

2018/19

第十四屆香港小學數學創意解難比賽

決賽暨粵港澳交流邀請賽—數學解難實驗及辯論

【葉落尋根】

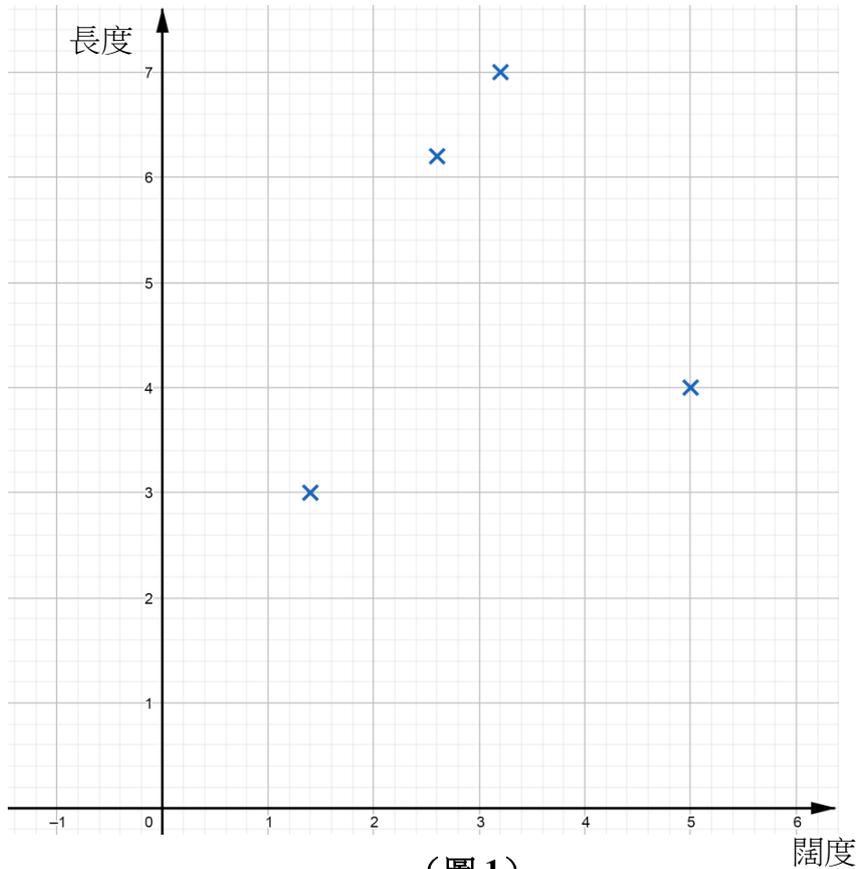
學校編號:		辯論序號:	
學校名稱:			

若有一塊樹葉，它的闊度為 5 cm，長度為 8 cm。

我們以坐標表示它的闊和長: (5, 8)

若有四塊樹葉，以坐標表示它們的闊和長，分別為 (5, 4)、(3.2, 7)、(1.4, 3) 和 (2.6, 6.2)。

我們可以橫軸為闊度，縱軸為長度，並把坐標以點的形式標記在坐標圖上(圖 1)。



(圖 1)

- (a) 在「附件甲」有二十片樹葉，其中十片為樹葉種類 A，十片為樹葉種類 B。試量度樹葉的闊和長，並以坐標形式完成下表。(2 分)

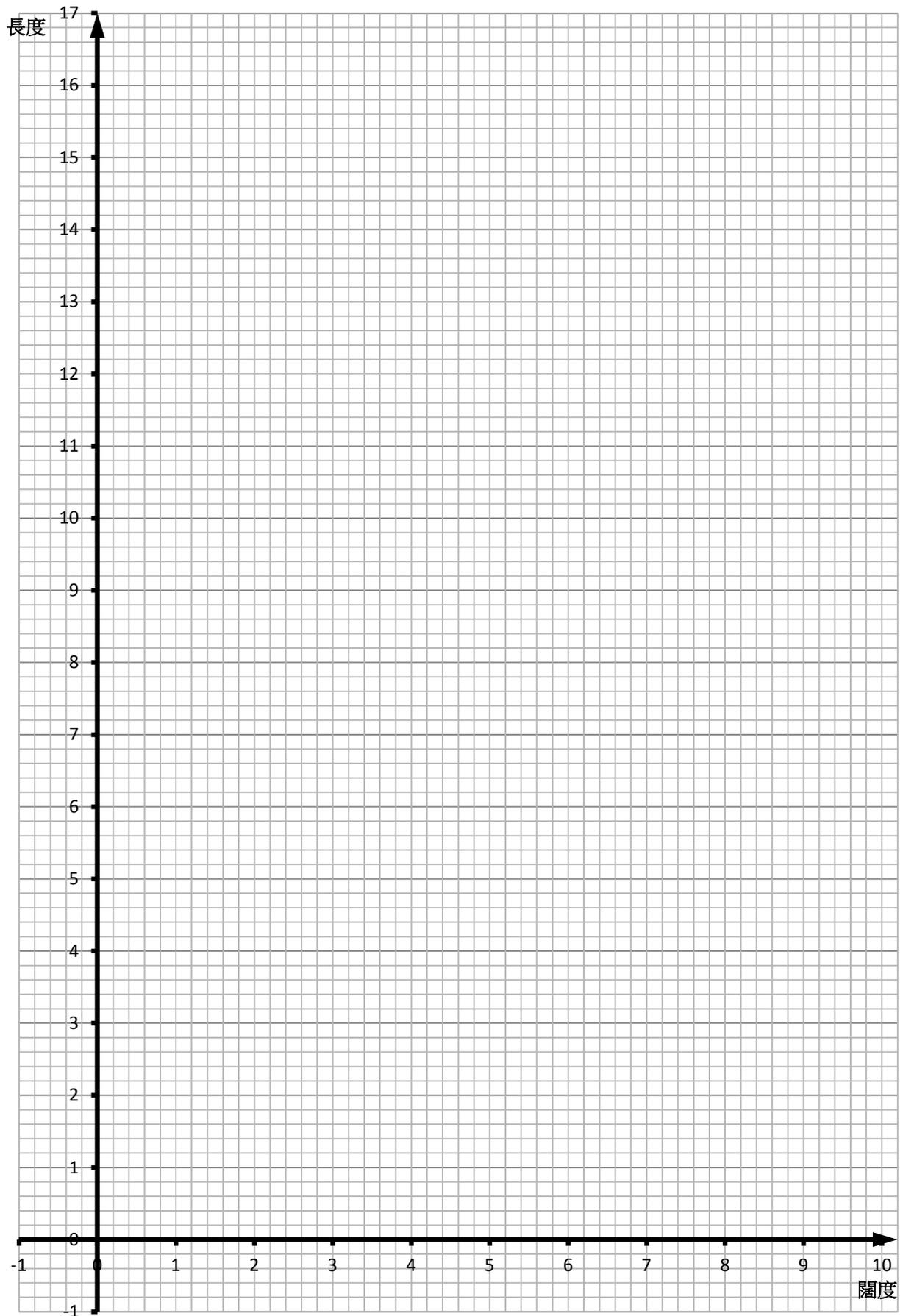
樹葉種類 A	
	坐標
A1	(4.5, 11)
A2	(3.9, 10.9)
A3	(4.9, 15.6)
A4	(5.2, 13.4)
A5	(5.3, 15.3)
A6	(4.0, 11.5)
A7	(3.9, 10.9)
A8	(5.7, 15.0)
A9	(4.4, 12.5)
A10	(4.2, 10.8)

