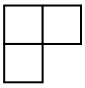
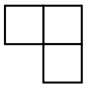
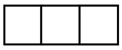
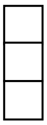
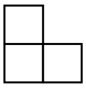
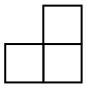
<u>2012 香港小學數學創意解難比賽(初賽 – 題解)</u>

1.	分割出較小一塊的形狀和方法			5 種方法		5 種方法
		6 種方法				
		2 種方法		5 種方法		5 種方法
	共有方法： $6 + 2 + 4\times5 = \underline{\underline{28}}$					

2.

a. 7:38a.m. 至 7:55 a.m.: 兩人所跑距離的和是緩跑徑全程。
故兩人用 17 分鐘可合共跑完全程。
第二次和第三次相遇之間，兩人也是合共跑完全程。

第三次相遇時間為 7:55 a.m. 後 17 分鐘，即 <u>8:12a.m.</u>

b. 7:30a.m. – 7:38a.m.: 兩人所跑距離的和是 2.4 km。
8 分鐘，兩人所跑距離的和是 2.4 km。
17 分鐘，兩人合共跑完一圈，即 $2.4\text{ km} \times \frac{17}{8} = \underline{\underline{5.1\text{ km}}}$

3.

考慮同分母的分數相加，

例如：$\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}+\frac{6}{9}+\frac{7}{9}+\frac{8}{9}$

可見對稱首尾項相加為 1：故得 $4\times1 = 4$

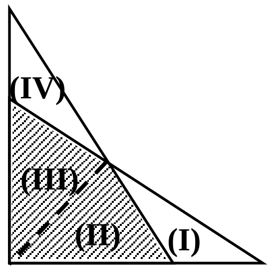
又例如: $\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}+\frac{5}{10}+\frac{6}{10}+\frac{7}{10}+\frac{8}{10}+\frac{9}{10}$

可見首尾項相加為 1，再加上中間一項：故得 $4\times1+\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

故得結果為 $\frac{1}{2}+1+1\frac{1}{2}+2+2\frac{1}{2}+3+3\frac{1}{3}+\cdots+9+9\frac{1}{2}$

$= 2\times(1+2+3+\cdots+9)+10\times\frac{1}{2}$

$= \underline{\underline{95}}$

4.	將圖(2) 如下圖中分割成四個三角形:  考慮三角形 (I) 和三角形(II)有相同高， 它們的底分別為 4 cm 和 2 cm， 因此三角形(II)的面積是三角形(I) 的面積的兩倍。 考慮對稱，可得三角形(II)和三角形(III)的面積相等。 重疊部分面積 $= \Delta ABC$ 面積 $\times \dfrac{4}{5}$ $= \dfrac{6\times 4}{2}\times\dfrac{4}{5}$ $= \underline{\underline{9.6}}\ \text{cm}^2$
5.	考慮 $2013 \times 0.30 = 603.9$, $2013 \times 0.31 = 624.03$ 得 $\dfrac{604}{2013} = 0.3000496....$, $\dfrac{624}{2013} = 0.309985…$ 又 $\dfrac{625}{2013} = 0.3104818…$ 分子可以是 604, 605, 606, …, 624 中任何一個。 ∴共有 $\underline{\underline{21}}$ 個可能的數值。
6.	考慮個位: 「D」+「C」+「C」的個位數和「D」一樣。 →「 C」只可以是 0 或 5。 考慮百位:「B」+「D」連同進位後的個位數和「B」一樣。 →「 D」只可以是 9 或 8 。 考慮千位數: 「A」比「B」大 1。 若假設「C」是 5。則計算十位數時的算式為 (I): 「B」+「D」+「B」+ 1 = 5 即 「B」+「D」+「B」= 4 捨去！因「D」必須為 8 或 9 (II): 「B」+「D」+「B」+ 1 = 15 即 「B」+「D」+「B」= 14 「D」只可能是偶數(即 8), 但十位數相加為 14 不足以令百位進 2，捨去！ (III): 「B」+「D」+「B」+ 1 = 25 即 「B」+「D」+「B」= 24 「D」只可能是偶數(即 8), 則「B」= 8 。 捨去！ 因此，「C」不能是 5，只可以是 0。計算十位數時的算式為， 「B」+「D」+「B」= 0（捨去！） 或 「B」+「D」+「B」= 10 「D」只可能是偶數(即 8), 但十位數相加為 10 不足以令百位進 2，捨去！ 或 「B」+「D」+「B」= 20

得「D」= 8,「B」= 6。
而「A」= 6 + 1 = 7。

∴ A 代表 7， B 代表 6, C 代表 0，D 代表 8。

7. a. 各數字所用火柴數目如下：

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	2	5	5	4	5	6	3	7	6

要拼出一個最大的四位數，優先考慮拼出 9***, 99** 等。
17 = 6 + 6 + 3 + 2， 可拼最大數字為 9971。

b. 若要分數與 1 的相差最小，有以下兩個考慮：
(1) 分子分母盡量接近，
(2) 分子分母越大越好，例如：$\frac{98}{99}$ 。
但餘下 15 根火柴枝，只能得分子分母的十位數為 7。
分子可用火柴枝數目 15 – 3 – 3 = 9，兩個最接近又最大的數為 6, 7。
因此分子是 76, 分母是 77。分數為 $\frac{76}{77}$ 。

