始思考策略。

假設小明豎起一隻手指的機會率為 p，豎起兩隻手指的機會概為 $(1-p)$。

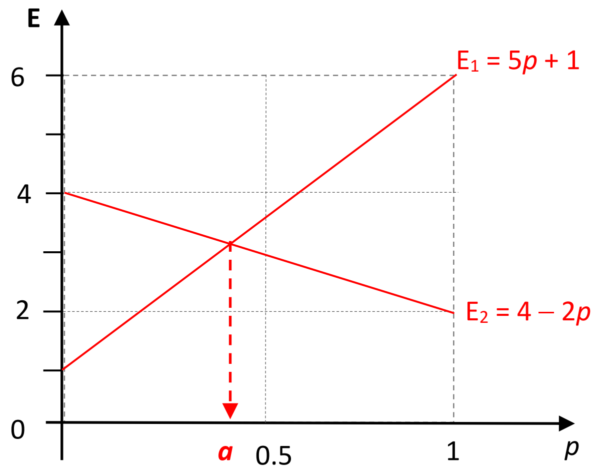
a. 若小芳豎起一隻手指，她的得分期望值為 E_1。以 p 表示 E_1。

$E_1 = 6p + 1(1-p) = 5p + 1$ **(3A)**

b. 若小芳豎起兩隻手指，她的得分期望值為 E_2。以 p 表示 E_2。

$E_2 = 2p + 4(1-p) = 4 - 2p$ **(3A)**

c. 將 E_1 及 E_2 隨 p 值變化的圖像草繪於圖(1)中。



(2A)

圖 1

d. 從以上所得，小明可否就 p 的值的選取作出一個對他有利的決策?
若有，p 該取值多少？試解釋。

若小明取圖 1 中的 a 值作為概率，可使得小芳的最大得分期望值控於最少。

$$5p + 1 = 4 - 2p$$

$$p = 0.42855\ldots$$

$$\approx 0.43$$

設定 $p = 0.43$ 對小明最為有利。 **(2A)**

問題(4) 若小芳也作出策略上的思考:

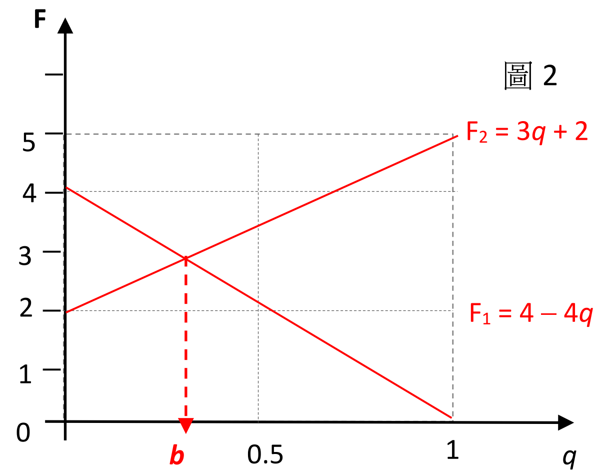
假設<u>小芳</u>豎起一隻手指的機會率為 q。

a. 若<u>小明</u>豎起一隻手指，他的得分期望值為 F_1，若他豎起兩隻手指，他的得分期望值為 F_2。將 F_1 及 F_2 隨 q 值變化的圖像草繪於圖(2)中。

$F_1 = (0)(q) + 4(1-q) = 4 - 4q$ **(3A)**

$F_2 = 5q + 2(1-q) = 3q + 2$ **(3A)**

(2A)



b. 從以上所得，<u>小芳</u>該如何就 q 的值的選取作出一個對她有利的決策? q 該取值多少？試解釋。

若<u>小芳</u>取圖 2 中的 b 值作為概率，可使得<u>小明</u>的最大得分期望值控於最少。

$$3q + 2 = 4 - 4q$$

$$q = 0.28557\ldots$$

$$\approx 0.29$$

設定 $q = 0.29$ 對<u>小芳</u>最為有利。 **(2A)**

問題(5)

假如小明和小芳都懂得分別揀取對自己最有利的策略(即題 3 及題 4 中的 p、q 的取值)，這個遊戲對誰較為有利？請詳細解釋。

當小明取 0.43 概率豎一隻手指，而小芳取 0.29 概率豎一隻手指。

小芳的得分期望值 $\approx 5(0.43) + 1 = 3.15$ (或 $4 - 2(0.43) = 3.14$) (3A)

小明的得分期望值$\approx 3\ (0.29) + 2 = 2.87$ (或 $4 - 4(0.29) = 2.84$) (3A)
(或 $6 - 3.14 = 2.86$)

$3.15 > 2.87$，遊戲的設計對小芳較為有利。 (2A)

