預備小測

1　概率 (機會率)

一個事件的概率是一個 0 至 1 之間的數值，用以量度這件事情發生可能性。概率的數字越大，這件事情便越有可能發生。

例 1

在一次數學測驗中，志强取得 A 級的機會為 0.2，而取得 B 級的機會為 0.5。

志强取得 B 級的可能性比取得 A 級的可能性大。

1.1　以列出可能結果的方法求概率

$$某事件的概率 = \frac{其中能使這事件發生的結果的數目}{所有可能結果的數目}$$ 。其中所列舉的結果均有同樣可能。

例 2

當投擲一顆骰子時，結果可能是: 1、 2、 3、4、 5、6。而這些結果均同樣可能。

六個結果中 1、3、5 這三個結果使得「擲出奇數」這事件發生，因此:

「擲出奇數」的機會 $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$　　(亦可以表示成 50% 機會)

同樣地，「擲出數字大於 4」的概率 $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$。

問題 (1): 當投擲一顆骰子，得出 3 的倍數的概率是多少? $P(得出\ 3\ 的倍數) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

例 3

有兩疊數子卡，其中一疊有四張卡，卡上分別印有數字 2、 4、6 及 10。另一疊有三張卡，分別印有數字 5、7 及 9。

若從每疊都抽出一張數字卡，共有 4×3 = 12 可能結果，所有結果均同樣可能。

事件「抽出的兩數的和大於 16」只發生於 10 + 7 或 10 + 9 這兩種結果之下。

因此，「抽出的兩數的和大於 16」的概率 $= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$。

問題 (2):

以例 2 所述的兩疊數字卡，若從每疊抽出一卡，「兩個抽出數字相加成 11」的機會是多少?

$$P(\text{和是}\mathbf{11}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad (or\ 25\%\ or\ 0.25)$$

1.2 概率的運算

1.2.1

若一件事件會發生的概率是 p， 則這事件不會發生的概率是 $(1-p)$。

例 4

「今天會下雨」的機會是 **20%**。

則，「今天不會下雨」的機會是 = **1 – 20%** = **80%**。

問題 (3):

「大明會帶雨傘」的概率是 0.3。

「大明不會帶雨傘」的概率是多少?

$$\mathrm{P}(\text{大明不會帶雨傘}) 1 - 0.3 = 0.7$$

1.2.2

A 和 B 是兩件獨立事。若事件 A 發生的概率是 p、事件 B 發生的概率是 q，

則 A 和 B 都發生的概率是 $p \times q$。

例 5

志強在數學測驗取得 A 級的機會率是 0.9， 而他在歷史測驗取得 A 級的機會率是 0.7。

志強能在兩科都取得 A 級的機會率

$$P(\text{兩科都取得 A 級}) = 0.9 \times 0.7 = 0.63$$

問題(4a): 大明會帶雨傘的概率是 0.3。今天會下雨的機會是 0.8。 今天下雨而大明**沒**有帶雨傘的概率是多少? $P(\text{下雨而大明}\textbf{沒}\text{有帶雨傘}) = (1 - 0.3) \times 0.8 = 0.56$ (or 56%)
問題(4b): 投擲兩顆骰子時，擲得兩個 6 的概率是多少? $\mathrm{P}(\text{擲得兩個 6})\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

2 期望值

例 6

在一個抽獎之中，參加者有機會得到各種不同價值的現金卷。抽得各獎的概率如下:

現金卷價值 ($)	0	10	50	100
概率	$\frac{63}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{2}{100}$

$0、 $20、 $50、 $100 均為可能發生的結果，而它們發生亦有著不同的機會率。

我們可以為這個抽獎獎金計算一個「期望值」:

$$\mathrm{E}(\text{抽獎}) = \$0 \times \frac{63}{100} + \$10 \times \frac{25}{100} + \$50 \times \frac{10}{100} + \$100 \times \frac{2}{100} = \$\,9.5$$

我們可以把這個期望值理解為當這抽獎進行很多次後派出獎金的平均值。

問題 (5)

(a) 有一個賭博遊戲，結果可以是輸掉 $10、贏得 $1 或贏得 $100。各結果的概率如下:

回報 ($)	–10	+1	+100
概率	0.8	0.15	0.05

計算這個賭博遊戲的回報的期望值。

答: 回報期望值 $= -10 \times 0.8 + 1 \times 0.15 + 100 \times 0.05$

$= -\$1.5$

(b) 在一個賭博遊戲中，參加者會拋兩個硬幣。若兩個硬幣都出了「正面」，參加者會贏得$5，否則會輸掉 $3。這個賭博遊戲的回報的期望值是多少?