8. 觀察每一列的最後一個數如次為：1, 4, 9, 16, 25, … 均為平方數。

最接近 2013 的平均數為 $44^2 = 1936$, $45^2 = 2025$
$2013 = 44^2 + 77$
44^2 為第 44 列的最後一個數，

因此它該位於第 45 列、第 77 行。

9. a. 由於要盡量小用盒子，故優先用 15 粒裝。
(2013 ÷ 15 ≈ 134.2)

2013 = 15 × 134 + 3
2013 = 15 × 133 + 18 = 15 × 133 + 9 × 2
可包裝成 133 個 15 粒裝和 2 個 9 粒裝。
至小用盒 133 + 2 = 135 個

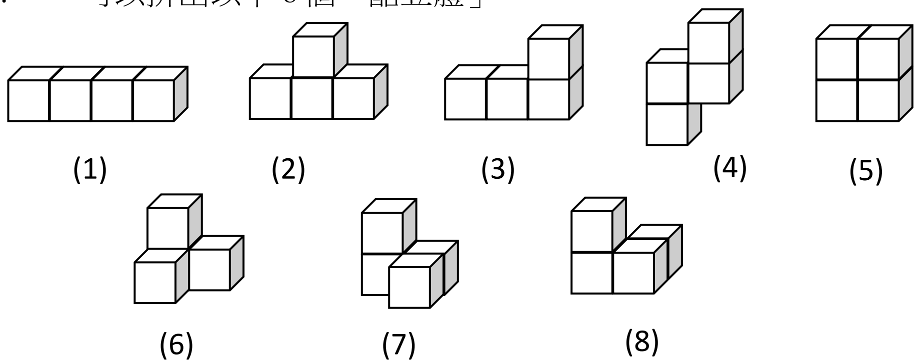
b. 考慮 15 和 9 的最小公倍數 45 = 15 × 3 = 9 × 5

$15 \times \underline{133} + 9 \times 2 = 15 \times \underline{130} + 9 \times 7 = 15 \times \underline{127} + 9 \times 12 = \ldots\ldots = 15 \times \underline{1} + 9 \times 222$

由 133, 130, 127, …, 1 共有 45 個數，因此有 45 種包裝方法。

10.

a.　可以拼出以下 8 個「酷立體」:



∴「酷立體」共有 <u>8</u> 種不同的形狀。

b.　未作拼合前，四塊積木的總表面面積為 $4\times6 = 24\ cm^2$。
每次將兩塊積木拼合，總表表面面積至少減少 $2\ cm^2$，作三次拼合則至少減去 $3 \times 2\ cm^2$ ，即總表面面積 $= 24 - 3\times2 = 18\ cm^2$。
除了 (5)號外皆屬此情況。

而(5)號的總表面面積是 $16\ cm^2$。其他的形狀的總表面面積均為 $18\ cm^2$。

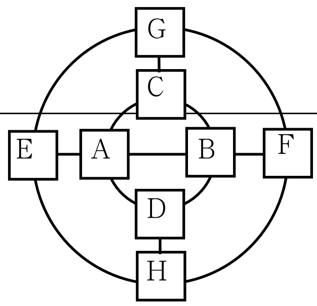
∴總表面面積最大為 <u>$18\ cm^2$</u>而最小為 <u>$16\ cm^2$</u>。

11.

N	可以與 N 相連的數
0	2, 3, 5, 7
1	2, 4, 6
2	0, 1, 3, 5
3	0, 2, 4
4	1, 3, 7
5	0, 2, 6
6	1, 5, 7
7	0, 4, 6

7+6=13,
13 以內的質數有：

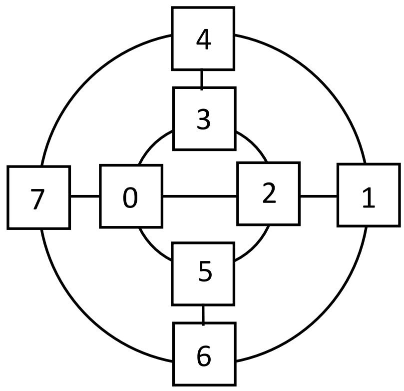
2, 3, 5, 7, 11, 13



其中只有 0, 2 可與四數相連, 而 0 和 2 是相連的。
方格 A, B 位為 0, 2。
與 0 和 2 都可以相連的數只有 3, 5。
方格 C, D 為 3, 5。

與 0 相連的 7，與 2 相連的 1 分別填入方格 E, F。
最後, 將 4, 6 填入餘下的方格 G, H 。

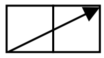
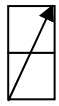
[圖中為其中一解,
將圖表上下或左右作反射可得其他可行的解。]



