「第十三屆香港小學」及「第九屆香港中學」 數學創意解難比賽 資料匯編 2017/18





教育局 Education Bureau

E	錄

不一樣的挑戰:「香港中、小學數學創意解難比賽」	第2頁
本書的使用建議	第3-4頁
賽委會的話	第5頁
參賽感言	第6-7頁
第十三屆香港小學數學創意解難比賽資料匯編	
▶ 初賽筆試題目	第 9 - 22 頁
▶ 初賽參考答案	第 23 - 31 頁
▶ 決賽暨粤港邀請賽數學辯論	第 32 - 36 頁
▶ 決賽參考答案	第 37 - 42 頁
第九屆香港中學數學創意解難比賽資料匯編	
▶ 初賽筆試題目	第 44 - 57 頁
▶ 初賽參考答案	第 58 - 71 頁
▶ 決賽預備小測題目	第 72 - 79 頁
▶ 決賽預備小測參考答案	第 80 - 81 頁
▶ 決賽題目	第 82 - 94 頁
▶ 決賽參考答案	第 95 - 98 頁
第十三屆香港小學數學創意解難比賽得獎名單	第 99 - 104 頁
第九屆香港中學數學創意解難比賽得獎名單	第 105 - 108 頁
第十三屆香港小學數學創意解難比賽 及 第九屆香港中學數學創意解難比賽 榮譽顧問及委員會	第 109 頁
比賽花絮	第 110 - 120 頁

不一樣的挑戰:「香港中、小學數學創意解難比賽」

教育局資優教育組

轉眼間「香港小學數學創意解難比賽」和「香港中學數學創意解難比賽」已經分別踏入第 十三屆和第九屆。今年的小學邀請賽,我們很榮幸能夠邀請到兩隊來自內地的精英隊伍:南山 第二實驗學校及珠海容閎小學,與香港初賽得勝隊伍進行友誼數學辯論交流賽。這是一次很難 得的機會,讓本港和內地的學生互相切磋,彼此學習。

對數學資優學生的意義

「第十三屆香港小學數學創意解難比賽」及「第九屆香港中學數學創意解難比賽」保留了 比賽的一貫風格,就是為參賽學生帶來不一樣的挑戰。這兩個比賽除了透過紙筆測試考驗參賽 學生的數學解難能力外,在決賽中,更要求參賽學生進行數學解難實驗、匯報及即時回應評判 的提問,而小學組還有隊伍之間的數學辯論。

我們在設計比賽題目的時候,期望學生從已有知識出發,探究不同的可能,以創意綜合運 用數學知識以解決新的問題。問題的選材每年皆不同,希望能夠讓參賽學生對「數學是甚麼?」 和「數學可以怎樣運用?」有新的體會。

我們觀察到參賽學生在比賽中展現明辨性思考和創意思維;體會如何和隊友協調合作;經 歷在匯報和答問中解說自己的理念。我們期望參賽學生在比賽中接觸到一些有趣的課題,並作 進一步的探究,數學的能力可以更上高峰。

對一般學生的意義

「香港中、小學數學創意解難比賽」中的問題,大部分是課堂中的數學的延伸、變化或應 用。教師可以選取合適的部分,加入一般數學課堂,令所有學生感受數學的趣味和在解難中的 妙用。

本比賽包含不少動手題、開放題,用在數學課堂中,能令不同能力的學生都有發揮的空間, 可以作為課堂適異教學的材料,提供學生發揮創意思維的機會。題目多樣化的設計方式,也能 幫助學生投入課堂學習。

對校本資優教育的意義

「香港中、小學數學創意解難比賽」的題目挑戰性和趣味性兼備,教師可按校本的需要, 靈活地變化運用。由課堂學習到課後抽離課程,均可以使學生得益。

本書的使用建議

本書收錄了「第十三屆香港小學數學創意解難比賽」及「第九屆香港中學數學創意解難比 賽」的題目。這些題目極具挑戰性,不論學校是否打算參與比賽,題目也有其參考價值,以作 校本數學資優培訓計劃的教材。教師可考慮使用本比賽的解難實驗及數學辯論的題目,供有興 趣的學生進行小組探究,從而培養溝通協作、明辨性思考與創意等共通能力。

筆試題目(初賽)

數學創意解難比賽設筆試題目(詳細題目內容,請參看內頁)。教師訓練學生時,可鼓勵 學生團隊協作,盡量讓學生多思考及討論,務求擴闊學生的思考空間。此外,可鼓勵學生勇於 嘗試,不斷探索,有策略地從錯誤中學習,從而發現當中的規律及關係等。

「解難實驗」/「數學辯論」題目

本屆數學創意解難比賽的決賽中設有「解難實驗」/「數學辯論」的題目。「解難實驗」 通常會為參賽隊伍提供一些比賽用品,要求學生以小組形式探究問題。然後評判會就相關問題 作出提問,要求學生解釋所採用的解難策略,並總結當中的發現。「數學辯論」要求參賽隊伍 進行小組協作解難,然後向評審團和其他參賽隊伍匯報解難策略。各隊伍亦要接受評審團和其 他參賽隊伍的提問,並即席進行答辩。

教師可考慮使用本比賽的筆試題目以及「解難實驗」/「數學辯論」題目,供有興趣的學生 進行小組探究。指導學生時可參考下列的建議:

- 題目的程度是刻意超出參賽學生的年級水平的,但教師不必要求學生使用超出他們程度或 能力的數學知識和技巧,只需鼓勵學生反思已有的數學知識,並把知識綜合,產生新的意 念和知識,以解決問題。
- 假如學生沒有預先學習某個數學公式或理論,而單單靈活運用一些很基本的數學知識就能 解決問題,更是難能可貴,充分反映其數學創意解難能力之高超。數學資優學生正正需要 這種具挑戰性的訓練機會。
- 假如學生找到相關規律或公式後,以為已完成了任務而不再思考。教師可鼓勵他們多以不同的數據或情況驗證所找到的規律或公式。這樣可以訓練他們驗證答案、反思步驟及不斷 修正自己的猜想或所發現的公式。
- 讓學生向教師及其他同學講解其思考及解難策略,總結當中發現,並接受教師及其他同學 的提問。這有助訓練學生的匯報和高層次思維能力,並能深化學生的學習。其他同學在聆 聽匯報時,也可從中學習,擴闊視野,學習別人的解難策略,並訓練自己的提問及明辨性 思維能力。

 教師可提問任何有助理解學生思路或挑戰學生高層次思維的問題,亦可就學生的答案再作 追問。這種即場的追問,最能訓練學生的應變力,並能鼓勵學生作深度思考。

雖然這些筆試題目以及「解難實驗」/「數學辯論」的題目是為高小至中二的學生而設,但由於 題目本身具一定程度的開放性和難度,所以也可考慮給予較高年級的同學,作為趣味解難或數 學辯論之用。

賽委會的話

劉明基副主席

香港數學創意解難比賽不覺之間已舉行十三個年頭了,發展良多。

自古以來,數學與日常生活息息相關,亦為解決生活問題而來。隨着專科數 學教育日益發展,隨著時間推移,尖端數學越來越玄。數學家窮畢生之力為解開 教學謎團、猜想而聲名大噪。教學遂蒙上神秘色彩,數學家亦示人以木訥孤寂形 象。

當年賽委們有見及此,遂回歸基本,躍出坊間盛行條件反射式數學操練的死 胡同,開拓創意及解難的新途徑。比賽期間,要求使用數學原理以解決生活應用 問題,極具挑戰性。決賽同學們大膽假設,在緊迫時間內求証、立論,而且要在 辯論環節為自身團隊共識而辯護。此外,更要挑戰參賽同儕的見解,深刻領悟數 學精要與及掌握合作精神,也盡顯膽色氣魄。

我們相信透過這個比賽可以讓參賽同學更能通透地掌握「數奧」-即是數學 的堂奧。面對這個數學新模式,學生除自身努力,更有賴教師在常規課程以外特 別指導。本比賽得以成功,教師應記首功,謹此致謝。參賽同學也得益不少。十 多年來事實証明,不少同學在進階的數學比賽領域中佳績湧現,我們期望各位同 學的創意及睿見持續開花結果。

參賽者感想

民生小學

參賽學生:蔣鎮遠

首先,我可以參加數學創意解難比賽,並可以進入總決賽,對於我來說是一件十 分榮幸的事。這比賽與平時的比賽不同,題目比其他數學比賽的複雜很多,所以比賽 時要與組員溝通,才可以解答這些問題,發揮團隊合作精神。

在比賽過程中,我可看見其他學校的學生表現十分出色,對題目有不同解法,可 以讓我學習。

雖然,我的組別只能拿到優異獎,但是我沒有失望,可以參加這次比賽增加了我 對數學的興趣。

參賽學生:余彦廷

每次參加數學比賽,都會為我帶來不同的感覺。而今年參加這個創意解難比賽, 則是令我難以忘懷。

初賽的時候,我覺得很意外。起初我們四人一起計算,沒有太大問題,但是題數還 是蠻多的,到了最後十分鐘,我們還有六題是未完成的,幸好我們急中生智,分工合作, 才能順利完成比賽。賽後回想,我認為是有點兒刺激的,面對意外的挑戰,我很高興, 因為我的經驗又增多了。我們組僥倖地從這回合中脫穎而出,晉身決賽。

決賽的時候,我們汲取了上回的教訓。我認為時間是寶貴並且有限的,我們要懂 得利用。當時,題目都是有關摺紙的,題型都是我沒接觸過的。然而,我認為他們都很 有趣,若沒做真實的實驗,就不會得出那些出其不意的答案,它亦挑起了我對摺紙的興 趣。

我認為這是一個很值得參加的比賽。他會讓你大開眼界,讓你跟其他同學溝通數 學,讓你學習到不同類型的數學。這麼有意義的比賽,有機會參加的話就把握機會去學 習吧!

英華書院

指導老師:李慶偉

香港數學創意解難比賽是一個特別的比賽。同學在比賽時可以使用計數機,那代 表比賽著重於計算的方法與過程。另外在決賽時,同學需要接受評判團的提問,那是 其他數學比賽所沒有的。所以這個比賽除了考驗同學的數學能力及創意外,也考驗同 學之間的團隊合作及隨機應變的能力,這正是一般課堂難以教授的。由於決賽的題目 難以估計,所以訓練的重點,就是有關團隊的協作。雖然在這學年,專為這比賽的訓 練不是太多,但是同學們會懂得自發地去找尋適當的材料,為比賽準備。很高興同學 們在是次比賽發揮理想,最終取得了理想的成績。

參賽學生:林在恩

香港數學創意解難比賽有別於其他的數學比賽,能透過題目帶出生活中的數學。例 如本屆的主題隨機漫步,看似複雜無用的理論其實在不同範疇起著舉足輕重的地位,愛 因斯坦著名論文研究的布朗運動是很好的例子。比賽中評判發問的環節也考驗我們的 即場發揮、回答的能力,十分有挑戰性,讓人回味無窮。

參賽學生: 游証恩

我認爲本屆題目是十分有趣的,「隨機漫步」無論在數學或生活上都有很廣闊的 用途,在統計學等領域尤其如此。很高興能夠在比賽中接觸到這個題目(編者按:隨機 漫步),讓我接觸到數學的不同分支,我從前没想過它竟能用作預測恆生指數的走勢!

聖保羅書院

參加香港數學比賽使我們獲益良多。首先,此比賽的題目十分有趣,例如初賽中有 一題要求各隊給出一數,將所有隊伍的數進行特定處理後,每隊按是否與得出的數接近 而給分,這道題目使我們感覺十分新鮮。此外,我們的解難和溝通能力提升了,在比賽 時,我們需要聆聽大家的意見並進行討論,多角度思考,得出最後答案。經過是次比賽, 我們明白到計算和動手實驗都是數學中不可或缺的,擴闊了我們的數學視野。



小學初賽題目(筆試)

Question paper of Primary Heat (Written)

題1 (2分)

2018 可寫成兩個部分的和:第一個部分是某整數的十次方;第二個部分可表達為三個整數的 積。求這三個整數。

答:

Question 1 (2 marks)

Answer:

題 2 (2 分)
 已知 N 是一個 4 位數,它由 4 個不同的數字組成,且 N 可被 27 整除。
 求 N 的最小可能值。

答: N 的最小可能值是 _____。

Question 2 (2 marks)

It is given that N is a 4-digit number made up of 4 different numerals. N is also divisible by 27. Find the least possible value of N.

