2014/15 The 10th Hong Kong Mathematics

Creative Problem Solving Competition for Primary School (Heat-Written)

Solution

1. 可以將算式考慮成:

再將數字分解 :

3	4	5	6	7	8	9	10
3	2×2	5	2×3	7	2×2×2	3×3	2×5

8 個數中只用六個。因子中有 7 個 2, 4 個 3, 2 個 5 和一個 7。「2」,「7」的數目為單數。

故算式中不可用 7、8 兩數。

使得算式兩方相等: 9 放其中一方, 3 和 6 須在另一方。

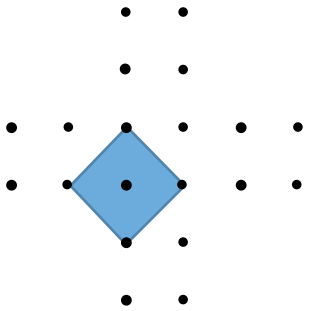
5 和 10 須各自在一方。

得: $4 \times 5 \times 9 = 3 \times 6 \times 10$, 再填入格中。

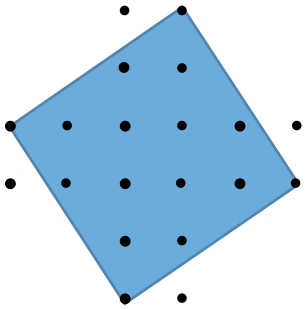
例如:

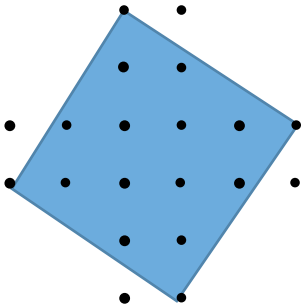
$$\frac{\boxed{4}}{\boxed{3}} \times \frac{\boxed{5}}{\boxed{6}} = \frac{\boxed{10}}{\boxed{9}}$$

2. a. 圖(2d)中的正方形可分成四個三角形，每個面積 ½ 單位，正方形面積 = 4 × ½ = 2 單位。



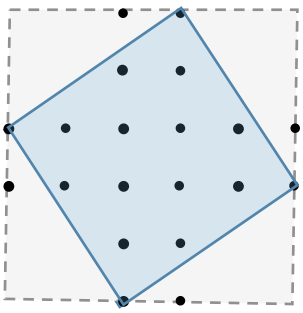
圖(2d)



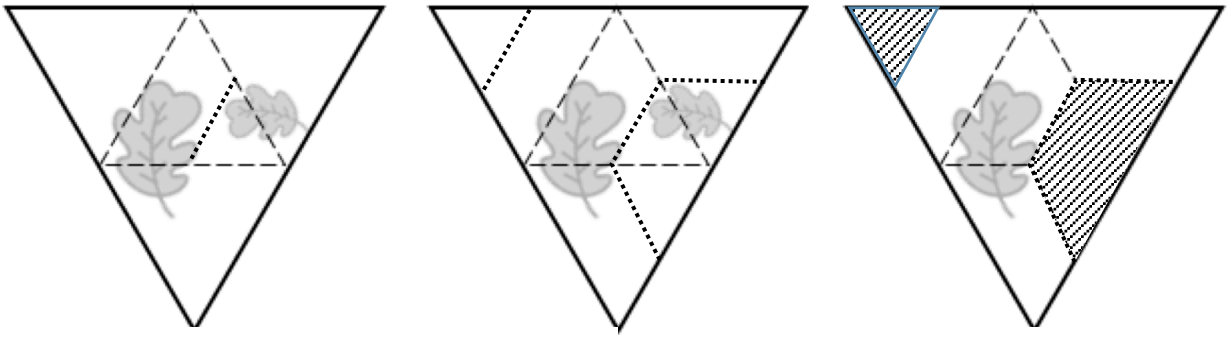


圖(2e)

b. 圖(2e)中，正方形面積 = 5 × 5 – 4 [3×2÷2] = <u>13 單位</u>



3. 依圖(3b)，加上剪痕如圖(3bi)，再以三條虛線摺線作反射如圖(3bii)，四個部分各自剪去一個小三角形得圖(3biii)。



圖(3bi)　　圖(3bii)　　圖(3biii)

4. $2015.02\dot{0}\dot{7}$ = 2015.02 070 707 07....