樹葉種類 B	
	坐標
B1	(0.5, 6.7)
B2	(0.6, 6.7)
B3	(0.7, 7.7)
B4	(0.8, 8.9)
B5	(0.4, 3.2)
B6	(0.7, 8.8)
B7	(0.6, 6.7)
B8	(0.4, 3.6)
B9	(0.5, 6.3)
B10	(0.5, 6.0)

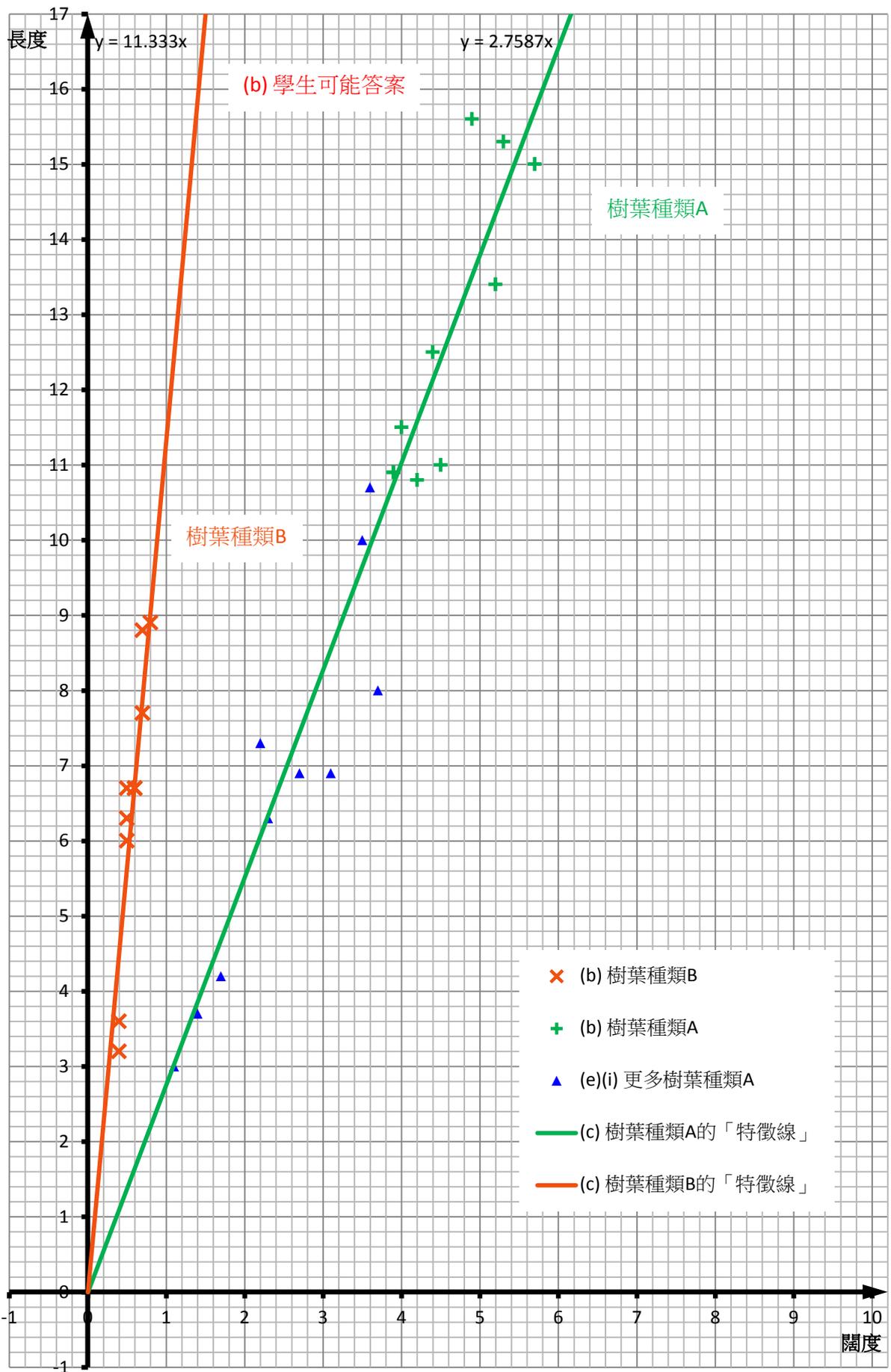
(b) 把(a)的數據標記在坐標圖上(圖2)。

(注意在圖上用綠色「+」標示樹葉種類A，用橙色「x」標示樹葉種類B)

(2分)