Answer: The least possible value of *N* is ______.

題3 (2分) 圖三中正六邊形的邊長為4厘米,六個圓形的圓心 分別在正六邊形的頂點上。 如小圓的半徑為1厘米,求斜線部分和實色部分面 積的比。

答: 斜線部分面積:實色部分面積 = ___:____



圖三 / Figure 3

Question 3 (2 marks)

Figure 3 shows a regular hexagon with side 4 cm. The centres of the six circles are located at the six vertices of the hexagon. If the radius of the small circles are all 1 cm, find the ratio of the area of the shaded parts to the area of the solid parts.

Answer: Area of the shaded parts : Area of the solid parts = ____:___

題4 (2分)

<u>小智和小光由和諧鎮步行到日之城。小智</u>早一小時出發,<u>小光</u>早一小時到達。如果<u>小智</u>的步行速度是5公里/小時,<u>小光</u>的步行速度是6公里/小時,求兩地的距離。

答: <u>和諧鎮和日之城</u>相距 _____ 公里。

Question 4 (2 marks)

Adam and Bill walked from Town of Peace to Sunshine City. Adam started an hour earlier while Bill arrived an hour earlier. If the walking speed of Adam was 5 km/h while the walking speed of Bill was 6 km/h. Find the distance between the two places.

Answer: The distance between Town of Peace and Sunshine City is _____ km.

題5 (2分)

<u>小樂</u>由南向北行走,不久她向右轉 90° 行走,又過不久向左轉270°行走,最後向後轉走,請問這時<u>小樂</u>是朝哪一個方向行走?

答:

Question 5 (2 marks)

Joyce started walking towards the north for a certain time. After a while, she turned 90° to the right and continued to walk. After some time, she turned 270° to the left and continued to walk. Finally, she turned back and walked. Which direction was Joyce walking towards finally?

Answer:

題6 (2分) 三個質數之和是 132。如果最大的數比中間的數大 48,請找出這三個質數。

答:

Question 6 (2 marks)

The sum of 3 different prime numbers is 132. If the greatest number exceeds the middle number by 48, find the 3 prime numbers.

Answer:

題7 (3分)

有一個長方體盒子,它的底部是正方形,體積是 288 立方厘米。已知盒子的長、闊、高都是 整數厘米。

- (a) 請列出盒子其中一種可能的尺寸。
- (b) 請問這個盒子可能有多少種不同的尺寸?

答:

(a)

(b)

Question 7 (3 marks)

There is a rectangular box and its base is a square. Its volume is 288 cm³. It is given that the length, width and height in cm are all integers.

- (a) List one possible dimension of the box.
- (b) How many possible dimensions of the boxes are there?

Answer:

(a)

(b)

題8(2分)

盒子裏有一些波子。爸爸取去一半多兩粒,媽媽再取去餘下的一半多三粒。之後弟弟再取去 餘下的¹4,最後只剩下3粒波子。請問盒子裏原有波子多少粒?

答:

Question 8 (2 marks)

There are some marbles in a box. Father takes half of them and 2 more, then mother takes half of the marbles left and 3 more. Then little brother takes $\frac{1}{4}$ of the marbles left and finally there are 3 marbles left in the box. How many marbles are there originally?

Answer:

題9 (2分)

在星球 X,當地人的數數目方法有點不同。我做了一個對照十進制及星球 X 數字的表(由十進 制數字 1 至 15)。

十進制數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
星球X數字	!	<u>a</u>	#	\$	%	! *	!!	!@	! #	! \$

十進制數字	11	12	13	14	15
星球 X 數字	! %	@*	@!	@@	@#

[_____] 原先在我的口袋中,我有 ## 粒石頭。我在星球 X 的朋友亦給了我 ## 粒石頭,請問最後我 會有多少粒石頭呢?

請以星球X的數字來表示你的答案。

答:

Question 9 (2 marks)

In Planet X, the people there count numbers in a different way. I have made a table for comparing the decimal number and Planet X's number (from decimal number 1 to 15).

Decimal Number	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Planet X Number	!	æ	#	\$	%	! *	!!	!@	! #	!\$

Decimal Number	11	12	13	14	15
Planet X Number	! %	@*	@!	@@	@#

There are ## pieces of stone in my pocket originally. My friend from Planet X also gives me ## pieces of stones. How many pieces of stones shall I have finally? Please use number system in planet X to express your answer.

Answer:

題10 (2分)

有一串數列,形成的方法如下:分子為由1開始的連續奇數之和,分母為由2開始的連續偶數 之和,第一個數的分子分母均有1項,第二個數的分子分母均有2項,如此類推。同學可參考 下表

	數列
第一個	$\frac{1}{2}$
第二個	$\frac{1+3}{2+4}$
第三個	$\frac{1+3+5}{2+4+6}$

如果第N個數的數值為0.999, 求N。

答:

Question 10 (2 marks)

A sequence is formed in the following way: the numerator is the sum of the consecutive odd number(s) starting from 1; the denominator is the sum of the consecutive even number(s) starting from 2. In the first number, there is 1 term in both numerator and denominator. In the second number, there are 2 terms in both numerator and denominator. You can refer to the following table for reference.

	Sequence
First Number	$\frac{1}{2}$
Second Number	$\frac{1+3}{2+4}$
Third Number	$\frac{1+3+5}{2+4+6}$

If the value of the N^{th} number is 0.999, find N.

Answer:

題 11 (2 分)



答:

Question 11 (2 marks)

How many rectangles are there in the figure which are similar to *ABCD* (excluding *ABCD*)? Answer:



一個新的品種細菌 X 在今天(第1天)誕生了。它每 24 小時可以把自己複製一次。請指出 在第幾天的時候,這種細菌 X 的數量最接近 2,000,000。

答案:

Question 12 (2 marks)

A new kind of bacteria *X* is born today (Day 1). It duplicates itself by every 24 hours. At which day will the number of bacteria be closest to 2,000,000? Answer: 題 13 (2分)

有 64 個表面全為白色的小正方體積木,並拼成表面全為白色的4×4×4正方體(圖十三)。現有 人故意把某些小正方體的面塗上黑色。最少要把多少個小正方體完全塗上黑色,才能肯定無法 透過重新調配,令 4×4×4 的正方體表面不顯露任何黑色呢?



圖十三 / Figure 13

答:

Question 13 (2 marks)

There are 64 small cubes all painted in white and are arranged to a larger white cubes $4 \times 4 \times 4$ in dimension (Figure 13). Some faces of these small cubes have been painted in black. Find the least number of cubes that should be totally painted in black to ensure that it is not possible to hide all the black faces on the $4 \times 4 \times 4$ white cubes by any re-arrangements.

Answer:

題14 (4分)

在一塊 5×5 的釘板上,你可以用橡皮筋連上兩口釘形成一條線段。有些線段會穿過其他 釘,如圖十四a;有些則不會,如圖十四b:



- (a) 如果所有橡皮筋的其中一端都必須連上右上角最頂端的釘 A,請問可以連成多少條不會穿 過其他釘的不同線段呢?
- (b) 如果現在可以自由選擇釘板上某一點,而所有的橡皮筋的其中一端都必須連上這一點,請 問最多可以連成多少條仍然不會穿過其他釘的不同線段呢?
- 答:
- **(a)**
- **(b)**

Question 14 (4 marks)

On a 5×5 geoboard, you can connect 2 dots to form a line segment by using a rubber band. Some line segments will cross over other dots, as shown in Figure 14a. Some line segments will not cross any of the other dots, as shown in Figure 14b.

- (a) If all the line segments must be connected to the upper rightmost dot *A*. How many possible different line segments can be formed if they cannot cross over any other dots?
- (b) Now you can choose another dot on the geoboard and all the line segments formed must be connected to this new dot. What is the maximum possible different line segments that can be formed if they cannot cross any of the other dots as well?

Answer:

(a)

(b)

題 15 (4分)

一個三角形最多有1個直角,一個四邊形最多有4個直角。

- (a) 請畫一個有3個直角的六邊形。
- (b) 請畫一個有最多個直角的不對稱八邊形。

答:

Question 15 (4 marks)

A triangle can have at most 1 right angle and a quadrilateral can have at most 4 right angles.

- (a) Please draw a hexagon with 3 right angles.
- (b) Please draw a non-symmetric octagon with the greatest number of right angles.

Answer:

題 16 (4 分)

阿良有一部很基本的計算機,只有簡單功能及只能展示答案在單行的液晶顯示屏上。它只能 進行加、減、乘及除的四則運算。所有計算都是順序的,當你輸入「+」、「-」、「×」、 「÷」或「=」鍵後,答案會立刻出現。例子如下:

键入次序	最後屏幕展示
$1 \times 2 + 3 - 4 \times 5 + 6 =$	11
$1 + 2 + 3 \times 4 \times 5 - 6 =$	114
$1 \times 2 \times 3 + 4 - 5 \times 6 =$	30

有一天, 阿良發現他的計算機大部份按鍵都損壞了, 只剩下「3」、「5」、「+」、「-」、「×」 及「=」仍然能夠使用。

		2
		+
5		-
	3	×
	=	

你可以找出不同的按鍵次序,使計算機最後能出現所需的數字嗎?

- (a) 27
- (b) 38
- (c) 19
- (d) 31

答:

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)

Question 16 (4 marks)

John has a very basic calculator that has few functions and displays the results in a one-line LED screen. It can be called a "four-function" calculator since it can only add, subtract, multiply, and divide. All calculations are sequential and the answer will be displayed immediately after you have pressed the "+", "-", "×", " \div " and "=" buttons. Examples are shown below:

Key sequences	Final Display
$1 \times 2 + 3 - 4 \times 5 + 6 =$	11
$1 + 2 + 3 \times 4 \times 5 - 6 =$	114
$1 \times 2 \times 3 + 4 - 5 \times 6 =$	30

One day, John discovers that most of the buttons are damaged and only "3", "5", "+", "-", "×" and "=" buttons are still working.



Can you find out the key sequences so that the calculator will finally display these values?

- (a) 27
- (b) 38
- (c) 19
- (d) 31

Answer:

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)

題 17 (4 分)

每隊參賽隊伍請提供一個 0 至 100 之間的數字(包括 0 和 100,也可以是小數)。計算所有收 集的數字的平均數,再把答案乘以 0.8,以得到一個數字 C。

所提供的數字最接近 C 的 5 隊會各得 4 分。 不提供數字的隊伍和所提供的數字最不接近 C 的 10 隊會各得 0 分,其餘隊伍各得 1 分

答:提供的數字是_____

Question 17 (4 marks)

Every team is required to provide a number between 0 and 100 (including 0 and 100, decimal number is also allowed). The average of all the numbers collected will be calculated and then be multiplied by 0.8 to get a number C.

The 5 teams that provide numbers closest to C will get 4 marks.

The 10 teams that provide numbers furthest away from *C* and the teams have not provided any number will get 0 marks. All the other teams will get 1 mark.

Answer: Number provided is _____

題18 (4 分)
在不用直尺、不撕開紙張、不繪畫線條的情況下,把四張A5紙分別摺成
(a) 正方形、
(b) 菱形、
(c) 平行四邊形及
(d) 鷂形。

答: (把摺好的四邊形放入文件夾內)

Question 18 (4 marks)

Without using ruler, tearing of paper and drawing any line, fold the four pieces of A5 paper, respectively, into

- (a) a square,
- (b) a rhombus,
- (c) a parallelogram, and
- (d) a kite.