$0.\dot{1}2\dot{3}$ = 0.12 312 312 3 ....

$2015.02\dot{0}\dot{7} + 0.\dot{1}2\dot{3}$ = 2015.02 + 0.00 070 707 ... + 0.12 + 0.00 312 312 ....

= 2015.14 + 0.00 383019 .....

= $2015.14\dot{3}8301\dot{9}$

或 $2015.143\dot{8}3019\dot{3}$ 或 $2015.1438\dot{3}0193\dot{8}$ 或 $2015.14383\dot{0}1938\dot{3}$ ....

5. 設正方形 B、 D、 E、 F 及 H 的邊長分別為 b、 d、 e、 f、 g 及 h 。

從圖中所見: d = h + 1 而 d + h = 15，

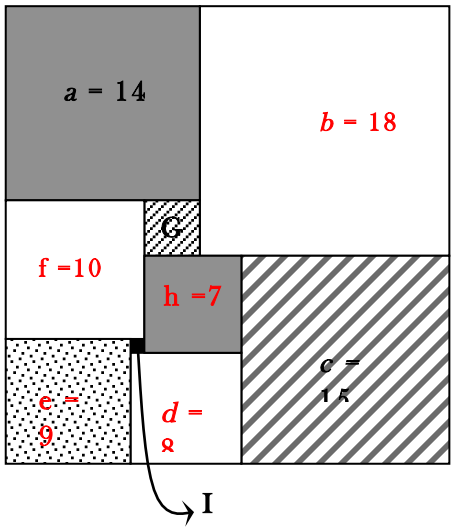
∴ h = 7 及 d = 8.

e = d + 1 = 9

f = e + 1 = 10

∴ b + 15 = e + f + 14

b = <u>18</u>



6. 圖形 AKEH 的面積是 96 平方單位。

7.

第一名的位置:

有兩次是 A，一次是 B。

由於 D 總輸給 C，另一個第一名不可能是 D，

只可能是 C。

A	B	C	D
A			
B			
C			

在某一場比賽中，D 贏了 A 和 B:

那一定 C 勝出的那場，且 A 不能最後，

B 一定是最後。

A	B	C	D
A			
B			
C	D	A	B

B 要取得一次第三名，該在第二場出現。

且第二場中 C 先於 D。

A	B	C	D
A	C	B	D
B			
C	D	A	B

第三場中，C 勝 A，C 也勝 D，A 不能最後。

得最後結果。

A	B	C	D
A	C	B	D
B	C	A	D
C	D	A	B

8. a. 志強從起點跑到終點的時間 = 8km ÷ 9 km/h = 53.3 分鐘

單車起點跑到終點的時間 = 8 km ÷ 15 km/h = 32 分鐘

從志強起跑時間計，第 N 部單車到達終點的時間

= [10 + (N−1) × 2 + 32] 分

= [42 + (N−1) × 2] 分

[即第 N 部單車於志強起跑後的 (42 + (N−1) × 2) 分鐘到達]

當 N 為 1、 2、 3、 4、 5，所得時間均少於 53.3 分鐘，它們曾超越志強到終點。

∴ 志強會遇見 6 部單車。

a. 志強來回所需時間

= 8km ÷ 9 km/h + 8 km ÷ 5 km/h

= 149 分鐘

10 + 44 × 2 = 98，最後的單車於志強起跑 98 分鐘出發（早於 149 分鐘）

∴所有單車均會與志強相遇。

45 – 5 = 40

∴ 在回頭路上，志強會遇上 40 部單車。

9. 設可寫成連續數 A、 A+1、 A+2、 A+3、 …、 A+n。

$A + (A+1) + (A+2) + \ldots + (A+n) = 2015$

$[A + (A+n)]\,(n + 1)\,/2 = 2015$

$(2A + n)\,(n + 1) = 4030$

$= 2 \times 5 \times 13 \times 31$

$= (5 \times 13 \times 31) \times 2$

$= (2 \times 13 \times 31) \times 5$

$= (13 \times 31) \times (5 \times 2)$

$= (2 \times 5 \times 31) \times 13$

$= \ldots.$

若要求項數最多: $n + 1 = 62$ 及 $2A + n = 65$;