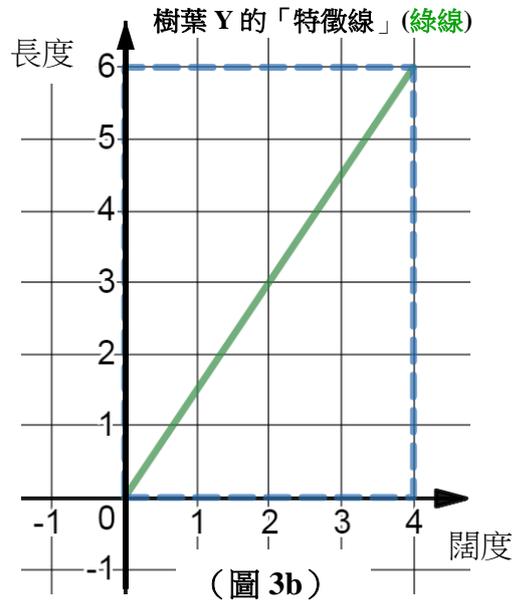
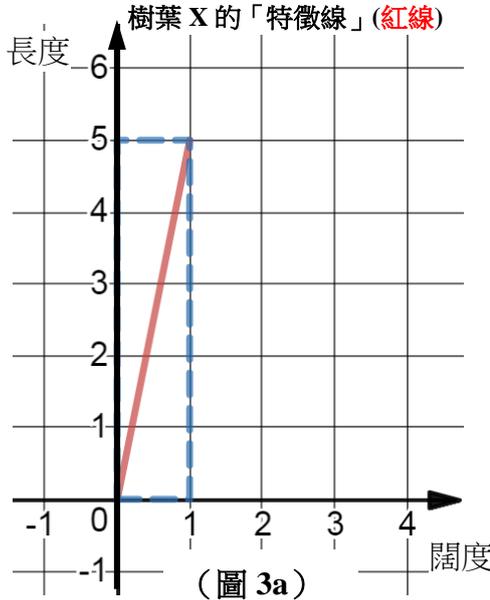
(圖2)



(c) 以下的表格以坐標表示了樹葉 X 和 Y 的闊和長

樹葉	坐標
X	(1, 5)
Y	(4, 6)

我們可以使用下圖分別找出以上兩片樹葉的「特徵線」。



- (i) 我們想利用兩條「特徵線」分別表示(a)部的樹葉種類 A 和 B。當有新的樹葉樣本的坐標點靠近某樹葉種類的「特徵線」時，那片樹葉就被判斷為該樹葉種類。請建議一種繪畫「特徵線」的方法，加以解釋，並在圖 2 中把兩條「特徵線」畫出來。 (3 分)
請以綠色線代表樹葉種類 A，橙色線代表樹葉種類 B。

同學可能答案：

先計樹葉種類的長闊比的平均值

樹葉種類 A 的長闊比平均值：2.758696...

樹葉種類 B 的長闊比平均值：11.333333...

作 $P_A = (1, 2.8)$ 和

$P_B = (1, 11.3)$

先計算樹葉種類闊的平均和長的平均

樹葉種類	闊的平均	長的平均
A	4.6	12.69
B	0.57	6.46

A

B

作 P_A 為 $(4.6, 12.7)$ 和

P_B 為 $(0.6, 6.5)$

樹葉種類 A 的「特徵線」：構作一條穿過(0,0) 和 P_A 的直線。

樹葉種類 B 的「特徵線」：構作一條穿過(0,0) 和 P_B 的直線。(圖 1 分，計算 1 分，解釋 1 分)

- (ii) 現有一片樹葉，它的闊和長坐標為(1, 5)。請問如何利用「特徵線」去判斷該樹葉的種類？ (2 分)

同學可能答案：

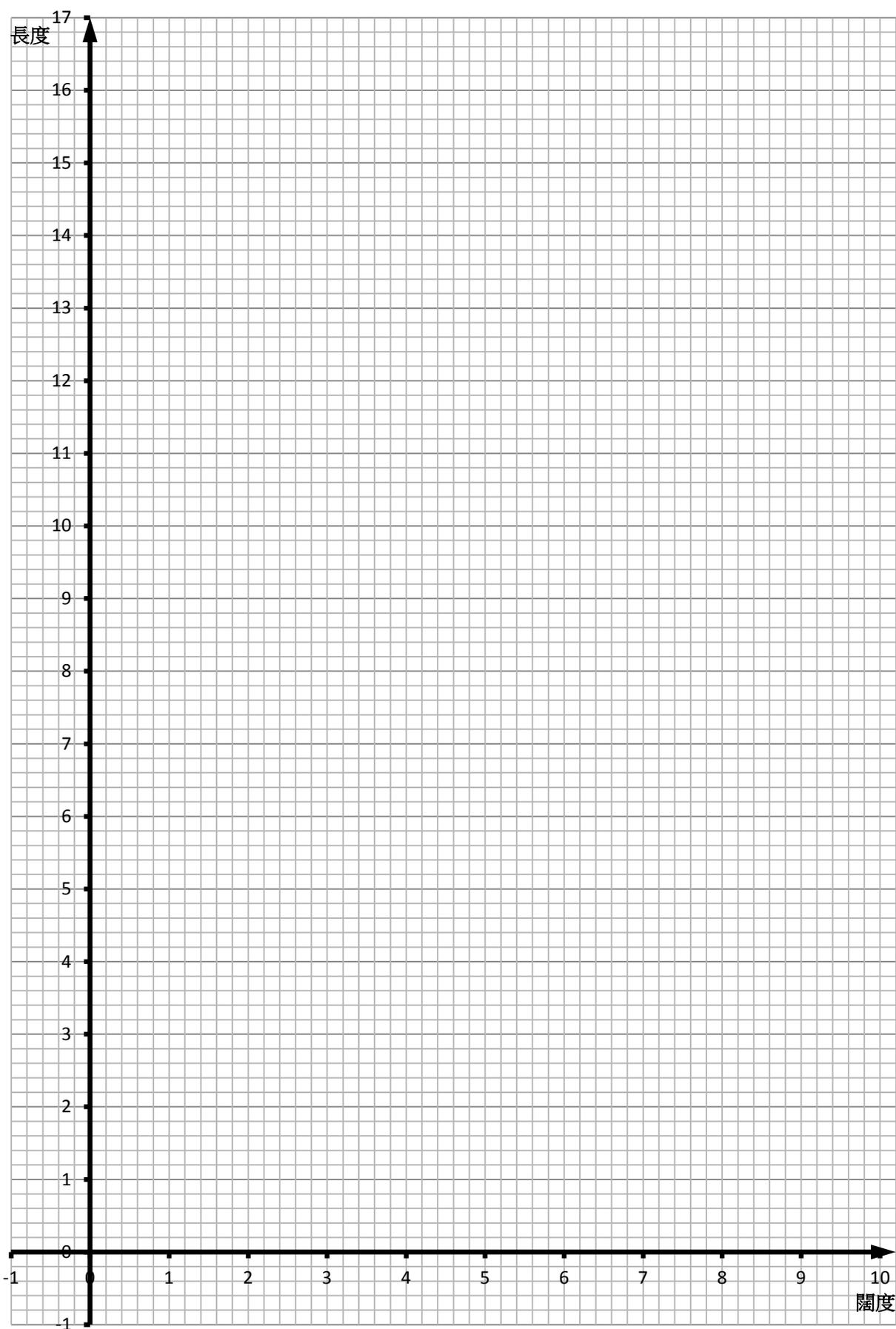
1 分答案：以水平距離(horizontal distance)來考慮，(1, 5) 較近樹葉種類 B 的「特徵線」，所以應判斷為樹葉種類 B。 / 以鉛垂距離(vertical distance)來考慮，(1, 5) 較近樹葉種類 A 的「特徵線」，所以應判斷為樹葉種類 A。