Answer: (put the folded quadrilaterals into the folder)

全卷完 [End of Paper]

小學初賽題目(筆試) 參考答案

Suggested Solutions of Primary Heat

- 1. 這三個整數是 2, 7, 71 。 (接受其他合理答案) The three integers are 2, 7, 71 。 (Accept any possible answers)
- N的最小可能值是 1026 。
 The smallest possible value of N is 1026.
- 斜線部分面積:實色部分面積 = 1:2。
 Area of the shaded parts : Area of the solid parts = 1:2.
- <u>和諧鎮</u>和<u>日之城</u>相距<u>60</u>公里。
 The distance between Town of Peace and Sunshine City is <u>60</u> km.
- 5. 小樂是朝北方向行走。

Joyce was walking towards North / N.

- 6. 這三個質數是 2, 41, 89 。 The 3 prime numbers are 2, 41 and 89.
- 7. (a) 盒子其中一種可能的尺寸是:

The possible dimensions of the box can be,

1 cm × 1 cm × 288 cm
 2 cm × 2 cm × 72 cm
 3 cm × 3 cm × 32 cm
 4 cm × 4 cm × 18 cm
 6 cm × 6 cm × 8 cm
 12 cm × 12 cm × 2 cm

(以其中一組答案) (Any one of the answers above)



- 8. 盒子裏原有波子 32 粒。 There are 32 marbles in the box.
- 9. 我最後會有 !!* 粒石頭。(請以星球 X 的數字來表示你的答案。) I will have !!* (in planet X number system) pieces of stone.

10. $N = 999 \circ$



- 11. 圖中與 ABCD 相似的長方形(除了長方形 ABCD 之外)共有 16 個。 There are 16 rectangles in the figure (excluding *ABCD*).
- 在第 22 天的時候,這種細菌X的數量最接近2,000,000。
 On the 22nd day, the number of bacteria will be closest to 2,000,000.
- 最少需要 9 個小立方體完全塗上黑色面才能夠令黑色的表面即使重新調配,亦不能全部藏於 內部而不露在 4 × 4 × 4 的正方體表面。
 The least number of cubes that should be totally painted in black to ensure that it is not possible to hide all the black faces on the 4 × 4× 4 white cubes by any rearrangements is 9.
- 14. (a) 從 A 出發,可以連成 13 條不會穿過其他釘的不同線段。
 From A, there can be 13 possible different line segments to be formed given that they cannot cross over any other dots.
 - (b) 如果沒有任何限制,由任何一點出發,最多可以連成 18 條不會穿過其他釘的不同線段。 Starting from any points, there can be 18 possible different line segments to be formed given that they cannot cross over any other dots.

詳細答案見附錄(A)。Detailed suggested solutions please refer to Appendix (A).



<u> 附錄(A)</u> <u>Appendix (A)</u>

第 14 題 Question 14:





<u>附錄(B)</u> <u>Appendix (B)</u>

第18題 Question 18:



參賽同學主要運用上述方法摺正方形 Most of the participants used the above methods to fold a square.





參賽同學主要運用上述方法摺菱形,但有同學先把紙摺成正方形後才摺菱形,更有同學留意到「摺 紙鶴」的步驟中亦會產生菱形,可見他們會以幾何的角度去觀察日常生活中的事物。

Most participants used the above method to fold a rhombus. But some participants started by folding a square first, and further folded it into a rhombus. A few participants observed that the process of folding a paper crane could form a rhombus. This shows that they observe daily life objects with a geometric perspective.





參賽同學用了不同方法摺鷂形,反映同學對鷂形特性的認識超出了小學的層次。

Various methods used by the participants indicate their knowledge about kite is far beyond primary school level.





同學主要運用45°作為產生平行邊的途徑。 小部份隊伍更用上中學才教的性質。 Participants usually formed a pair of parallel edges by bisecting two right angles. A few participants even used the properties taught in secondary schools.







第十三屆香港小學數學創意解難比賽

決賽暨粵港交流邀請賽-數學解難實驗及辯論 一維到三維之間

The 13th Hong Kong Mathematics Creative Problem Solving Competition for Primary Schools

Final Cum Invitation Tournament Mathematics Problem Solving Experiment and Debate

Between One Dimension and Three Dimension

甲部 (紙雕的數學)Section A - Mathematics in Paper Art

 (10 分)把一張紙,通過反覆的剪摺,可以得出立體的紙雕模形。紙的體積沒有變, 但佔據了額外的空間。

(10 marks) By folding and cutting a paper repeatedly, we can obtain a 3-dimensional paper art model. The volume of the paper remains unchanged but it will occupy extra space.



(a) 請計算大會提供的模型一和模型二分別所佔據的空間。(*紙的大小是 16 cm × 20 cm)

Please calculate the space occupied by the paper art Model 1 and Model 2 provided. (The dimensions of the paper is $16 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$.)

- (b) 請按模型一變成模型二的方式,想像下一個模型的樣子,並計算它佔據了的空間。 Please follow the pattern from Model 1 to Model 2, create the next model and calculate the space occupied by this new model.
- (c) 請用附上的紙把模型造出來。Please make this paper art model using the paper provided.
- (6分)模型一直變下去,趨勢如何呢?請加以描述。
 (6 marks) If the model pattern goes on, what would the models look like? Please describe the trend of the models.



乙部 (紙環的數學) Section B – The mathematics in paper ring

(6分)把兩張12 cm×16 cm的矩形紙張,按圖 2a 和圖 2b 內紅線剪,會得到兩條不斷開的紙環。請估算並解釋可以用這兩條紙環分別可圍繞的範圍的周界。(可以用草圖附助說明)
 (6 marks) You are given 2 pieces of rectangular paper. Please cut the paper into paper rings according to figure 2a and 2b. Please estimate the largest possible length surrounded by the paper ring. Explain your answer, with diagrams if necessary.

 (6分)把圖 2a 和圖 2b 剪出的紙環長度不同,剪的過程,要剪的線也頗多,以圖 2b 來說,(假設不轉彎、不斷開的直線都可一刀剪開)最多要剪 10 刀。如果保持紙 環的寬度不變,請提出一個優化紙環的設計或製作的流程以提升效率。 請以草圖輔助說明。

(6 marks) The lengths of the 2 pieces of paper ring are different. It requires many steps of cutting, too. In figure 2b, you will need 10 steps in maximum ito cut the pattern, given that you need not to turn around in each step.

Please improve the design of the paper ring or the cutting process such that the width of the paper ring remains unchanged.

Please draw a diagram to illustrate your solution.


(8分)如果要用一張 A4 紙剪出一條不斷開的紙環,但要能圍繞更大的範圍的周界, 可以如何將題(2)的設計延伸呢?

(8 marks) You are required to cut a paper ring from a piece of A4 paper and make it as large as possible. Your design of cutting can be based on the result of Q.2.

- (a) 請以草圖加上數學的表達去說明。Please draw a diagram to illustrate your solution.
- (b) 請附上的A4紙張,做一條足以圍繞大會提供的特定物件的紙環。 成功製作紙環將會得分數,成功圍繞物件而周界最短或不成功圍繞物件但周界 最長將得到額外分數。
 *各隊只准在指定範圍外觀察特定物件
 Please make a paper ring with the A4 paper provided. This paper ring will be used to surround an object provided by the judges. Marks will be given to the team who made a paper ring successfully. Bonus marks will be given to the team having the shortest paper ring to surround the object successfully or the longest paper ring that failed to

surround the object.

* Each team can only observe the object from a given position

建議題解 Suggested solutions



1.



(a) 模型一所佔據的空間 Space occupied by Model 1

 $= \left(\frac{20}{4}\right) \left(\frac{20}{4}\right) \left(\frac{16}{2}\right) = 200 \text{ cm}^{3}$ 模型二所佔據的空間 Space occupied by Model 2 $= \left(\frac{20}{4}\right) \left(\frac{20}{4}\right) \left(\frac{16}{2}\right) \left(1 + 3 \times \frac{1}{8}\right) = 275 \text{ cm}^{3}$ (2+2)

(b) 模型三所佔據的空間 Space occupied by Model 3

$$= \left(\frac{20}{4}\right) \left(\frac{20}{4}\right) \left(\frac{16}{2}\right) \left(1 + \frac{3}{8} + \frac{9}{64}\right) = 303.125 \ cm^3$$
(2+1)

(c) 請用附上的紙把模型造出來。

Please make this paper art model using the paper provided. (3)

2.

•

體積增加但有上限

The space occupied increases but bounded by an upper limit.

每次增加的柱體數量是之前的三倍

The no. of cuboid increases is 3 times of the previous one.

每次增加的柱體總體積是對上一次所增加的 3/8

The space occupied by the cuboid increases is 3/8 of the previous one

● 形狀漸漸接近三角椎體 The shape tends to be a tetrahedron

- 自我相似 Self-similar
- ...

註: 第1、2題是有其他可能的答案。

Remark: There are other possible solution for questions 1 and 2.



乙部 (紙環的數學) Section B – The mathematics in paper ring

1. 圖 2a Figure 2a

紙環的大約長度 The length of the paper ring

$$= \left(8 \operatorname{cm} \times 2 + \sqrt{2^2 + 2^2} \operatorname{cm} \times 6 \times 2\right) \approx 49.9 \operatorname{cm}.$$

或 or

 $= (8 \text{ cm} \times 2 + 2.8 \text{ cm} \times 6 \times 2) \approx 49.6 \text{ cm}$

接受下限 Lower limit of the acceptable range

 $= (8 \text{ cm} \times 2 + 2 \text{ cm} \times 6 \times 2) \approx 40 \text{ cm}$

(1+1)

圖 2b Figure 2b

紙環的大約長度 The approximate length of the paper ring

= 8 cm × 2 + 4 cm × 3 + $\sqrt{6^2 + 2^2}$ cm × 6 = 65.9 cm

或 or

 $= 8 \text{ cm} \times 2 + 4 \text{ cm} \times 3 + 6.3 \text{ cm} \times 6 = 65.8 \text{ cm}$

接受下限 Lower limit of the acceptable range

 $= 8 \text{ cm} \times 2 + 4 \text{ cm} \times 3 + 6 \text{ cm} \times 6 = 64 \text{ cm}$





上圖的兩種都減少了剪的次數,也增加了紙環的長度。

Both figures above reduce the steps of cutting and ,at the same time, increase the length of the paper ring.

左圖的長度 The length of the figure on the left

$$= \sqrt{4^2 + 2^2} \times 4 \times 2 + 12 \times 2 \approx 59.8 \tag{3}$$

右圖的長度 The length of the figure on the right

$$=\sqrt{10^2 + 2^2} \times 4 + 12 \times 2 + 8 \approx 72.8 \tag{4}$$

先摺後剪也可減少剪的次數

Fold before cutting can also reduce the steps of cutting. (2)

3.	(a)	草圖 Design	(1)
		闊度減半可大約製造出兩倍長的紙環	
		If the width is reduced into half, the length of the paper can be doubled	(2)
	(b)	紙環成功圍繞物件而周界最短	(-)
		Paper ring with shortest length that can surround an object	(5)
		紙環成功圍繞物件	
		Paper ring can surround an object	(4)
		紙環不成功圍繞物件但周界最長	
		Paper ring with the longest length that cannot surround an object	(3)
		成功製造紙環但不成功圍繞物件	
		Paper ring cannot surround an object	(2)
		不成功製造紙環	
		Fail to make a paper ring	(0)



中學初賽題目(筆試)

Question paper of Secondary Heat (Written)

題1(2分)

已知2015×2016×2017×2018+k 為一完全平方數,如果k是一個正整數,求k的最小值。

Question 1 (2 marks)

It is given that $2015 \times 2016 \times 2017 \times 2018 + k$ is a perfect square. If k is a positive integer, find the least value of k.

題 2 (2 分) 定義 n!=n×(n-1)×(n-2)×...×(1),其中 n 是正整數。 例如: 5!=5×4×3×2×1=120 設 x 為 2018!。問 x 這數字的結尾有多少個「零」?