即 $n = 61$ 及 $A = 2$。

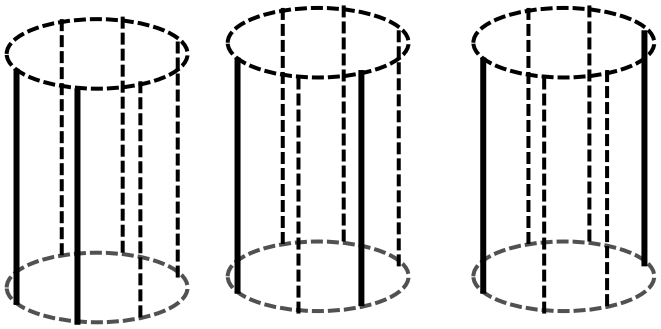
即 $2015 = 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots + 63$

10. a. 2 綠 6 紅:

情況一: 2 個綠色的都用作圓形 1 種方法

情況二: 1 個綠色用作圓形 1 種方法

情況三: 0 個綠色用作圓形 3 種方法 (如下圖 7(a))



b. 以下表分組點算:

綠色棒 / 紅色棒	組成方法
0 + 8	1
1 + 7	2
2 + 6	5
3 + 5	7 (圖 7bi)
4 + 4	10
5 + 3	7
6 + 2	5
1 + 7	2
0 + 8	1
共	40

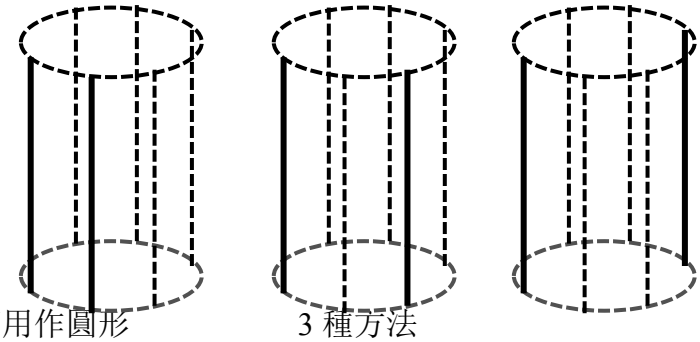
(3+5)

情況一: 2 個綠色用作圓形 1 種方法

情況二: 1 個綠色用作圓形 3 種方法

情況三: 0 個綠色用作圓形 3 種方法

(如下圖 7(bi)



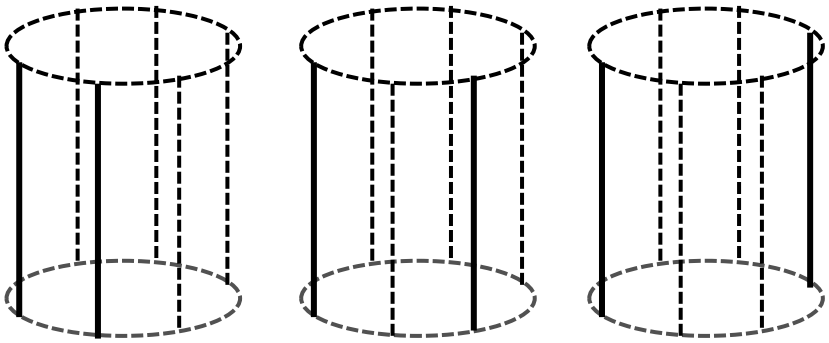
(4+4)

情況一: 2 個綠色的都用作圓形 3 種方法

情況二: 1 個綠色用作圓形 4 種方法

情況三: 0 個綠色用作圓形 3 種方法

c.



11. a. 最後一個數是 $\frac{1}{1}$。這之前的兩數應為這 213 個分數中最接近 1 的，亦是數值最大的。

(比較 $\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{4}{5}$、….$\frac{25}{26}$ 等)，得 $\frac{24}{25}$ 及 $\frac{25}{26}$。

最後三數為 $\frac{24}{25}$、$\frac{25}{26}$、$\frac{1}{1}$。

b. 這兩個數最為接近 $\frac{1}{2}$，比較 $\frac{3}{7}$、$\frac{4}{7}$、$\frac{3}{8}$、$\frac{5}{8}$、$\frac{4}{9}$、$\frac{5}{9}$….、….$\frac{14}{27}$ 等，可得 $\frac{13}{27}$ 及 $\frac{14}{27}$。

考慮數列 $\frac{1}{26},\frac{1}{25},\frac{1}{24},\dots\dots,\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{1}$，並將之寫成 $\frac{2}{52},\frac{2}{50},\frac{2}{48},\dots\dots,\frac{2}{10},\frac{2}{8},\frac{2}{6},\frac{2}{4},\frac{2}{2}$。

可知 $\frac{2}{25}$ 可放置於 $\frac{2}{26}$ 及 $\frac{2}{24}$ 之間，即 $\frac{1}{13}$ 及 $\frac{1}{12}$ 之間。

故這些分數的排列如 $\frac{1}{26},\frac{1}{25},\frac{1}{24},\dots,\frac{1}{13},\frac{2}{25},\frac{1}{12}\dots$.