2 分答案：以最短(垂直)距離(perpendicular distance)來考慮，(1, 5) 較近樹葉種類 B 的「特徵線」，所以應判斷為樹葉種類 B。

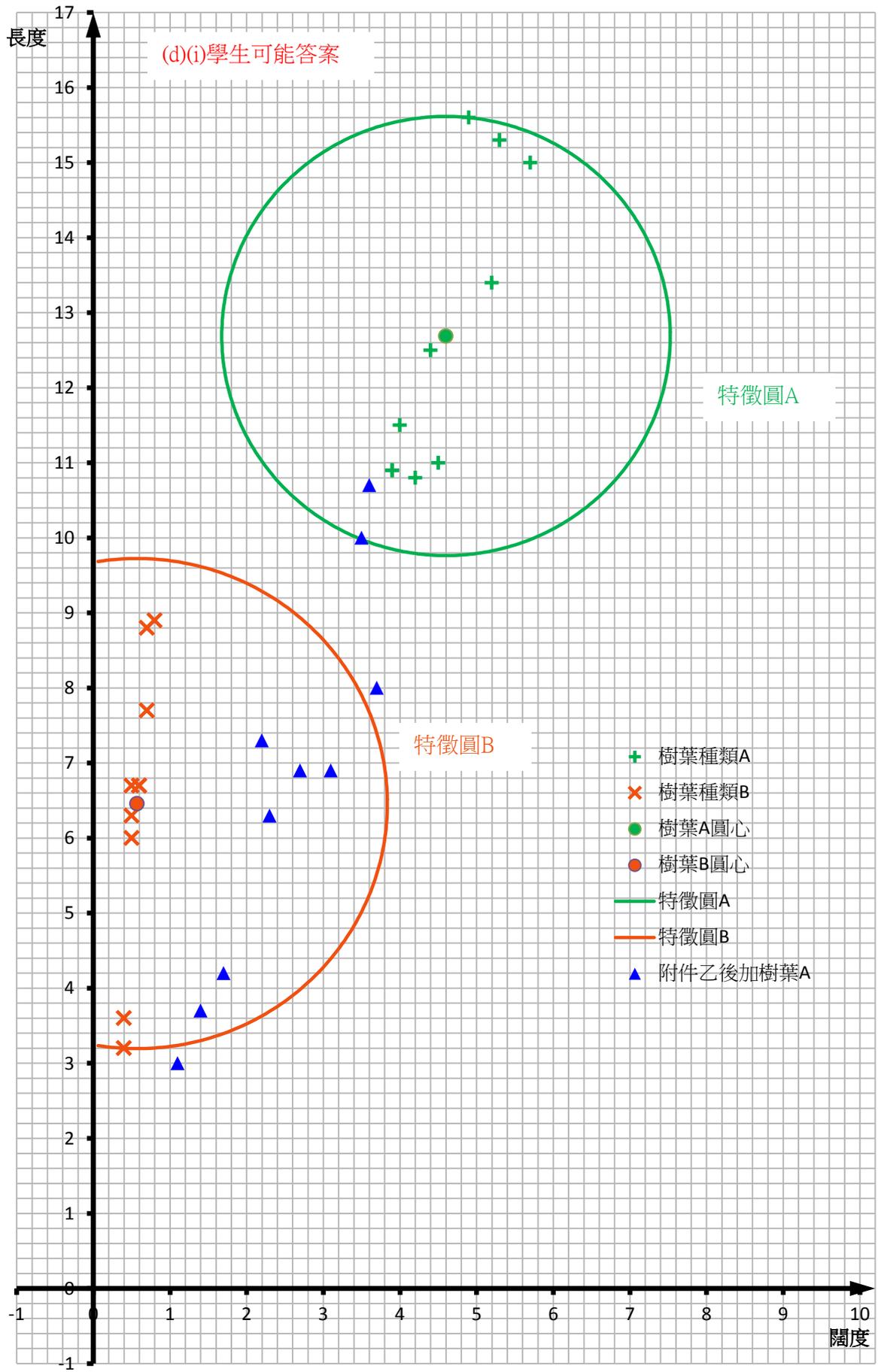
(d) (i) 把(a)的數據重新標記在坐標圖上 (圖 4)。

(注意在圖上用綠色「+」標示樹葉種類 A，用橙色「x」標示樹葉種類 B)

(1 分)



(圖4)



(圖4)

- (ii) 有同學認為可以為同一種樹葉定義出一個「特徵圓」。當有新的樹葉樣本的坐標點位於圓的範圍內，該樹葉就被判斷為同類型的樹葉。
建議一個方法找出圓心和半徑，加以解釋，並在圖 4 繪畫出分別代表樹葉種類 A 和 B 的「特徵圓」。請以綠色圓代表樹葉種類 A，橙色圓代表樹葉種類 B。 (3 分)

同學可能的答案：

圓心的坐標：(所有橫向坐標的平均值，所有縱向坐標的平均值)

樹葉種類	闊的平均	長的平均
A	4.6	12.69
B	0.57	6.46

圓心分別為 $C_A(4.6, 12.7)$ 和 $C_B(0.6, 6.5)$

圓形的半徑：

比較所有坐標與圓心的距離，當中最遠的距離作為半徑，即所有坐標會位於圓的範圍內或

比較所有坐標與圓心的距離，當中第三遠的距離作為半徑，即有 $\frac{8}{10}$ 的坐標會位於圓的範圍內

(圖 1 分，計算 1 分，解釋 1 分)