Question 2 (2 marks)

Define $n != n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (1)$, when *n* is a positive integer. For Example, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ Let *x* be 2018!. How many zero digits are there at the end of *x*?

題3(2分)

吴媽媽有一子一女,阿忠和阿慈。她收入不多,但在每個月的月頭,都會把零用錢給阿忠或 阿慈。為了公平,她設計了一個特別的輪換方法。

第1 至第 n 個月	誰得零用錢
1	忠
1-2	忠慈
1-4	忠 慈 慈 忠
1 - 8	忠慈慈忠慈忠
1 – 16	忠慈慈忠慈忠忠慈忠忠慈忠

在第四十和第四十一個月,誰人將會得到零用錢?

Question 3 (2 marks)

Mrs Ng has a son and a daughter, Bill and Amy (B & A). She does not earn a lot but she will give pocket money either to Bill or Amy at the beginning of each month. She designs a fair way to give the pocket money.

1^{st} to n^{th} month	Who gets the pocket money
1	В
1 – 2	BA
1-4	BAAB
1 - 8	BAABABBA
1 – 16	BAABABBAABBABAAB

Who will get the pocket money at the 40th and 41st months respectively?

題4(2分)

在圖中 ABCD 是一個邊長為 10 厘米的正方形,如果三角形 ABF 的面積是 36 平方厘米,求 CE 的長度。

Question 4 (2 marks)

In the figure, *ABCD* is a square with side 10 cm. If the area of $\triangle ABF$ is 36 cm², find the length of the side *CE*.



題5(2分)

在圖中,正方形內有4個全等的直角三角形。如果大正方形的邊長為13厘米,而4個小圓形 的半徑為2厘米,求大圓的半徑。

Question 5 (2 marks)

In the figure, 4 congruent right-angled triangles are arranged inside a square as shown. If the larger square has side length 13 cm and the radii of small circles are 2 cm, find the radius of the larger circle.



題6(2分)

圖中的釘板是用作遊戲使用。你會放入一枚圖形的硬幣並讓它掉到8個位置中的其中一個。 當硬幣碰到一口釘時,它彈至左或右的機會是均等的。

如果有一枚硬幣在圖中的位置掉下,它最有機會掉至那一個位置?

Question 6 (2 marks)

The figure shows a peg board used for a game show. Whenever the circular chip falls onto a peg, it has an equal chance to bounce left or right.

If the chip is dropped from the location shown, which position would it most likely fall to?



題7(2分)

圖中有3個外接的圓,如果兩個較大的圓的半徑為18厘米及8厘米,求最小的圓的半徑。

Question 7 (2 marks)

The figure shows 3 touching circles. If the radii of the two larger circles are 18 cm and 8 cm respectively, find the radius of the smallest circle.



題8(2分)

已知A 點的坐標是 (0,4) 而 C, D 都在x 軸上, $E \cdot F \cdot G \not B H$ 分別為 $AB \cdot BC \cdot CD \not B DA$ 的中點。如果 ABCD 為一菱形及 AB = 5, 求 陰影部分 PQRS 的面積。

Question 8 (2 marks)

Given that the coordinate of A = (0,4) and C, D lies on x-axis. E, F, G and H are mid-points of AB, BC, CD and DA respectively. If ABCD is a rhombus and AB = 5, find the area of the shaded region PQRS.



題9 (2分)

我們將定義以下的運算方法:

Question 9 (2 marks)

We are going to define the following operations:

$$(a,b) * (c,d) = (ad + bc,bd)$$

 $(ka,kb) = (a,b)$
 $(a,b)\Delta(c,d) = (ac,bd)$

Where *a*, *b*, *c*, *d*, *k* are all real numbers with *b*, *d* and *k* are not equal to 0.

- (a) Given(1, 2) *(x, y) = (5, 6), then $(x, y) \Delta (1, 6) = ?$
- (b) $(1, 2) \Delta (2, 3) \Delta (3, 4) \Delta ... \Delta (2017, 2018) = ?$

題10 (2分)

在一個正方形內有 15 點,它們與正方形的 4 個頂點均被一些不相交的線段連起,使到整個正 方形完全被分割成很多個三角形。請問總共可以分割成多少個三角形呢?

Question 10 (2 marks)

There are 15 points inside a square. They are all connected by non-intersecting line segments with each other and with the vertices of the square, in such a way that the square is dissected into triangles. How many triangles will we have?

題11 (2分)

小明在用晚餐前看了手錶,發現時針與分針成121°;用餐後他再看手錶,發現時針與分針又 再次成121°。如果已知他是在晚上6時至7時用餐,求他的用餐時間。

Question 11 (2 marks)

Ming watched his watch before his dinner. He found that the angle formed between the hour hand and the minute hand was 121° . After the dinner, he watched his watch again. The angle formed between the hour hand and the minute hand was also 121° . If he had his dinner between 6 p.m. to 7 p.m., find the time spent on his dinner.

題 12 (2 分)

把一個 4 cm × 8 cm 的長方形,如圖摺起使 B 點和 D 點重疊成五邊形 APQCD。求五邊形 APQCD 的面積。

Question12 (2 marks)

A rectangle 4 cm \times 8 cm in dimension is folded as shown in the figure so that point *B* and point *D* are overlapped to form a pentagon *APQCD*. Find the area of *APQCD*.



題13 (2分)

設 [x] 和 [x] 分別代表向上和向下捨入的函數。 (例如 [4.2] = [4.8] = 5 而 [3.46] = [3.99] = 3) 試計算 下列算式 [√1]+[√2]+[√3]+…+[√100]-([√1]+[√2]+[√3]+…+[√100])

的值。

Question13 (2 marks)

Let [x] and [x] represents the round up and round down functions respectively. (For example, [4.2] = [4.8] = 5 while [3.46] = [3.99] = 3) Find the value of the following expression,

 $\left[\begin{array}{c}\sqrt{1}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c}\sqrt{2}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c}\sqrt{3}\end{array}\right] + \dots + \left[\begin{array}{c}\sqrt{100}\end{array}\right] - \left(\left[\begin{array}{c}\sqrt{1}\right] + \left[\begin{array}{c}\sqrt{2}\right] + \left[\begin{array}{c}\sqrt{3}\right] + \dots + \left[\begin{array}{c}\sqrt{100}\right]\end{array}\right)$

題14 (2分)

如果 k 個連續整數之和是 2018 並且 1 < k < 2018,求這 k 個連續整數中最小的數。

Question14 (2 marks)

If the sum of k consecutive integers is 2018 and 1 < k < 2018. Find the smallest number in these k integers.

題 15 (2分) 圖中為一等距釘板,求圖中角 a,b及c之和。

Question15 (2 marks)

The figure shows an equidistant geoboard. Find the sum of angles a, b and c shown in the figure.



題 16 (4 分) 在方程

 $(x^2 - 5x + 5)^{(x^2 - 11x + 30)} = 1$

中,求所有的實數解之和。

Question16 (4 marks)

Find the sum of all real roots in this equation,

 $(x^2 - 5x + 5)^{(x^2 - 11x + 30)} = 1$

題17 (3分)

利用雪條棒可以砌出以下的數字。



現有 30 枝雪條棒,用盡 30 枝雪條棒砌出下列要求的數字。

- (a) 最大的雙數;
- (b) 最小5的倍數;
- (c) 最大的6位3的倍數。

Question17 (3 marks)

The following digits can be formed by using popsicle sticks.



Now there are 30 popsicle sticks, by using all 30 sticks, form the required numbers to the following conditions.

- (a) The greatest even number;
- (b) The smallest number which is a multiple of 5;
- (c) The greatest 6-digit number which is also a multiple of 3.

題18 (4分)

每隊參賽隊伍請提供一個 0 至 100 之間的數字(包括 0 和 100,也可以是小數)。計算所有 收集的數字的平均數,再把答案乘以 0.8,以得到一個數字 C。

所提供的數字最接近 C的 5 隊會各得 4 分。 不提供數字的隊伍和所提供的數字最不接近 C的 10 隊會各得 0 分,其餘隊伍各得 1 分

Question 18 (4 marks)

Every team is required to provide a number between 0 and 100 (including 0 and 100, decimal number is also allowed). The average of all the numbers collected will be calculated and then be multiplied by 0.8 to get a number C.

The 5 teams that provide numbers closest to C will get 4 marks.

The 10 teams that provide numbers furthest away from C and the teams have not provided any numbers will get 0 marks. All the other teams will get 1 mark.

題19 (4分)

只用直尺,完成以下任務:

註:你只可以連接圖中已有的點(包括 線/線段 與 線/線段 的新交點)來作出新的 線/線 段。

- (a) 在此矩形內圍出一塊面積等於此矩形面積五分一的四邊形。
- (b) 在此正方形內圍出一塊面積等於此正方形面積三分一的三角形。
- (c) 用一條直線把梯形分為面積相等的兩部分。
- (d) 在此三角形內圍出面積等於此三角形面積四分一的另一個三角形。

Question19 (4 marks)

Using straightedge only to complete the following tasks:

Remark: You are only allowed to join points (including new intersections of lines / line segments) to form new lines / line segments.

- (a) Form a quadrilateral inside the rectangle which has one fifth of its area.
- (b) Form a triangle inside the square which has one third of its area.
- (c) Use a line to divide the trapezium into two parts having equal area.
- (d) Form a triangle inside the given triangle which has one fourth of its area.









全卷完 End of Paper

中學初賽題目(筆試) 參考答案

Sample Answer of Secondary Heat

題1(2分) 設 n 為一正整數。 n(n+1)(n+2)(n+3) + k= n(n+3)(n+1)(n+2) + k $= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + k$ $= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + k$ 如果 k 取最小值, k=1 時上式將可以變為一個完全平方數。

Question 1 (2 marks)

Let *n* be a positive integer. n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + k = n(n + 3)(n + 1)(n + 2) + k $= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + k$ $= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + k$ For the least value of *k*, if k = 1, a completed square could be formed.

題2(2分)

結尾的 0 的數目與 2018!中 10 的因數數目相同。在 2018!中,先求出"5"的因數數目

 $\left[\frac{2018}{5}\right] = 403$ $\left[\frac{2018}{25}\right] = 80$ $\left[\frac{2018}{125}\right] = 16$ $\left[\frac{2018}{625}\right] = 3$ $B \ge 5 \text{ if } \text{ is } \text{ if } = 403 + 80 + 16 + 3 = 502$

- ... 因數5 的總數目必定少於因數2 的總數目,所以一定有足夠的因數2 去與因數5 配合成 為因數10。所以共有502 個因數10。
- ∴ 在 2018!中,尾數共有 502 個零。

Question 2 (2 marks)

The number of zero digits is equal to the number of factor 10 in 2018!.

We will find the number of factor 5 in 2018! first.

 $\left\lfloor \frac{2018}{5} \right\rfloor = 403$ $\left\lfloor \frac{2018}{25} \right\rfloor = 80$ $\left\lfloor \frac{2018}{125} \right\rfloor = 16$ $\left\lfloor \frac{2018}{625} \right\rfloor = 3$

Total no. of factor 5 = 403 + 80 + 16 + 3 = 502

- Total no. of factor 5 must be less than Total no. of factor 2. There must be enough 2s' to match the 5s' to form a 10. So there are 502 of factor 10.
- \therefore There are 502 zeros at the end of 2018!