C. 三人對奕 (26 分)

後來小吉加入了(B)部所描述的小明和小芳的遊戲，計分的方法改變如下：

唯一豎起一隻手指的人可獲 1 分；**唯一**豎起兩隻手指的人可獲 2 分。除這兩個情況外，參與者將不會獲得任何分數。

假設 p、 q、r 分別是小明、小芳和小吉豎起一隻手指的**機會率**。

問題(1)

完成下面兩個評分表，部分空格已填上數值：

三人得分 (小明得分，小芳得分，小吉得分)

如果小吉豎起一隻手指 (r)		小芳	
		一隻手指 (q)	兩隻手指 $(1-q)$
小明	一隻手指 (p)	**(0, 0, 0)**	**(0, 2, 0)**
	兩隻手指 $(1-p)$	(2, 0, 0)	**(0, 0, 1)**

(3A)

若小吉豎起兩隻手指 $(1-r)$		小芳	
		一隻手指 (q)	兩隻手指 $(1-q)$
小明	一隻手指 (p)	**(0, 0, 2)**	**(1, 0, 0)**
	兩隻手指 $(1-p)$	(0, 1, 0)	**(0, 0, 0)**

(3A)

問題(2)

已知完成一次遊戲後，小明得分期望值為 $2(1-p)\,qr + p\,(1-q)(1-r)$。
試寫出小芳和小吉的得分期望值。 (答案用 p、q、r 表示)

小芳的得分期望值 $= 2(1-q)\,pr + q\,(1-p)(1-r)$ **(2A)**

小吉的得分期望值 $= 2(1-r)\,pq + r\,(1-p)(1-q)$ **(2A)**

問題(3)

a. 假設小明、小芳和小吉三人都充分掌握了這遊戲的致勝策略，**各自盤算**，務求令其他兩人得分最少。終會出現有三個特別的數值 a、b 和 c 有以下效果: 小明發覺取 $p = a$、 小芳發覺取 $q = b$、 小吉發覺取 $r = c$ 就可以達到壓制對手得分以增加自己的勝算。

試解釋下式為甚麼會成立：
取任何 0 至 1 之間的數作 p 值，必有 $2(1-a)bc + a(1-b)(1-c) \geq 2(1-p)bc + p(1-b)(1-c)$。

小芳取 $q = b$、 小吉取 $r = c$ 時，

小明設 p 為任何 0 至 1 之間的數值， 得分的期望值 $= 2(1-p)\,bc + p\,(1-b)(1-c)$

這時小明若取 $p = a$，該可使這期望值可大。

所以， $2(1-a)\,bc + a\,(1-b)(1-c) \geq 2(1-p)\,bc + p\,(1-b)(1-c)$ (3A)

b. 證明： $a\,[(1-b)\,(1-c) - 2bc] \geq p\,[(1-b)(1-c) - 2bc]$。

從(a)，

$$2(1-a)\,bc + a\,(1-b)(1-c) \geq 2(1-p)\,bc + p\,(1-b)(1-c)$$
$$2bc - 2abc + a\,(1-b)(1-c) \geq 2bc - pbc + p\,(1-b)(1-c)$$
$$a\,(1-b)(1-c) - 2abc \geq p\,(1-b)(1-c) - pbc$$
$$a\,[(1-b)(1-c) - 2bc] \geq p\,[(1-b)(1-c) - 2bc] \quad \textbf{(3A)}$$

c. 小吉最後認為：「如果我們仍然互不合作，誰都不願意讓他人有可乘之機的話，我會把豎起一隻手指的機會調控至約 41.4%。」您同意小吉說法嗎？請詳細解釋。

在 $a\,[(1-b)(1-c) - 2bc] \ \geq\ p\,[(1-b)(1-c) - 2bc]$ 之中，
因為 a 是 0 與 1 之間的某一個固定常數，而 p 是 0 與 1 之間的任何一個數值（變數），
所以 $(1-b)(1-c) - 2bc = 0$ (3A)

由於題目的情景對這三人來說是對稱，意即三人中任何兩人身份互換，有關的方程和推論不變，如果小明取 p 等於某個數值能成功壓制對方得分的話，這個數值亦同樣適用於小芳和小吉身上，故有 $a = b = c$ 。 (3A)

綜合以上所得: 設 $a = b = c = x$，代入 $(1-b)(1-c) - 2bc = 0$ 。

$$(1-x)(1-x) - 2x(x) = 0$$
$$(1-x)^2 = 2x^2$$
$$1 - x = \sqrt{2}\,x$$
$$(1+\sqrt{2})\,x = 1$$
$$x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 0.414$$

(4A)

完