- (e) 由「附件乙」獲得更多樹葉種類 A 的樣本。

- (i) 把新樣本的坐標用藍色「▲」標示在圖 2 和圖 4 上。

(注意在圖上已用綠色「+」標示樹葉種類 A 和橙色「×」標示樹葉種類 B) (1 分)

見圖 2 和圖 4 (1 分)

- (ii) 你認為「特徵線」和「特徵圓」哪一種方法更有效分辨樹葉的種類？試解釋並比較兩者之優劣。

(3 分)

「特徵線」。

(1 分)

就以上數據為例，以「特徵圓」作為判斷的範圍，樹葉種類 A 定義出來的圓會包括大範圍的面積。判斷的機制會不精準。 (缺點 1 分)

若以「特徵線」來判斷，此方法會包含長闊同時小或長闊同時大的坐標，這樣較切合長度隨闊度而增長的生長情況。 (優點 1 分)

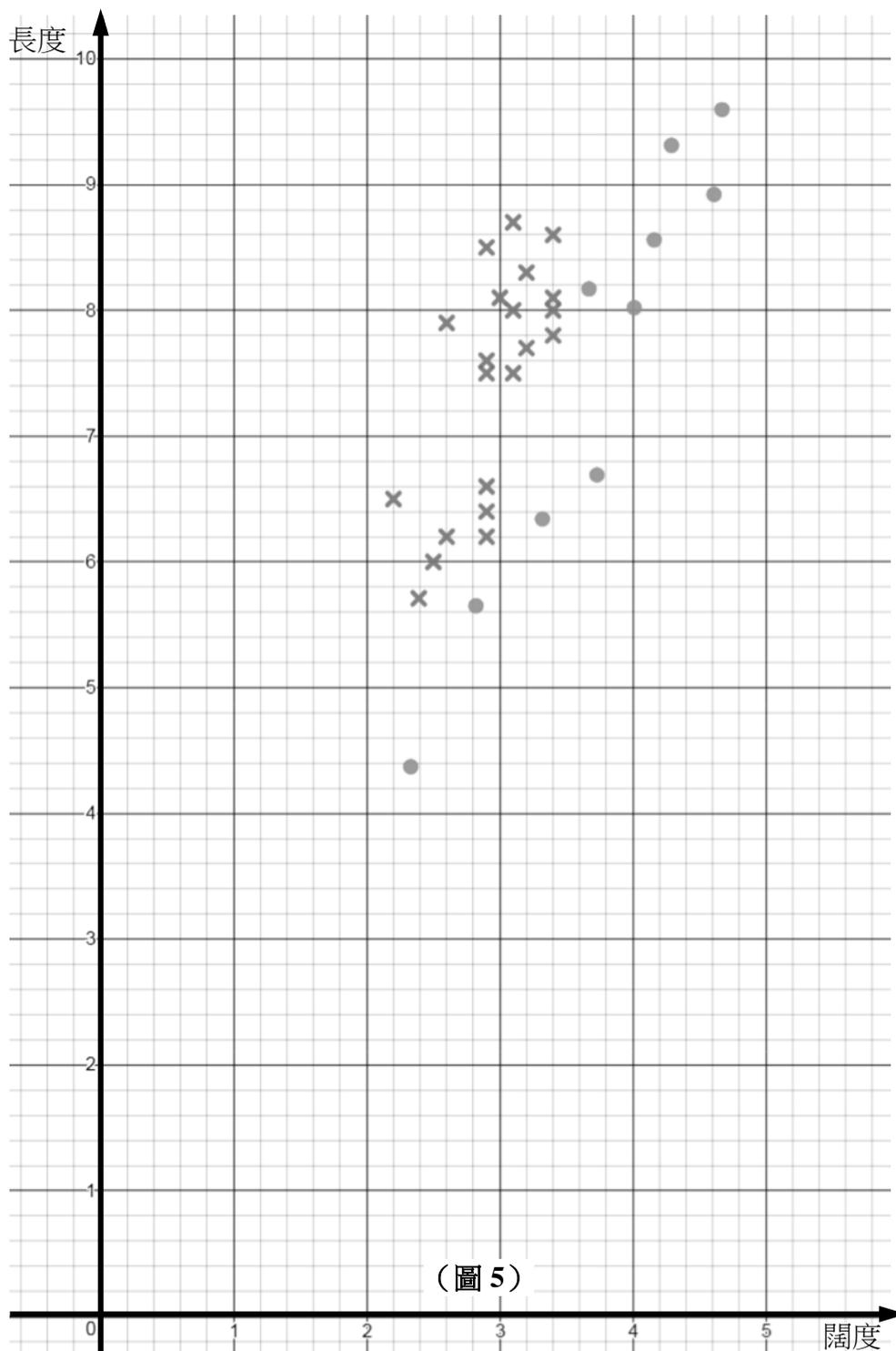
- (f) 在以下的坐標圖中（圖 5），我們已經分別用「×」和「●」標記了樹葉種類 C 和 D 的數據。除了上述的「特徵線」和「特徵圓」外，請建議一種只用闊和長來分辨樹葉種類的方法。如有需要，可以利用（圖 5）的數據去顯示並加以解釋。 (3 分)