題3(2分)
第40和第41個月
⇔(第8和第9個月)的相反
⇔(慈和慈)的相反
⇔ 忠

Question 3 (2 marks) $40^{\text{th}} \text{ and } 41^{\text{st}}$ \Leftrightarrow negation of (8th and 9th) \Leftrightarrow negation of (A and A) $\Leftrightarrow BB$

題 4 (2 分)

$$\Delta ABC \oplus \overline{h} = \frac{10 \times 10}{2} = 50 \text{ cm}^2$$

 $\Delta BFC \oplus \overline{h} = 50 - 36 = 14 \text{ cm}^2$
 $AF : FC = 36 : 14 = 18 : 7$
 $\therefore \Delta ABF \sim \Delta CEF$
 $\therefore AB : EC = AF : FC$
 $\frac{10}{EC} = \frac{18}{7}$
 $EC = \frac{35}{9} \text{ cm}$

Question 4 (2 marks)



Area of $\triangle ABC = \frac{10 \times 10}{2} = 50 \text{ cm}^2$ Area of $\triangle BFC = 50 - 36 = 14 \text{ cm}^2$ AF : FC = 36 : 14 = 18 : 7 $\therefore \triangle ABF \sim \triangle CEF$ $\therefore AB : EC = AF : FC$ $\frac{10}{EC} = \frac{18}{7}$ $EC = \frac{35}{9} \text{ cm}$

$\frac{(ab)^2}{4} - 2\left(\frac{ab}{2}\right)(13) + 13^2 = a^2 + 2ab + b^2$



∴ 大圓的半徑 / Radius of larger circle = 3.5 cm

Question 6 (2 分 題6 2 marks)

由/ From (1),



它最有機會掉至5號位置。

It most likely falls to position 5.



題5 Question 5 (2分2 marks)
設
$$AE = BF = CG = DH = a$$
及 $AF = BG = CH = DE = b$

 $\frac{ab}{2} - 13 = a + b$

$$\begin{cases} ab = (2)(a + b + 13) & \dots (1) \\ a^2 + b^2 = 13^2 & \dots (2) \end{cases}$$

題 7 Question 7 (2 分 2 marks)



$$\begin{cases} a^2 = (18+r)^2 - (18-r)^2 = 72r & \dots (*) \\ b^2 = (8+r)^2 - (8-r)^2 & = 32r & \dots (**) \\ (a+b)^2 = (18+8)^2 - (18-8)^2 & = 576 & \dots (***) \end{cases}$$

 $\sqrt{(*)(**)}$,

$$ab = \sqrt{(72r)(32r)} = 48r$$

曲/From (***),

$$a^{2} + b^{2} + 2ab = 576$$

72r + 32r + 2(48r) = 576
r = 2.88

題 8 Question 8 (2 分 2 marks)

 ΔSDH , ΔPAE , ΔQBF 和 ΔRCG 分別沿着 H, E, F 和 G 順時針方向旋轉 180°, 我們分別得出 $\Delta S'AH$, $\Delta P'BE$, $\Delta Q'CF$ 和 $\Delta R'DG$. 得知平行四邊形 PQRS, APSS', P'BQP, QQ'CR 和 SRR'D 是全等。



∴ PQRS的面積 = $\frac{1}{5}(5 \times 4) = 4$ 平方單位

By rotating the triangles $\triangle SDH$, $\triangle PAE$, $\triangle QBF$ and $\triangle RCG$ 180° clockwise about H, E, F and G, we obtain $\triangle S'AH$, $\triangle P'BE$, $\triangle Q'CF$ and $\triangle R'DG$ respectively.

Notice the parallelograms PQRS, APSS', P'BQP, QQ'CR and SRR'D are congruent.

: Area of
$$PQRS = \frac{1}{5}(5 \times 4) = 4$$
 sq. units

 ■ 9
 Question 9
 (2 分 2 marks)

 (a)
 (1,2) * (x,y) = (5,6)

 (y + 2x, 2y) = (5,6)

 $\therefore y = 3k, x = k$
 $(x, y)\Delta(1,6)$

 = (x, 6y)

 = (k, 18k)

 = (1, 18)

 (b)

 $(1,2)\Delta(2,3)\Delta(3,4)\Delta \dots \Delta(2017,2018)$

 = (1, 2018)

題 10 Question 10 (2 分 2 marks) 開始時,我們有正方形的4 個頂點, 在正方形內任意加上一點,我們得4個三角形。 在其中一個部份加上第二點,我們再得2個三角形。 在其中一個部份加上第三點,我們再得2個三角形。 因此, 共有三角形 = 4+2+2+...2=4+2(14)=32個。 Initially, we have a square with 4 vertices only, After adding the 1st point inside the square we have 4 triangles. Adding the 2nd point inside any region we have 2 more triangles.

Therefore,

. . . .

Total number of triangles = 4 + 2 + 2 + ... = 4 + 2 (14) = 32.

14 times

題11 (2分)

時針的速度是:

分針的速度是: 6° 每分 晚餐是由 6:x 至 6:y $180^{\circ} + 0.5^{\circ}x - 6^{\circ}x = 121^{\circ}$ $59^{\circ} = 5.5^{\circ}x$ $x = \frac{118}{11}$ $6^{\circ}y - (180^{\circ} + 0.5^{\circ}y) = 121^{\circ}$ $5.5^{\circ}y = 301^{\circ}$ $y = \frac{602}{11}$

用餐時間是 = $\frac{602}{11} - \frac{118}{11} = 44$ 分鐘。

Question 11 (2 marks)
Speed of hour arm is

$$\frac{360^{\circ}}{12} \text{ per } 60 \text{ min=}0.5^{\circ} \text{ per min}$$
Speed of minutes arm:
Dinner is from 6: x to 6: y

$$180^{\circ} + 0.5^{\circ}x - 6^{\circ}x = 121^{\circ}$$

$$59^{\circ} = 5.5^{\circ}x$$

$$x = \frac{118}{11}$$

$$6^{\circ}y - (180^{\circ} + 0.5^{\circ}y) = 121^{\circ}$$

$$5.5^{\circ}y = 301^{\circ}$$

$$y = \frac{602}{11}$$
Time spent = $\frac{602}{11} - \frac{118}{11} = 44$ min.

64

題 12 (2分)
設 AP 為 x cm

$$AP^2 + AD^2 = PD^2$$
 (畢氏定理)
 $x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$
 $x = 3$
∴ AP = 3 cm, PD = 5 cm
運用對稱性, QC = 3 cm
APQCD 的面積 = $\frac{(5+3) \times 4}{2} + \frac{3 \times 4}{2}$
= 22 cm²

Question 12 (2 marks)
Let AP be x cm

$$AP^2 + AD^2 = PD^2$$
 (Pyth. Thm.)
 $x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$
 $x = 3$
 $\therefore AP = 3 \text{ cm}, PD = 5 \text{ cm}$
By symmetry, $QC = 3 \text{ cm}$
Area of $APQCD = \frac{(5+3) \times 4}{2} + \frac{3 \times 4}{2} = 22 \text{ cm}^2$

$$\left[\sqrt{x}\right] - \left[\sqrt{x}\right] = \begin{cases} 0 & \text{if } x \text{為正方形數.} \\ 1 & \text{其他情况} \end{cases}$$

∴ 1 至 100 內有 10 個正方形數
 ∴ 要求的值 = 100 - 10 = 90

Question 13 (2 marks)

$$\left[\sqrt{x}\right] - \left[\sqrt{x}\right] = \begin{cases} 0 & \text{when } x \text{ is a square no.} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- :. There are 10 square no. from 1 to 100 inclusively
- $\therefore \text{ Required value} = 100 10 = 90$

題14 (2分)

$$\frac{k}{2}(2a + k - 1) = 2018$$
$$k(2a + k - 1) = 4036$$

把 4036 因式分解, k 的可能值為 1009 或 2018。 考慮到 a 為整數, k 只可以為 1009, 因 此 a = -502.

即首項為-502 ,共有 1009 連續整數。

Question 14 (2 marks)

 $\frac{k}{2}(2a + k - 1) = 2018$ k(2a + k - 1) = 4036

By factorizing 4036, possible values of k = 1009 or 2018. By considering *a* is also an integer, the only possible value of *k* is 1009, thus returning a = -502.

i.e. the 1st term is -502 and there are 1009 consecutive numbers.

題 15 Question15 (2 分 2 marks)



a' = a, b' = b $\therefore \quad a + b + c = a' + b' + c = 90^{\circ}$

 $(x^2 - 5x + 5)^{(x^2 - 11x + 30)} = 1.$ $x^2 - 11x + 30 = (x - 5)(x - 6)$ fi况一: $x^2 - 5x + 5 = 1$ 和 $x^2 - 11x + 30 = K$, K為非零整數。 雨實根之和 = 5 fi况二: $x^2 - 5x + 5 \neq 0$ 和 $x^2 - 11x + 30 = 0$ 。 雨實根之和 = 11 fi况三: $x^2 - 5x + 5 = -1$ 和 $x^2 - 11x + 30 = 2K$, K為非零整數。 雨實根之和 = 5 \therefore 所有的實數解之和 = 5 + 5 + 11 = 21

Question16 (4 marks)

 $(x^{2} - 5x + 5)^{(x^{2} - 11x + 30)} = 1$ $x^{2} - 11x + 30 = (x - 5)(x - 6)$ Case I: $x^{2} - 5x + 5 = 1$ and $x^{2} - 11x + 30 = K$, where K is a non-zero integer. Sum of 2 real root = 5 Case II: $x^{2} - 5x + 5 \neq 0$ and $x^{2} - 11x + 30 = 0$. Sum of 2 real root = 11 Case III: $x^{2} - 5x + 5 = -1$ and $x^{2} - 11x + 30 = 2K$, where K is a non-zero integer. Sum of 2 real root = 5 \therefore sum of all real roots = 5 + 5 + 11 = 21

題 17 Question17 (3 分 3 marks)

(a) 11,111, 111, 111, 114	$(2 \times 13 + 4)$
(b) 20080	$(5+6 \times 2+7+6)$
(c) 999531	$(6 \times 3 + 5 + 5 + 2)$

題 18 Question 18 (4 分 4 marks)

(不適用/NA)

題 19 Question19 (4 分 4 marks)








中學決賽(預備小測)

1 概率 (機會率)

一個事件的概率是一個0至1之間的數值,用以量度這件事情發生可能性。概率的數字越 大,這件事情便越有可能發生。

例1

在一次數學測驗中,志强取得 A 級的機會為 0.2,而取得 B 級的機會為 0.5。 志强取得 B 級的可能性比取得 A 級的可能性大。

1.1 以列出可能結果的方法求概率

某事件的概率 = ^{其中能使這事件發生的結果的數目}。其中所列舉的結果均有同樣可能。

例 2

當投擲一顆骰子時,結果可能是:1、2、3、4、5、6。而這些結果均同樣可能。 六個結果中1、3、5這三個結果使得「擲出奇數」這事件發生,因此:

「擲出奇數」的機會 $=\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (亦可以表示成 50% 機會)

同樣地,「擲出數字大於4」的概率 = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。

問題 (1):

當投擲一顆骰子,得出3的倍數的概率是多少?

例3

有兩叠數子卡,其中一叠有四張卡,卡上分別印有數字2、4、6及10。另一叠有三張卡, 分別印有數字5、7及9。 若從每叠都抽出一張數字卡,共有4×3=12可能結果,所有結果均同樣可能。 事件「抽出的兩數的和大於16」只發生於10+7或10+9這兩種結果之下。

因此,「抽出的兩數的和大於 16」的概率 = $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。

問題 (2):

以例2所述的兩叠數字卡,若從每叠抽出一卡,「兩個抽出數字相加成11」的機會是多少?

1.2 概率的運算

1.2.1

若一件事件會發生的概率是p ,則這事件不會發生的概率是 (1-p)。

例4

「今天會下雨」的機會是 20%。 則,「今天不會下雨」的機會是 = 1 - 20% = 80%。

問題 (3):

「大明會帶雨傘」的概率是 0.3。

「大明不會帶雨傘」的概率是多少?

1.2.2

A 和 B 是兩件獨立事。若事件 A 發生的概率是 p、事件 B 發生的概率是 q, 則 A 和 B 都發生的概率是 $p \times q$ 。

例 5

志强在數學測驗取得 A 級的機會率是 0.9 , 而他在歷史測驗取得 A 級的機會率是 0.7。志强能在兩科都取得 A 級的機會率

 $P(雨科都取得A 級) = 0.9 \times 0.7 = 0.63$

問題(4a):

大明會帶雨傘的概率是 0.3。今天會下雨的機會是 0.8。

今天下雨而大明沒有帶雨傘的概率是多少?