兩個硬幣都出了「正面」的率概 $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

這個賭博遊戲的回報的期望值 $= \$5 \times \frac{1}{4} + (-\$3) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\$1$

3 絶對值

一個數的**絶對值**定義為

$$|x| = \begin{cases} x & \text{如果 } x \geq 0 \\ -x & \text{如果 } x < 0 \end{cases}$$

因此

$|13| = 13$

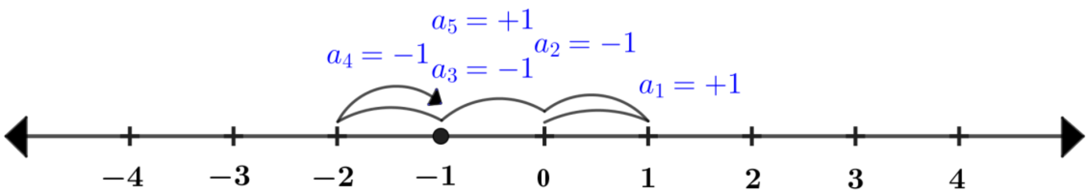
$|-83| = 83$

2017/18 第九屆香港中學數學創意解難比賽

建議題解

隨機漫步

隨機漫步（Random Walk）是一個數學模型，描述一個路徑，該路徑由一些數學空間（如整數）上的一系列隨機步驟組成。隨機漫步的一個基本例子是一維的隨機漫步。



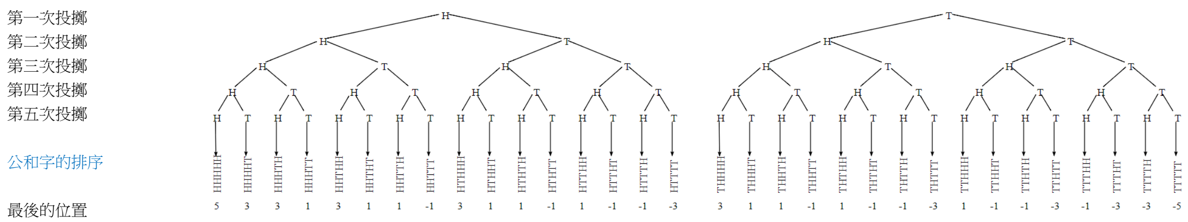
假設我們把黑點的初始位置設為0，然後讓它取N步（其中N是任意正整數），而每步的距離都是一個單位。現在我們想知道黑點在經過N步之後行到那裡。當然，每次重複步行N步後，黑點的位置都可能會有所不同。我們想知道的是，多次重複「N步的隨機漫步」，黑點的平均最終位置會在那裡。設 d_N 為黑點行N步後的位置。

$$d_N = a_1 + a_1 + a_3 + \cdots a_N$$

我們把黑點的初始位置設為0，並且利用公平的硬幣作投擲。

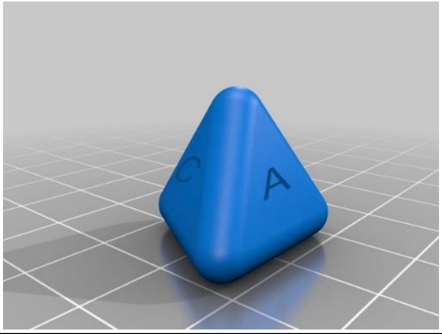
字/Tail　　　公/Head

如果擲得公，黑點會向右移動一個單位(+1)。如果擲得字，黑點會向左移動一個單位(−1)。投擲五次後，黑點的最終位置可能是 +1、−1、+3、−3、+5 或 -5上。例如，經五次投擲後，不論以任何次序得到三次公和兩次字，黑點總會到達 +1（有10 種到達方式）。到達 −1 有 10 種方式（通過投擲得兩次公和三次字），到達 +3 有5種方式（通過投擲得四次公和一次字），到達 −3 有 5種方式（通過投擲得一次公和四次字），1 種到達 5 的方式（通過投擲得五次公），和 1 種到達−5的方式（通過投擲得五次字）。請參閱下圖以了解 5 次投擲的可能結果。（附件一為放大圖）