解釋：

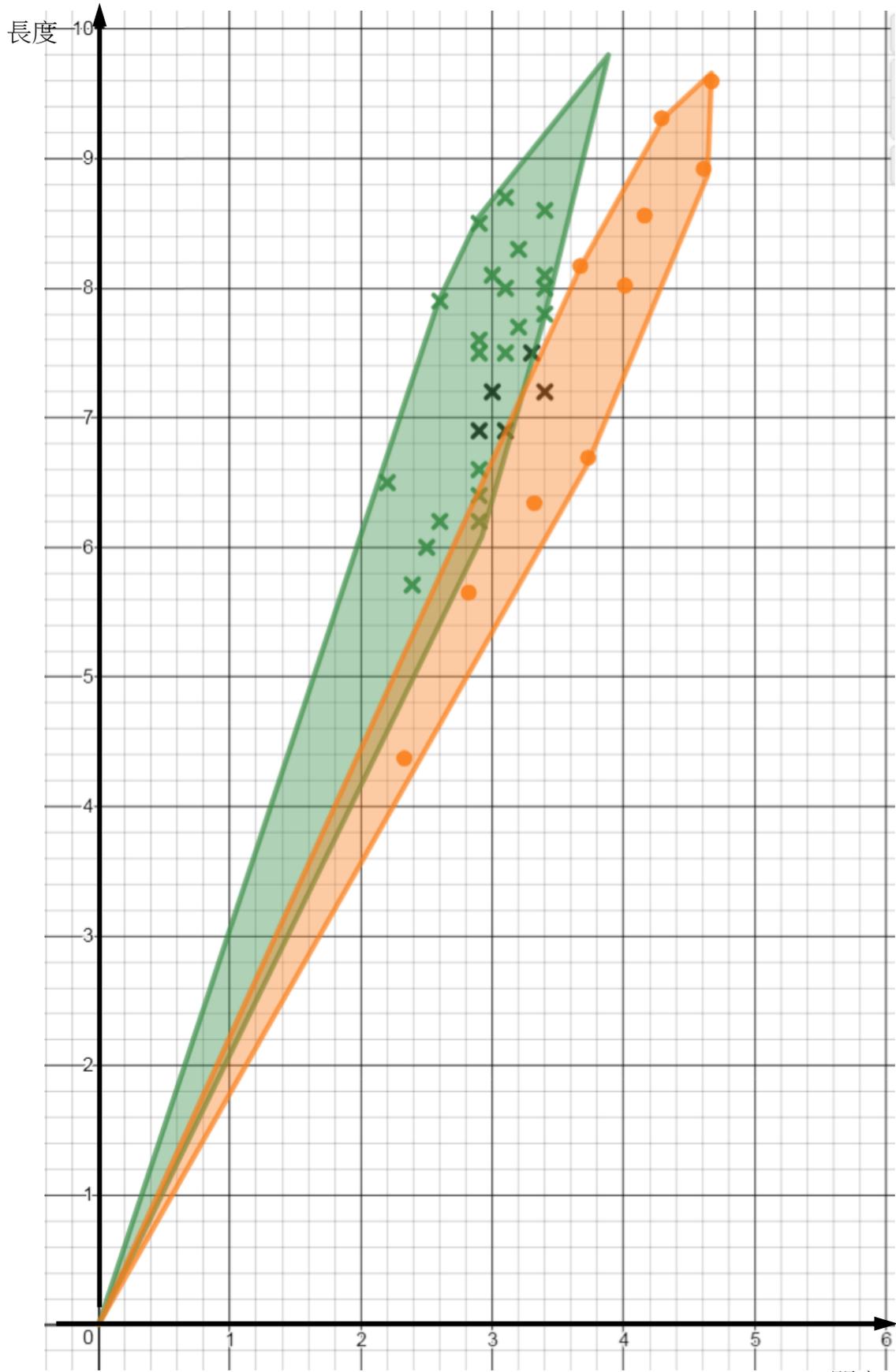
「特徵多邊形」

為每一種樹葉分別構作一個多邊形，使其周界最短而又能完全覆蓋該種類的所有坐標。

(3 分 評判專業判斷)



同學可能的答案(f) 和(g)：



(圖 5)

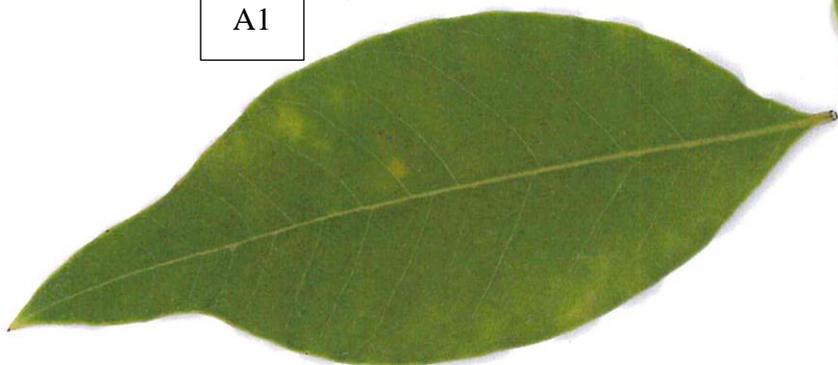
- (g) 現在有一根樹枝，上有十多片樹葉，其中一片樹葉的闊和長坐標為(3.4, 7.2)。
- (i) 請利用(f)部的方法或其他方法來判斷這樹枝上的樹葉是樹葉種類 C 或 D。 (1 分)
坐標 (3.4, 7.2) 位於樹葉種類 D 的「特徵多邊形」內，所以應被判斷為樹葉種類 D。
(1 分)
- (ii) 經過量度後，得出樹枝上另外四片樹葉的闊和長坐標，分別為(3.1, 6.9)、(3.3, 7.5)、(3.0, 7.2)和(2.9, 6.9)。再次判斷樹枝上的樹葉是樹葉種類 C 或 D 並加以說明。 (2 分)
位於樹葉種類 C 的「特徵多邊形」內的數目=3 (坐標為(3.3, 7.5)、(3.0, 7.2)和(2.9, 6.9))
位於樹葉種類 D 的「特徵多邊形」內的數目 = 1 (坐標 (3.4, 7.2))
較難判斷的樹葉數目 = 1 (坐標 (3.1, 6.9))
由於 $3 > 1$ ，所以判斷樹枝上的樹葉是樹葉種類 C。
(1 分解釋，1 分結論)
- (iii) 若只量度樹葉的闊和長，請設計一種方法來加強分辨樹葉種類的能力。 (2 分)
再一次採集樹枝上的所有樹葉作量度，以闊和長坐標的分佈域與圖中已有的作比較。
若分佈域與樹葉種類 C 相約 (較窄)，則可估計為樹葉 C；
若分佈域與樹葉種類 D 相約 (較廣)，則可估計為樹葉 D。
或
用新加數據再構作「特徵線」，比較原來的兩者，以較近者作判斷。
(2 評判專業判斷)
- (h) 請在闊和長以外，建議加上一種可量度的樹葉特徵來加強分辨樹葉種類的能力。試解釋你的選擇。 (2 分)
形狀(以橢圓來模擬)，葉邊的彎曲程度，顏色，葉脈分支數目，葉脈的密度...
(2 評判專業判斷)