問題(4b):

投擲兩顆骰子時, 擲得兩個6的概率是多少?

2 期望值

例 6

在一個抽獎之中,參加者有機會得到各種不同價值的現金卷。抽得各獎的概率如下:

現金卷價值 (\$)	0	10	50	100
概率	63	25	10	2
	100	100	100	100

\$0、 \$20、 \$50、 \$100 均為可能發生的結果,而它們發生亦有著不同的機會率。 我們可以為這個抽獎獎金計算一個「期望值」:

 $E(抽獎) = \$0 \times \frac{63}{100} + \$10 \times \frac{25}{100} + \$50 \times \frac{10}{100} + \$100 \times \frac{2}{100} = \9.5 我們可以把這個期望值理解為當這抽獎進行很多次後派出獎金的平均值。

問題 (5)

(a) 有一個賭博遊戲,結果可以是輸掉 \$10、贏得 \$1 或贏得 \$100。各結果的概率如下:

回報 (\$)	-10	+1	+100
概率	0.8	0.15	0.05

計算這個賭博遊戲的回報的期望值。

答: 回報期望值

(b) 在一個賭博遊戲中,參加者會拋兩個硬幣。若兩個硬幣都出了「正面」,參加者會贏得\$5,否則會輸掉\$3。這個賭博遊戲的回報的期望值是多少?

3 絶對值

一個數的絕對值定義為

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ wR } x \ge 0 \\ -x & \text{ wR } x < 0 \end{cases}$$

因此

|13| = 13|-83| = 83

Pre-Test of Secondary Final

1 Probability (Chance)

The probability of an event has a value between 0 and 1 (inclusively) to measure the possibility of the event to happen. The bigger the value, the highest the likelihood of the event to happen.

Example 1

In a mathematics test, the probability for Joseph to get A grade is 0.2 and the probability for him to get a B grade is 0.5. Then it is more likely for Joseph getting B grade than getting A grade.

1.1 Finding probability by listing possible outcomes

probability of an event = <u>number of outcomes that make such event to happen</u> <u>number of all possible outcomes</u>

* assuming that all possible outcomes are equal likely to happen

Example 2

When a dice is thrown, possible outcomes are 1, 2, 3, 4, 5 and 6. These outcomes are equally likely to happen. Of the six outcomes, the outcomes $\{1, 3, 5\}$ make the event "get an odd number" to happen. So

Probability of "get an odd number"
$$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

This probability could also be expressed as **0.5** or **50%**. Similarly,

Probability of "get a number >4" =
$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Question (1):

When a dice is thrown, what is the probability of "getting a multiple of 3"?

Example 3

There are two packs of number cards. The first pack has 4 cards with numbers **2**, **4**, **6** and **10** printed on them respectively. The other pack has 3 cards with **5**, **7** and **9** printed on them respectively.

If we draw one card from each pack. There are $4 \times 3 = 12$ possible and equal likely outcomes. The event "the sum of two number drawn is greater than 16" only happens when (10, 7) or (10, 9) are drawn. Thus

Probability that "sum of the two number drawn" =
$$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Question (2):

Using the same packs of cards in example 3. If one card is drawn from each pack, what is the probability that "**the sum of the two numbers drawn is 11**"?

1.2 Arithmetic Computation on probability

1.2.1

If the probability of an event to happen is p, the probability for that event not to happen is (1 - p).

Example 4

The chance for "It will rain today" is 20%, then The chance for "It will not rain today" = 1 - 20% = 80%

Question (3):

The probability for "Amy will bring umbrella" is 0.3.

What is the probability for "Amy will NOT bring umbrella"?

1.2.2

A and B are independent events (*the probability of A to happen will not be affected by whether B happens or not, vice versa*). If the probability of A happen is p and probability of B happen is q, then the probability of A and B both happen is $p \times q$.

Example 5

In a mathematics test, the probability for Joseph to get A grade is 0.9. In history, the probability for him to get a A grade is 0.7. The probability for him to get A grades for both subjects is

P(get A grades for both subjects) = $0.9 \times 0.7 = 0.63$

Question (4a):

The probability for "**Amy will bring umbrella**" is 0.3. The probability for "**It will rain today**" is 0.8.

What is the probability of "Amy will not bring umbrella and it rains"?

Question (4b):

What is the probability of getting 2 "6" if two dices are thrown?

2 Expected Value

Example 6

In a lucky draw, participants have chances to get coupons of different values. The probability for obtaining different coupons are:

Coupon Value (\$)	0	10	50	100
Probability	63	25	10	2
	100	100	100	100

 $0 \cdot 20 \cdot 50 \cdot 100$ are all possible events with different probabilities.

We can compute an "expected value" for this lucky draw.

E(lucky draw) =
$$\$0 \times \frac{63}{100} + \$10 \times \frac{25}{100} + \$50 \times \frac{10}{100} + \$100 \times \frac{2}{100}$$

= $\$9.5$

We can interpret this "expected value" as the average value of coupons obtained after many times of lucky draws.

Question (5):

(a) The returns of a gambling game will be: lose \$10; win \$10 or win \$100. The probability of each event is shown below.

return (\$)	-10	+1	+100
probability	0.8	0.15	0.05

Calculate the expected returns of this game.

Answer:

```
Expected return = -10 \times 0.8 + 1 \times 0.15 + 100 \times 0.05 = -$1.5
```

(b) In a game, participant will toss two coins. If both are heads, \$5 will be awarded. Otherwise, he/she loses \$3. Find the expected return of this game.

Answer:

Expected return
$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)(\$5) + \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)(-\$3) = -\$1$$

3 Absolute Value

The absolute value of a number is definite to be

$$|x| = \begin{cases} x & if \ x \ge 0 \\ -x & if \ x < 0 \end{cases}$$

Therefore,

|13| = 13|-83| = 83

預備小測參考答案

Solution of Pre-test

1 概率 (機會率) Probability (Chance)

1.1 以列出可能結果的方法求概率 Finding probability by listing possible outcomes

問題 (1) Question (1): P(得出 3 的倍數) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ P(getting a multiple of 3) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

問題 (2) Question (2): $P(和是11 \text{ sum} = 11) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ (or 25% or 0.25)

1.2 概率的運算 Arithmetic Computation on probability1.2.1

1.2.2

問題(4a) Question (4a): $P(下雨而大明沒有帶雨傘) = (1 - 0.3) \times 0.8 = 0.56 \text{ (or } 56\%)$ $P(\text{will not bring umbrella and it rains}) = (1 - 0.3) \times 0.8 = 0.56 \text{ (or } 56\%)$ 問題(4b) Question (4b): $P(擲得兩個 \ 6) \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ $P(\text{getting } 2 \text{ "6"}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

問題 (5) Question (5):
(a) 回報期望值 (expected return)

$$= -10 \times 0.8 + 1 \times 0.15 + 100 \times 0.05$$

 $= -\$1.5$
(b) 兩個硬幣都出了「正面」的率概 (Probability of "2 heads")
 $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
賭博遊戲的回報的期望值(Expected return)
 $= \$5 \times \frac{1}{4} + (-\$3) \times (1 - \frac{1}{4}) = -\1

中學決賽題目

隨機漫步

隨機漫步(Random Walk)是一個數學模型,描述一個路徑,該路徑由一些數學 空間(如整數)上的一系列隨機步驟組成。隨機漫步的一個基本例子是一維的隨機漫 步。



假設我們把黑點的初始位置設為0,然後讓它取N步(其中N是任意正整數),而每步 的距離都是一個單位。現在我們想知道黑點在經過N步之後行到那裡。當然,每次重 複步行N步後,黑點的位置都可能會有所不同。我們想知道的是,多次重複「N步的 隨機漫步」,黑點的平均最終位置會在那裡。設 d_N 為黑點行N步後的位置。

 $d_N = a_1 + a_1 + a_3 + \cdots + a_N$

我們把黑點的初始位置設為0,並且利用公平的硬幣作投擲。



如果擲得公,黑點會向右移動一個單位(+1)。如果擲得字,黑點會向左移動一個單位 (-1)。投擲五次後,黑點的最終位置可能是 +1、-1、+3、-3、+5 或 -5上。 例如,經五次投擲後,不論以任何次序得到三次公和兩次字,黑點總會到達 +1 (有 10 種到達方式)。到達 -1 有 10 種方式 (通過投擲得兩次公和三次字),到達 +3 有5種方式 (通過投擲得四次公和一次字),到達 -3 有 5種方式 (通過投擲得一次 公和四次字),1種到達5的方式 (通過投擲得五次公),和1種到達-5的方式 (通過 投擲得五次字)。請參閱下圖以了解5次投擲的可能結果。(附件一為放大圖)





字母	А	В	С	D
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

這粒骰仔能否用在上文所述「一維的隨機漫步的模擬」上?請解釋原因。

b. 對於一維的隨機漫步,完成下面的表格中給出在5步之後的位置的概率。

		黑點的最後位置									
步	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$	0	$\frac{2}{4}$	0	$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$	0	$\frac{4}{16}$	0	6 16	0	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	
5											

c. 巴斯卡三角形(Pascal triangle)是一種以三角形的方式來排列數字,觀察下表的巴斯卡三角形的規律並完成第5行。



d. (i) 計算一維隨機漫步行走5步後位置的期望值E(d₅)。

(ii) 計算一維隨機漫步行走N步後位置的期望值 $E(d_N)$ 。(N是正整數)

e. (i) 計算一維隨機漫步行走5步後位置 d_5 的絕對值 $|d_5|$ 的期望值 $E(|d_5|)$ 。

(ii) 計算一維隨機漫步行走 5 步後位置
$$d$$
 的平方期望值 $E(d_5^2)$,然後再計平方 $k \sqrt{E(d_5^2)}$ 。技術上這稱為方均根值(Root Mean Square Value) 。

(iii) 如果我們想計算 N步隨機漫步後與初始位置的平均距離,應該採用哪個 計算 $E(d_N), E(|d_N|), \sqrt{E(d_N^2)}$?試解釋你的原因。

f. 小明說根據(d)(ii)的結果,隨機漫步進行了N步,即使N很大,黑點和初始位置0的距離都是很小的。小明的說法是否合理?

g. 猜想或估算
$$\sqrt{E(d_N^2)}$$
,其中 N 是正整數。

h. 考慮二維的隨機漫步,每一步都有同等概率向上,向下,向左,向右移動。 即:

移動方向	\uparrow	\rightarrow	\leftarrow	\rightarrow
概率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

每一隊的同學都會獲分發一套 11 顆骰子。

- (i) 試用這11 顆骰子設計一個模擬二維隨機漫步的實驗。
- (ii) 用你們設計的方法,模擬五輪每輪 20 步的二維隨機漫步。用你認為合適的方法記錄模擬的結果。

i. 利用一維的隨機漫步的距離的方均根值(Root Mean Square Value) $\sqrt{E(d_N^2)}$ 結果,求二維的隨機漫步的距離的方均根值。





**H代表公,T代表字

Question paper of Secondary Final

Random walk

Random Walk is a mathematical model that describes a path that consists of a series of random steps on a mathematical space (such as integer). A basic example of a random walk is a one-dimensional random walk.



Suppose initially we set the black dot to 0, then let it take N steps (where N is any number), and the distance for each step is a unit. Now we want to know the location of the black dot after N walks. Of course, the location of the black dot after each repetition of N steps may be different. If the "N-step random walk" are repeated many times, we want to know the average final location of the black dot. Let d_N be the location of the black dot after N steps.

$$d_N = a_1 + a_1 + a_3 + \cdots + a_N$$

Suppose the initial location of the black dot is set to zero and a fair coin is used for tossing.