**H 代表公，T 代表字

a. 假設有一粒有偏差的四面骰，它投擲出 A，B，C，D 的概率如下：



字母	A	B	C	D
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

這粒骰仔能否用在上文所述「一維的隨機漫步的模擬」上？請解釋原因。

能夠 [1A]

當所得的結果是 A 或 C 時，定義漫步 = + 1，其他情況取漫步 = – 1。

字母	A	C	A 或 C
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

[1M]

字母	B	D	B 或 D
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

[1M]

b. 對於一維的隨機漫步，完成下面的表格中給出在 5 步之後的位置的概率。

	黑點的最後位置										
步	**-5**	**-4**	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0						1					
1					$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$	0	$\frac{2}{4}$	0	$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$	0	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{6}{16}$	0	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$	0	$\frac{5}{32}$	0	$\frac{10}{32}$	0	$\frac{10}{32}$	0	$\frac{5}{32}$	0	$\frac{1}{32}$

c. 巴斯卡三角形(Pascal triangle)是一種以三角形的方式來排列數字，觀察下表的巴斯卡三角形的規律並完成第 5 行。

第 0 行						1					
第 1 行					1		1				
第 2 行				1		2		1			
第 3 行			1		3		3		1		
第 4 行		1		4		6		4		1	
第 5 行	1		5		10		10		5		1

[2M]

d. (i) 計算一維隨機漫步行走 5 步後位置的期望值$\boldsymbol{E(d_5)}$。

運用對稱性質， 得 $E(d_5) = 0$

或

$$E(d_5) = (-5)\left(\frac{1}{32}\right) + (-4)(0) + (-3)\left(\frac{5}{32}\right) + (-2)(0) + (-1)\left(\frac{10}{32}\right) + 0 \times 0 + (1)\left(\frac{10}{32}\right) + (2)(0) + (3)\left(\frac{5}{32}\right) + (4)(0) + (5)\left(\frac{1}{32}\right) = 0$$

[1M+1A]

(ii) 計算一維隨機漫步行走 N 步後位置的期望值 $\boldsymbol{E(d_N)}$。(N 是正整數)

$$\begin{aligned} E(d_N) &= (-N)P_N(-N) + (-N+1)P_N(-N+1) + \cdots + (N-1)P_N(N-1) \\ &\quad + NP_N(N) \\ &= 0 \qquad (\because\ P_N(-N) = P_N(N), P_N(-N+1) = P_N(N-1), \cdots \end{aligned}$$

[2M+1A]

e. (i) 計算一維隨機漫步行走 5 步後位置 $\boldsymbol{d_5}$ 的絕對值 $|\boldsymbol{d_5}|$ 的期望值 $\boldsymbol{E(|d_5|)}$。

$$\boldsymbol{E(|d_5|)} = 2 \times \left(0 \times 0 + 1 \times \frac{10}{32} + 2 \times 0 + 3 \times \frac{3}{32} + 4 \times 0 + 5 \times \frac{1}{32}\right) = 1\frac{7}{8}$$

[1M+1A]

(ii) 計算一維隨機漫步行走 5 步後位置 *d* 的平方期望值 $\boldsymbol{E}\left({\boldsymbol{d}_5}^2\right)$，然後再計平方根 $\sqrt{\boldsymbol{E}\left({\boldsymbol{d}_5}^2\right)}$。技術上這稱為方均根值(Root Mean Square Value) 。

$$E\left({d_5}^2\right) = (-5)^2 \times \frac{1}{32} + (-4)^2 \times 0 + (-3)^2 \times \frac{5}{32} + (-2)^2 \times 0 + (-1)^2 \times \frac{10}{32} + 0$$

$$+ 1^2 \times \frac{10}{32} + 2^2 \times 0 + 3^2 \times \frac{5}{32} + 4^2 \times 0 + 5^2 \times \frac{1}{32} = 5$$

[1M+1A]

$$\therefore \sqrt{E\left({d_5}^2\right)} = \sqrt{5}$$

[1A]