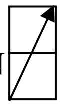
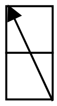
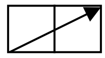
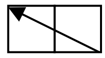
12.	a. 決賽局數共有: $(5 \times 4) \div 2 = 10$ 局 每局(無論是否可分勝負)參與的兩位棋手共得 4 分。 決賽局進行後 5 位棋手得分的總和為 $10 \times 4 = 40$ 分。 $\therefore$ B 的得分 + C 的得分= $40 - 12 - 7 - 4 = 17$ 分 而兩人得分均高於 7 分，故 B 得 $\underline{\underline{9}}$ 分 (而 C 得 8 分) b. A 的得分 $= 12 = 3 + 3 + 3 + 3$ 四局全勝 E 的得分 $= 4 = 1 + 1 + 1 + 1$ 四局全負 $\therefore B, C, D$ 各人必有至少一勝一負 B 對 A、C、E 分別為 負、勝、勝，故得 B 與 D 和局。 B 的得分 $= 9 = 1 + 3 + \underline{2} + 3$ C 對 A、B、E 分別為 負、負、勝。 C 的得分 $= 8 = 1 + 1 + \underline{3} + 3$，故 C 勝 D。 D 的得分 $= 7 = 1 + 2 + 1 + 3$ D 對 A、B、C、E 分別為 負、和、負、勝。 因此只有 $\underline{\underline{1}}$ 個和局，在 $\underline{\underline{B \text{ 和 } D}}$ 對賽局。

13

a. 首先考慮 *A* 點至 *B* 點：

因為要步數盡量少，優先考慮向上和向右的日字步：X  和 M 

由 *A* 點至 *B* 點，共需向右 10 單位，向上 8 單位。
共需走 4 個 X 步和 2 個 M 步，即至小 6 步。

再考慮 *B* 點至 *C* 點：(向上 6 單位)
因為要步數盡量少，優先考慮向上日字步： M, N   和 X, Y  

M, N, X, Y 各用一個上行 6 單位，此為最少步法，需用 4 步。

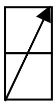
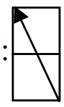
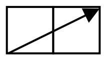
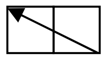
6 + 4 = 10

由 *A* 經 *B* 到 *C*，至少要走 10 步。

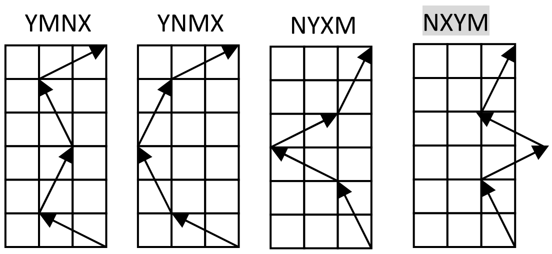
b. 先將由 *A* 至 *B* 的 XXXXMM 這 6 個步重新排序：

MM 相連有 5 種：MMXXXX, XMMXXX, XXMMXX, XXXMMX, XXXXMM
MM 以一個 X 分開有 4 種：MXMXXX, XMXMXX, XXMXMX, XXXMXM
MM 以兩個 X 分開有 3 種：MXXMXX, XMXXMX, XXMXXM
MM 以三個 X 分開有 2 種：MXXXMX, XMXXXM
MM 以四個 X 分開有 1 種：MXXXXM

走 6 步由 *A* 至 *B* 共有: 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 種方法

再考慮以 4 步由 B 至 C 的 M:  N:  X:  Y: 

由於不可離開方格圖，N 或 Y 先向左行，M 或 X 後向右行。以下 8 個配合，有 1 個不合適：



共 8−1 = 7 種。

先走 *A* 至 *B* 的 15 種其中之 1, 再走 B 至 C 的 7 種的其中之 1。
得 15 × 7 = 105 種不同的方法。

14.

a. 將 2013 寫成質因數連乘積

$2013 = 3 \times 11 \times 61$

$$\begin{aligned} \therefore\ 2013 &= 1 \times 2013 \\ &= 3 \times 671 \\ &= 11 \times 183 \\ &= 33 \times 61 \end{aligned}$$

$\therefore$ 2013 的因數有 1, 3, 11, 33, 61, 183, 671 及 2013。

b. M 和 2013 的公因數只可以是 1, 3, 11 和 33。

因此 M 是 33 的倍數，可以是 $\underline{\underline{33, 66 \text{ 或 } 99}}$。

N與 2013 有 3 個公因數 (除 1 以外), 與 M 只有 1 個公因數(除 1 以外),

故 N 的因數中有 3 和 11 的其中一個，另 61 為 N 的因數。

考慮 N 有 6 個因數，它不可能有第 3 個全新的因數，且 N 為三位數。

$3 \times 61^2 = 11163$, $3^2 \times 61 = 549$

$11 \times 61^2 = 40931$, $11^2 \times 61 = 7381$

只有 549 為三位數字。

$N = 3 \times 3 \times 61 = \underline{\underline{549}}$。