If a head is tossed, the black dot moves one unit to the right (+1). If a tail is tossed, the black dot moves one unit to the left (-1). After tossing the fair coin for five times, the black dot can land on +1, -1, +3, -3, +5 or -5. For example, if 3 heads and 2 tails are obtained after 5 tosses, the dot will land on +1 independent of the order of the heads and tails (There are 10 different ways). There are 10 ways for the dot to land on -1 (by tossing 3 tails and 2 heads), and 5 ways to land on +3 (by tossing 4 heads and 1 tail), 5 ways to land on -3 (by tossing 4 tails and 1 head), 1 way to land on +5 (by tossing 5 heads), and 1 way to land on -5 (by tossing five tails). See the figure below for the possible results of 5 tosses. (Appendix 1 is an enlarged figure)



(a) Suppose there is a biased four-sided dice. The probability that A, B, C, or D come up is as follows:



Alphabet	А	В	С	D
Probability	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Can this dice be used in the "one-dimensional random walk simulation" mentioned above? Please Explain.

		Final location of dot									
Step	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$	0	$\frac{2}{4}$	0	$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$	0	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{6}{16}$	0	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	
5											

(b) For one-dimensional random walk, complete the probability for different locations of the black dot after 5 steps.

(c) The "Pascal's triangle" is a triangular arrangement of numbers. Observe the following pattern of the Pascal's triangle and complete the line 5.

Line 0						1					
Line 1					1		1				
Line 2				1		2		1			
Line 3			1		3		3		1		
Line 4		1		4		6		4		1	
Line 5	1										1

(d) (i) Calculate the expected value $E(d_5)$ of the location of the black dot after walking 5 steps in a one-dimensional random walk.

(ii) Calculate the expected value $E(d_N)$ of the location of the black dot after N steps in one-dimensional random walk. (N is a positive integer)

(e) (i) Calculate the expected value of the absolute value of the location of the black dot $|d_5|$ after 5 steps of random walk, $E(|d_5|)$.

(ii) Calculate the expected value of the square of the location of the black dot d_5^2 after 5 steps of random walk, $E(d_5^2)$. And then calculate the square root of the expected value of the square of the location of the black dot, $\sqrt{E(d_5^2)}$. This is technically called the Root Mean Square Value.

(iii) If we want to calculate the average distance of the black dot from the original location after an *N* steps random walk, which one should be calculated $E(d_N)$,

$$E(|d_N|), \sqrt{E(d_N^2)}$$
? Explain your answer.

(f) Danny said that according to the results of (d)(ii), even N is large, after N steps of random walk, the distance between the black dot and the origin 0 is still very small. Is Danny's argument reasonable?

(g) Guess or estimate $\sqrt{E(d_N^2)}$, where *N* is a positive integer.

(h) Consider a two-dimensional random walk, each step with equal probability of going up, down, left, and right. That is:

Moving	\uparrow	\rightarrow	\leftarrow	\rightarrow
direction				
probability	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Each team will be provided with a set of 11 dices.

- (i) Design an experiment to simulate the two-dimensional random walk by using the dices.
- (ii) Simulate 5 rounds of a two-dimensional random walk with each round having 20 steps. Record the results in a way you think is appropriate.

(i) Find the Root Mean Square Value of a two-dimensional random walk using the result of the Root Mean Square Value $\sqrt{E(d_N^2)}$ of the one-dimensional random walk.

Appendix 1



中學決賽參考答案

Suggested Solution of Secondary Final

隨機漫步 Random walk

1. (a) 能夠 Yes

[1]

當所得的結果是 A 或 C 時,定義漫步 = +1,其他情況取漫步 = -1。 Define the step = +1 when getting A or C, otherwise take the step = -1

字母	Α	С	A 或/or C
/Alphabet			
概率	1	1	1
/Probability	6	3	2

字母	字母/	В	D	B 或/or D
/Alphabet				
概率	概率/	1	1	1
/Probability		6	3	2

1	1	1
1	h	۱
L	υ	,

(0)		1				1		1	1		
步	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
/Step											
0						1					
1					$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$	0	$\frac{2}{4}$	0	$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$	0	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{6}{16}$	0	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$	0	5 32	0	$\frac{10}{32}$	0	$\frac{10}{32}$	0	5 32	0	$\frac{1}{32}$

[1]

[1]

[2]

(c)

Line 0						1					
Line 1					1		1				
Line 2				1		2		1			
Line 3			1		3		3		1		
Line 4		1		4		6		4		1	
Line 5	1		5		10		10		5		1

[2]
(d) (i) 運用對稱性質 By symmetry,
$$E(d_5) = 0$$

 \overrightarrow{a}/Or
 $E(d_5) = (-5)\left(\frac{1}{32}\right) + (-4)(0) + (-3)\left(\frac{5}{32}\right) + (-2)(0) + (-1)\left(\frac{10}{32}\right) + 0 \times 0 + (1)\left(\frac{10}{32}\right)$
 $+ (2)(0) + (3)\left(\frac{5}{32}\right) + (4)(0) + (5)\left(\frac{1}{32}\right) = 0$
[2]

(ii)
$$E(d_N) = (-N)P_N(-N) + (-N+1)P_N(-N+1) + \dots + (N-1)P_N(N-1) + NP_N(N)$$

= 0 (: $P_N(-N) = P_N(N), P_N(-N+1) = P_N(N-1), \dots$

(e) (i)
$$E(|\mathbf{d}_5|) = 2 \times \left(0 \times 0 + 1 \times \frac{10}{32} + 2 \times 0 + 3 \times \frac{3}{32} + 4 \times 0 + 5 \times \frac{1}{32}\right) = 1\frac{7}{8}$$
 [2]

(ii)
$$E\left(d_{5}^{2}\right) = (-5)^{2} \times \frac{1}{32} + (-4)^{2} \times 0 + (-3)^{2} \times \frac{5}{32} + (-2)^{2} \times 0 + (-1)^{2} \times \frac{10}{32} + 0 + 1^{2} \times \frac{10}{32} + 2^{2} \times 0 + 3^{2} \times \frac{5}{32} + 4^{2} \times 0 + 5^{2} \times \frac{1}{32} = 5$$
[2]

$$\therefore \sqrt{E\left(d_5^{2}\right)} = \sqrt{5}$$
[1]

(iii) 應採用 *E*(|*d_N*|)。

不論隨機漫步者在初始位置的左或右方,我們應利用距離的絕對值來計算與初始位 置的平均距離。

 $E(|d_N|).$

The average distance from the origin is calculated by absolute values of the distance, no matter the random walker is on the left or right from the origin. [2]

(f) 不合理! 距離的量度只有正值,而在(d)(ii)中的 dv 可以是負數值。
 No! The measure of distance is a positive values, but the d_N in (d)(ii) can take the negative value.

(g) 運用(b)和(c),我們能觀察或證明到:By using (b) and (c), it can be shown or observed that:

$$E\left(d_{N}^{2}\right) = \sum x^{2} P_{N}(x) = N$$
[3]

$$\therefore \sqrt{E\left(d_{\rm N}^{2}\right)} = \sqrt{N}$$

[1]

(h)	適當地運用骰子為隨機漫步產生一個隨機數。	[1]
	(優化設計)	[1]
	合適的二維隨機漫步摸擬過程	[1]
	把隨機漫步的結果有條理的紀錄下來。	[2]
	(紀錄方法)	

Appropriate use of dices to generate random number for the random walk.	[1]
(Optimize the usage?)	[1]
Appropriate assignment of the random walker's move.	[1]
Good record of random walk result showed.	[2]
(How?)	

(i) : x-軸 和 y-軸是獨立的,一維的隨機漫步的結果可以分別套用到兩個方向上。

由畢氏定理得,
$$\sqrt{E\left(d_{N}^{2}\right)} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{N}{2}}\right)^{2} + \left(\sqrt{\frac{N}{2}}\right)^{2}} = \sqrt{\frac{N}{2} + \frac{N}{2}} = \sqrt{N}$$

[3]
 ∴ x-direction and y-direction are independent, the one-dimensional result can be applied independently.
 [1] By Pythagoras theorem,

$$\sqrt{E\left(d_{N}^{2}\right)} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{N}{2}}\right)^{2} + \left(\sqrt{\frac{N}{2}}\right)^{2}} = \sqrt{\frac{N}{2} + \frac{N}{2}} = \sqrt{N}$$
[3]

第十三屆香港小學數學創意解難比賽

決賽得獎名單

獎項	學校名稱	得獎學生	指導教師
冠軍	聖公會青衣主恩小學	姚縉熹 黃祖軒 陳 鋒 黃朗曦	徐麗珍老師
亞軍	南山第二實驗學校	陳今恒 楊景超 周相良 陳東岳	 黃 瑾老師 甘亞娟老師 吳永峰老師 黎 源老師
季軍	馬頭涌官立小學	許博丞 楊栢賢 陳皓鈞 徐子豐	黄健英老師
殿軍	拔萃男書院附屬小學	黄嘉扬 高健豐 陳柏熹 陳耀生	吳洛賦老師
	民生書院小學	施卓好 余彦廷 傅明翰 蔣鎮遠	曾健勳老師
優 異獎 [#]	香港浸會大學附屬學校 王錦輝中小學	黄竣壕 廖天逸 廖鐵男 朱世成	許婷婷老師
	聖若瑟小學	謝 朗 蔡順澤 陳彦諾 陳頌文	曾詠鈴老師
排名不分先行	珠海容閎小學	鄧熙健 張煜林 康貝博 劉浩雲	樂 雲老師 王 綠老師

排名不分先後

初賽金獎得獎名單

(排名依學校編號序)

學校名稱	得獎學生	指導教師
聖公會青衣主恩小學	姚縉熹 黃祖軒 陳 鋒 黃朗曦	徐麗珍老師
港大同學會小學	方胤淇 余 斐 黎駿謙 謝逸熙	宋寶華老師
香港培正小學	楊栢喬 范皓僑 鄭羽辛 陳紹亨	梁穎炘老師
馬頭涌官立小學	許博丞 楊栢賢 陳皓鈞 徐子豐	黄健英老師
民生書院小學	施卓好 余彦廷 傅明翰 蔣鎮遠	曾健勳老師
天主教石鐘山紀念小學	徐苑晴 劉浩浚 麥哲倫 劉宜佳	謝曉紅老師
拔萃男書院附屬小學	黄嘉扬 高健豐 陳柏熹 陳耀生	吳洛賦老師
香港浸會大學附屬學校 王錦輝中小學	黄竣壕 廖天逸 廖鐵男 朱世成	許婷婷老師
香港九龍塘基督教中華宣道會 台山陳元喜小學	連偉恆 麥家源 羅翊誠 李珀熙	嚴家豪老師
路德會聖馬太學校(秀茂坪)	梁創傑 李傑銨 王皓玥 劉泓希	羅永雄老師
聖保羅男女中學附屬小學	林至鋒 李柏澄 鄭亦均 麥一研	鄧慧姗老師
九龍灣聖若翰天主教小學	余瑋深 蔡佩峰 黃立戩 關振慶	姜婉雯老師
保良局錦泰小學	蔡鈞浩 倪銘希 鄭宇軒 李若谷	劉智樑老師
聖若瑟小學	謝 朗 蔡順澤 陳彦諾 陳頌文	曾詠鈴老師

初賽銀獎得獎名單

(排名依學校編號序)