∴ 從 26 至 13，共有 14 個以 1 作分子的分數。

列出以 27 為分母的分數 $\frac{1}{27},\frac{2}{27},\frac{3}{27},\dots,\frac{27}{27}$，其中一些分子分母可約簡的已在之前出現。

只要分子是 3 的倍數，都可約簡，共有 27÷3 = 9 個。

新加入的有 27 – 9 = 18 個。

列出以 28 為分母的分數 $\frac{1}{28},\frac{2}{28},\frac{3}{28},\dots,\frac{28}{28}$，其中一些分子分母可約簡的已在之前出現。

28 = 2×2×7,

在 1、2、…、28 中，有 14 個是 2 的倍數

有 4 個是 7 的倍數

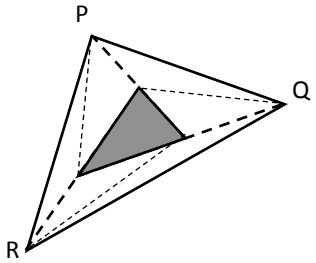
但有 2 兩個重覆地為 2 和 7 的倍數

上列的 28 個分數，未能作約簡的有 28 – 14 – 4 + 2 = 12 個

以 29 為分母的，共有 29 個，除了 $\frac{29}{29}$ 外，其餘 28 個都在第 29 日新加上:

第 29 日的分數，共= 213 + 18 + 12 + 28 = <u>271 個。</u>

12. a. 如圖所示，ΔPQR 可分割為 7 個三角形。



每個三角形都與相鄰的三角形等底同高，故面積相等。

$\therefore$ ΔPQR 面積 $= 7 \times \Delta$ABC 面積 $= 7\ \text{cm}^2$

同樣地，ΔXYZ 面積 $= 7 \times \Delta$PQR 面積 $=$ <u>49 cm^2</u>

b. 圖案 1, 2 的灰色部分面積 $= 1\ \text{cm}^2$

圖案 3, 4 的灰色部分面積 $= (7^2 - 7) + 1 = 42 + 1\ \text{cm}^2$

圖案 5, 6 的灰色部分面積 $= (7^4 - 7^3) + (7^2 - 7) + 1$

$= 49 \times 42 + 42 + 1\ \text{cm}^2$

$< 7000\ \text{cm}^2$

圖案 7, 8 的灰色部分面積

$= (7^6 - 7^5) + (7^4 - 7^3) + (7^2 - 7) + 1$

$= 49^2 \times 42 + 49 \times 42 + 42 + 1$

$= 102943\ \text{cm}^2$

在圖案 7，灰色部分面積首次超越 7000 cm^2 。

13. a. 設 A、 B、 C、 D 四人的重量分別為 a、 b、 c、 d kg。

則 $a + b + c = 193$

$b + c + d = 155$

$c + d + a = 199$

$d + a + b = 140 + ♣$, 其中 ♣ 為 0、 1、 2、 … 或 9。

將以上方程相加: $3a + 3b + 3c + 3d = 193 + 155 + 199 + 140 + ♣$

$a + b + c + d = 229 + ♣/3$

$c + (a + b + d) = 229 + ♣/3$

$c = 229 - 140 + ♣/3 - ♣ = 89 - 2\times♣/3$

當♣=9，c 為最小。 $c = 89 + 0 - 2\times9\div3 = 83$

C 的最小可能重量為 83 kg。

b. 同樣， $a = (229 + ♣/3) - 155 = 74 + ♣/3$

A 的最小重量為 74 kg。

A 和 C 的重量必為 150 kg 至 200 kg 之間，可用怪磅求出兩人重量總和。

(將 193 kg 和 199 kg 減去這總和便可分別得 B 和 D 的重量，再以 155 kg 求得 C 的重量，最後可計算 A 的重量。)