(iii) 如果我們想計算 *N* 步隨機漫步後與初始位置的平均距離，應該採用哪個計算 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{d}_N)$, $\boldsymbol{E}(|\boldsymbol{d}_N|)$, $\sqrt{\boldsymbol{E}\left({\boldsymbol{d}_N}^2\right)}$？試解釋你的原因。

應採用 $E(|d_N|)$。

不論隨機漫步者在初始位置的左或右方，我們應利用距離的絕對值來計算與初始位置的平均距離。

[1A+1A]

f. 小明說根據(d)(ii)的結果，隨機漫步進行了 *N* 步，即使 *N* 很大，黑點和初始位置 0 的距離都是很小的。小明的說法是否合理？

不合理! 距離的量度只有正值，而在(d)(ii)中的 d_N 可以是負數值。

[1A+1M]

g. 猜想或估算 $\sqrt{\boldsymbol{E}\left({\boldsymbol{d}_\mathrm{N}}^2\right)}$，其中 *N* 是正整數。

運用 (b) 和 (c)， 我們能觀察或證明到：

$$E\left({d_\mathrm{N}}^2\right) = \sum x^2 P_N(x) = N$$

[2M+1A]

$$\therefore \sqrt{E\left({d_\mathrm{N}}^2\right)} = \sqrt{N}$$

[1A]

h. 考慮二維的隨機漫步，每一步都有同等概率向上，向下，向左，向右移動。即：

移動方向	↑	↓	←	→
概率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

每一隊的同學都會獲分發一套 11 顆骰子。

i. 試用這 11 顆骰子設計一個模擬二維隨機漫步的實驗。
ii. 用你們設計的方法，模擬**五輪**每輪 **20 步**的二維隨機漫步。用你認為合適的方法記錄模擬的結果。

適當地運用骰子為隨機漫步產生一個隨機數。 [1M]
(優化設計) [1M]
合適的二維隨機漫步摸擬過程 [1M]
把隨機漫步的結果有條理的紀錄下來。 [2M]
(紀錄方法)

i. 利用一維的隨機漫步的距離的方均根值(Root Mean Square Value) $\sqrt{\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{d}_{\mathrm{N}}{}^{2}\right)}$ 結果，求二維的隨機漫步的距離的方均根值。

∵ x-軸 和 y-軸是獨立的，一維的隨機漫步的結果可以分別套用到兩個方向上。

[1A]

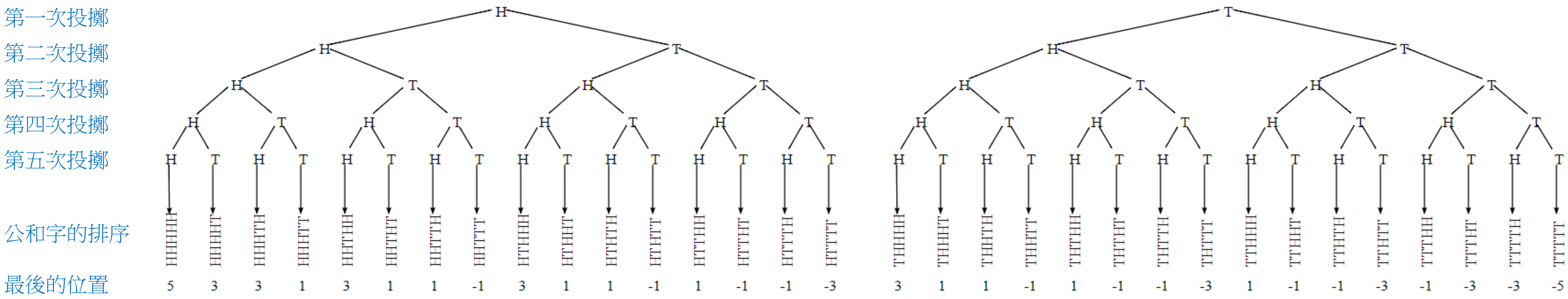
由畢氏定理得，

$$\sqrt{E\left(d_{\mathrm{N}}{}^{2}\right)} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{N}{2}}\right)^{2} + \left(\sqrt{\frac{N}{2}}\right)^{2}} = \sqrt{\frac{N}{2} + \frac{N}{2}} = \sqrt{N}$$

[2M+1A]

<全卷完>

附件一



**H 代表公，T 代表字