學校名稱	得獎學生	指導教師
博愛醫院歷屆總理聯誼會 鄭任安夫人學校	呂睿杰 鄭羽軒 陳晞哲 羅捷軒	張希文老師
順德聯誼總會伍冕端小學	曹君諾 麥兆奇 劉逸康 黃景南	梁美琪老師
滬江小學	陳樂謙 張梓鍵 李再豪 李潁綸	區瑋峰老師
英皇書院同學會小學第二校	區洛瑤 鄭珈洳 譚梓聰 王維軒	許文星老師
聖公會田灣始南小學	翁嘉欣 李宇陽 羅鎧迪	梁依靈老師
軒尼詩道官立小學(銅鑼灣)	黄捷珉 蔡振宇 黄永信 麥賀喬	李秀芬老師
將軍澳官立小學	楊勰馨 郭偉嵐 楊德聖 鄧泳桐	楊麗英老師
救世軍中原慈善基金學校	容弘燁 施子鑫 吳靖晞 羅竣謙	連詠斯老師
高主教書院小學部	伍家晞 黄一鳴 黄靖然 麥濬哲	胡祖威老師
弘立書院	陳祉諭 章鼎承 鄭泓真 張之棟	王淑華老師
聖公會德田李兆強小學	洪梓鈞 吴禮匡 黃顯龍 王梓昊	吳嘉雯老師 吳穎芝老師
保良局何壽南小學	伍卓文 黃其樂 謝裕天 高雪澄	袁綺華老師
嗇色園主辦可立小學	陳愷軒 蔡政羲 吳梓軒 王樂榮	陳曉華老師

初賽銀獎得獎名單

(排名依學校編號序)

學校名稱	得獎學生	指導教師
南元朗官立小學	何欣桐 邵天朗 龔嘉灝 Ken Tsuji	劉健煌老師
博愛醫院歷屆總理聯誼會 梁省德學校	羅啟豪 劉天藍 梁靖欣 程韻僑	岺俊傑老師
青松侯寶垣小學	劉潤泰 王俊揚 溫嘉明 陸灝軒	柯麗娜老師 梁惠娟老師 劉珈瑗老師
香港培道小學	黄子浩 蔣熙林 尹信懿 盧衍妤	譚樂銘老師
天水圍天主教小學	何諾賢 陳智滔 雷俊軒 曾樂兒	麥家傑老師
香港中國婦女會丘佐榮學校	黄家軒 蔡銘軒 雷樂祺 楊善然	馮杓楠老師

初賽銅獎得獎名單

(排名依學校編號序)

學校名稱	得獎學生	指導教師
大角咀天主教小學 (海帆道)	黎浩油 王佩恩 梅洛彰 郭獻聰	陸嘉明老師
軒尼詩道官立小學	袁怡臻 施傑銳 黃證諺 姚彦同	陳茗茵老師
佐敦谷聖若瑟天主教小學	朱健豪 譚軼禧 區芷菁 溫晟揚	勞鳳萍老師
仁愛堂田家炳小學	郭廷軒 張彧端 馮敬愉 駱俊然	鄧建彬老師
上水惠州公立學校	梁穎濤 劉灝軒 顧振雄	何子傑老師
德信學校	劉鑑堯 高润彤 駱俊熙	梁兆倫老師
石湖墟公立學校	戚其樂 夏鈿雨 郭以誠 歐陽瑞嬉	李家駿老師
李陞小學	馮正彦 宋家豪 李銘睿 李業翔	黄慧娟老師
培基小學	鄒仁龍 石天行 蔡義滔 黃 溥	李敏儀老師
中華基督教會灣仔堂 基道小學(九龍城)	施榮圳 黎宇恒 張昌慧 周晉全	劉慧樑老師
油蔴地天主教小學 (海泓道)	李梓培 劉希恩 林文禧 沈欣曈	董美寶老師
觀塘官立小學 (秀明道)	程俊琛 李沛毅 蔡黎萌 周俊傑	譚燁老師
馬頭涌官立小學(紅磡灣)	李雙而 羅裕銘 柯鈞昊 鄧緯峰	崔月英老師

初賽銅獎得獎名單

(排名依學校編號序)

學校名稱	得獎學生	指導教師
保良局王賜豪 (田心谷)小學	李卓朗 侯偉鐵 李卓能 黃汶綺	朱麗燕老師
柴灣角天主教小學	林昊波 杜奕暉 倪卓裔 林樂聰	黄英老師
東莞同鄉會方樹泉學校	伍璟昇 陳子和 劉 昊 黃文治	陳志榮老師
東華三院王余家潔紀念小學	陳嘉禮 黃綺妮 林海晴 呂樂兒	黄鳳屏老師
嘉諾撒小學	李昊鋁 周永松 黄梓健 姜怡杰	岑詩燕老師
聖公會仁立紀念小學	袁文偉 紀卓楠 趙博文 白懿琛	李子豐老師
天神嘉諾撒學校	陳愈忻 梁頌雯 王靖悠 卓曉萳	吴銀英老師
聖嘉勒小學	鍾琬揚 林千喜 李思穎 廖 瑞	蘇潔怡老師
中華基督教會 基法小學(油塘)	李子健 張永約 張泉培 李俊樺	馬錦莉老師
保良局蕭漢森小學	鄭曉洋 周樂熙 吳芷攸 蘇鉦皓	范杏珍老師
聖文德天主教小學	何榮華 丁杰林 黎迪生 曾浩霖	梁寶珠老師

第九屆香港中學數學創意解難比賽

決賽得獎名單

獎項	學校名稱	得獎學生	指導老師
冠軍	英華書院	游証恩 林在恩 鍾曜謙 黃焌揚	李慶偉老師
亞軍	聖保羅男女中學	朱卓熹 曾學泓 吳施凡 陳 軍	陳沛儀老師
季軍	高主教書院	李澤恩 羅展鋒 鄭逸朗 王樂斌	尤紹恆老師
殿軍	何明華會督銀禧中學	陳樂軒 李景泓 鄭宇琛 馬曉迎	卓大偉老師
優異獎 [#] # 排名不分	香港管理專業協會李國寶中學	陳珈勤 謝沛昇 李彦樂 陳煜航	盧偉樂老師
	保良局百周年李兆忠紀念中學	石銳康 何恆智 羅翊朗 張雅詩	曹錠邦老師 何家強老師
	聖保羅書院	周頌恩 張善濤 麥晉霖 鄺烜鋒	李 興老師
	聖言中學	莊柏熙 梁鈞皓 江逸嵐 鄺文峰	鍾達智老師

排名不分先後

初賽金獎得獎名單

(排名依學校編號序)

學校名稱	得獎同學	指導老師
英華書院	游証恩 林在恩 鍾曜謙 黃焌揚	李慶偉老師
高主教書院	李澤恩 羅展鋒 鄭逸朗 王樂斌	尤紹恆老師
聖保羅男女中學	朱卓熹 曾學泓 吳施凡 陳 軍	陳沛儀老師
香港管理專業協會李國寶中學	陳珈勤 謝沛昇 李彦樂 陳煜航	盧偉樂老師
保良局百周年李兆忠紀念中學	石銳康 何恆智 羅翊朗 張雅詩	曹錠邦老師 何家強老師
何明華會督銀禧中學	陳樂軒 李景泓 鄭宇琛 馬曉迎	卓大偉老師
聖保羅書院	周頌恩 張善濤	李興老師
聖言中學	莊柏熙 梁鈞皓 江逸嵐 鄺文峰	鍾達智老師

初賽銀獎得獎名單

(排名依學校編號序)

學校名	得獎同學	指導老師
沙田循道衛理中學	馮鈺秀 郭浩仁 林致遠 王耀坤	李凱恩老師
保良局羅傑承(一九八三)中學	徐子祐 邵紀瑋 吳嘉榮 吳煒霖	馮紹民老師
港大同學會書院	何樂謙 李昊軒 方啟俊 關政洋	蔡浩堃老師
拔萃女書院	黎芯儀 陳芷晴 張嘉欣 吳禧汶	楊寶琪老師
協恩中學	張善明 羅曼淘 伍芷晴 黃 瑜	袁澤曦老師
保良局何蔭棠中學	鄭子銓 鄧寶明 陳浚浠 陳昶誠	胡家揚老師
迦密主恩中學	魏偉琳 廖家鉉 歐陽頌旻 洪熙捷	陳震河老師
順德聯誼總會翁祐中學	莫圳錄 卞經皓 郭晉熙 黃志雄	吴栢茵老師
香港中國婦女會中學	謝耀霆 黃逸軒 湯振華 周俊毅	張宇鵬老師
順德聯誼總會李兆基中學	劉寧雙 麥皓進 唐宇堃 麥佳文	許俊江老師
聖公會曾肇添中學	韋智剛 黃智豪 莫晉曦 黃展峰	石霆老師
香港培正中學	高兆廷 吴哲朗 蘇羽年	黄偉豪老師
保良局第一張永慶中學	陳潤勳 劉凱光	馮碧珊老師
初賽銅獎得獎名單

(排名依學校編號序)

學校名稱	得獎同學	指導老師
長沙灣天主教英文中學	繆其庭 秦學嘉 施柏懃 孫晞宙	丘學熹老師
聖士提反女子中學	李宜燕 鄧詠文 許一言 蘇頌恩	江麗卿老師
香港真光中學	林茵然 盧泳蓓 何少筠 林愷翹	張慧珊老師
仁愛堂田家炳中學	周洧鋆 張志明 黄天樂 陳天濠	林麗雯老師
路德會呂祥光中學	黄浩然 趙國安 譚安迪 林梓峰	劉紹琪老師
香港華人基督教聯會 真道書院	容天樂 林詠熙 洗俊浩	李家曦老師
荃灣公立何傳耀紀念中學	陳柏言 何金隆 翁榮俊	李仲栭老師
保良局馬錦明中學	孫振傑 陳浩彦 葉子霆	梁文俊老師
迦密愛禮信中學	鄧善牧 吳卓希 劉錦浩	黄耀明老師
聖馬可中學	洪高源 張梓軒 李愷卓 區卓謙	鄧季榮老師
中華傳道會李賢堯紀念中學	楊煌彬 葉儆桁 丁嘉宜 吳煒鴻	伍百勤老師 陳美霞老師
景嶺書院	吴俊毅 巫家豪 蔡濂陶 譚建堃	屈啓賢老師
明愛元朗陳震夏中學	溫心怡 余婷婷 陳瑩瑩 余俊煜	陳可芹老師
東華三院陳兆民中學	林睿舜 王泓奕 鄭弘熙 黃熹朗	袁翠霞老師
田家炳中學	葉倬搴 陳偉廉 陳慧琪	李偉成老師
港島民生書院	馮偉恆 葉晉廷 吳仲賢 龔思安	潘嘉亮老師

第十三屆香港小學數學創意解難比賽 及 第九屆香港中學數學創意解難比賽

榮譽顧問及委員會

榮譽顧問

杨耀忠太平绅士	香港教育工作者聯會名譽會長
吳鳳嫻女士	香港教育局資優教育組總課程發展主任
劉明基校監	香港幼兒教育及服務聯會永遠名譽會長

榮譽數學顧問

韓耀宗教授 香港城市大學數學系

比賽及評審委員會	(排名以姓名筆劃序)
宋寶華老師	港大同學會小學
金偉明校長	香港聖公會何明華會督中學
徐崑玉老師	香港四邑商工總會黃棣珊紀念中學
梁麗萍老師	沙田循道衛理小學
陳威儀老師	佛教榮茵學校
陳偉倫老師	香海正覺蓮社佛教正覺中學
陳國君老師	聖公會白約翰會督中學
彭仁傑老師	真光女書院
曾建勳老師	民生書院小學
黄匡瑩老師	聖公會聖紀文小學
黄家樂先生	香港大學教育學院
趙嘉俊老師	浸信會沙田圍呂明才小學
劉健豐老師	中華基督教會基智中學
蔡勁航老師	伊利沙伯中學舊生會中學
鄭永健博士	香港大學教育學院
盧偉樂博士	香港專業管理協會李國寶中學
鍾廷楷老師	聖公會白約翰會督中學
關子雋老師	香港聖公會何明華會督中學

執委會

常任主席	杜家慶校長	香港教育工作者聯會副主席
常任副主席	劉明基校監	香港幼兒教育及服務聯會永遠名譽會長
常任委員	譚志良先生	教育局資優教育組課程發展主任

比賽花絮

小學初賽花絮(筆試)









中學初賽花絮(筆試)

1/20



中學決賽花絮(數學解難實驗)





頒獎典禮花絮







「第十三屆香港小學」及「第九屆香港中學」 數學創意解難比賽資料匯編

出版:教育局

日期: 2019年3月