全卷完

題號(a): 樹葉種類 A 的其中四片樹葉

附件甲

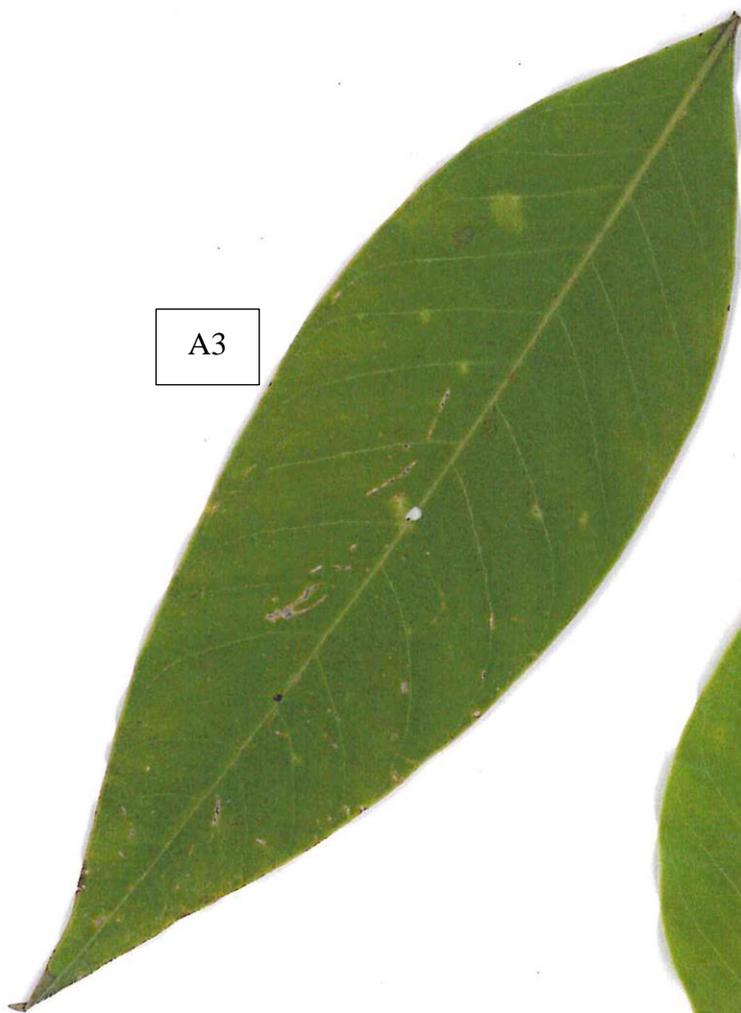
A1



A2



A3



A4



題號(a): 樹葉種類A的其中六片樹葉

附件甲

A5

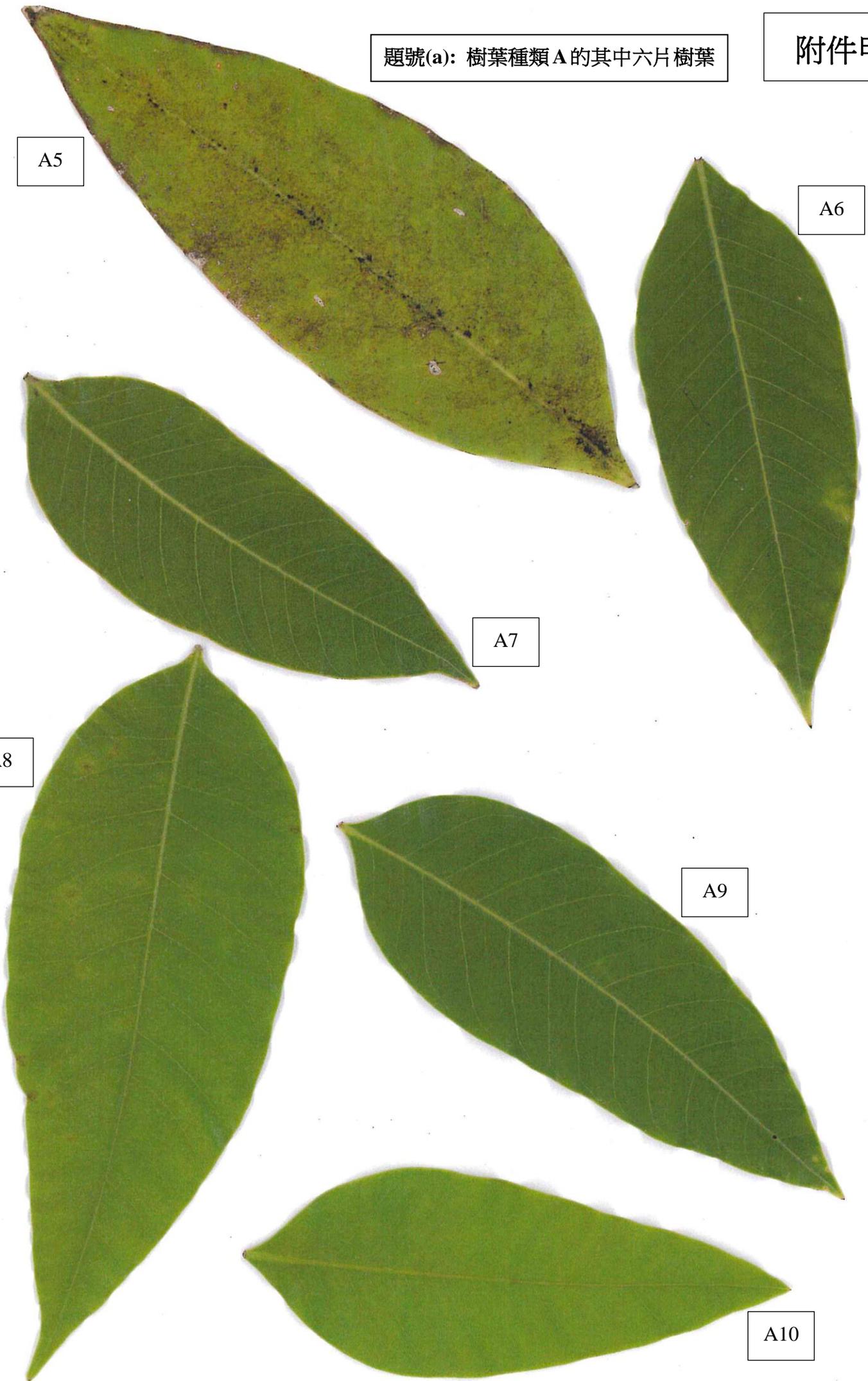
A6

A7

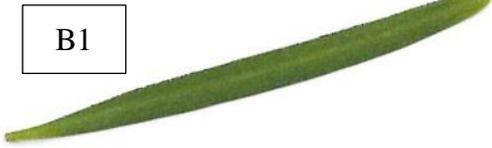
A8

A9

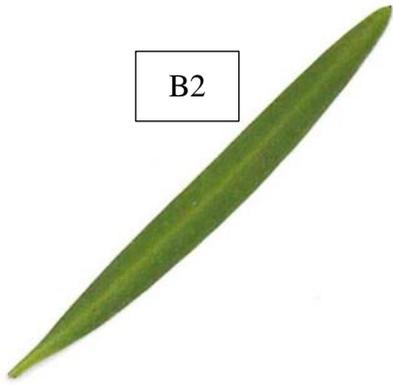
A10



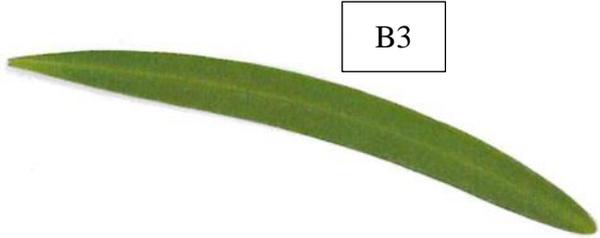
題號(a): 樹葉種類 B 的十片樹葉



B1



B2



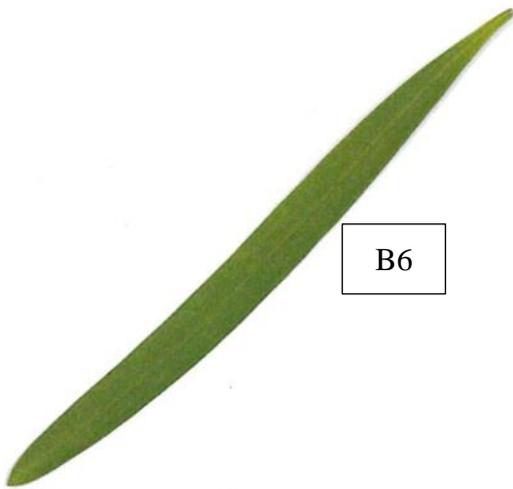
B3



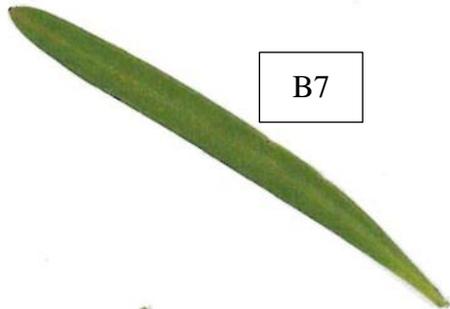
B4



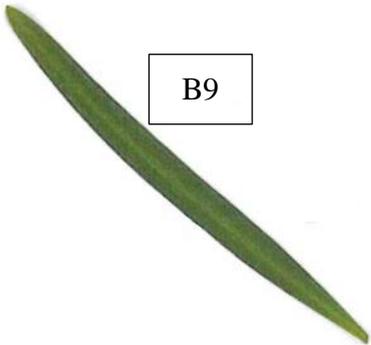
B5



B6



B7



B9



B8

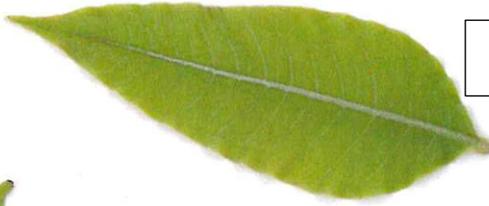


B10

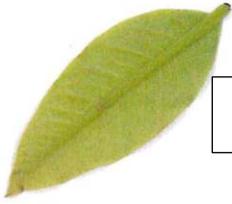
題號(e): 樹葉種類 A 的更多樹葉

附件乙

A11



A12



A14



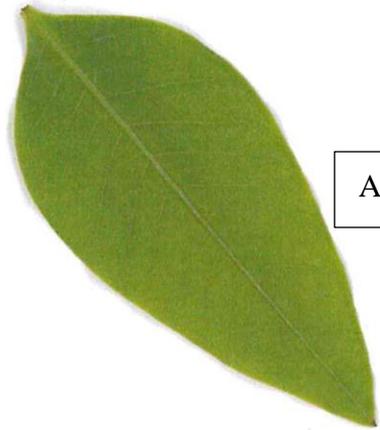
A13



A16



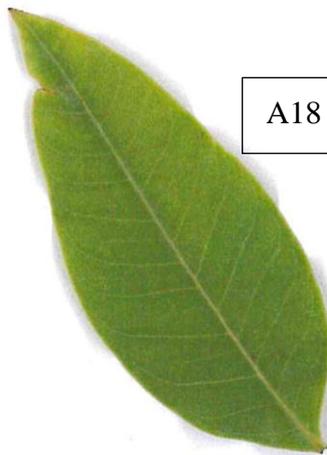
A17



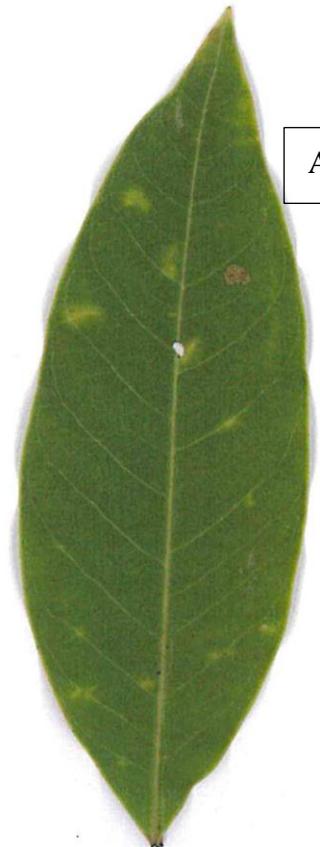
A15



A18



A19



A20

