

第五屆香港中學數學創意解難比賽 2012/13

決賽(數學辯論)

學校編號	參賽學校

比賽時間：40 分鐘

參加者須知：

1. 每一位同學有一份題目卷和題目附頁，每隊亦有一份匯報及評分用卷 (顏色卷)。
2. 於答卷時段的 40 分鐘完結時，同學寫於「評分卷」(顏色卷)的答案會作為評判批改和評分，於匯報時段同學亦會利用該卷的內容作為講解的輔助。同學應將經討論的答案、解釋用的算式、文句或繪圖等，清楚記於「評分卷」的適當位置上，若有需要，亦可以記於白紙上，於完卷時一併提交。
3. 白色的「個人卷」所記答案不會作為評分之用，同學可用作記錄算式、解題心得等，於匯報和辯論時段作為參考。
4. 同學只可以使用香港考試及評核局「准用計算機型號名單」中的計算機。本比賽嚴禁使用電話、電子字典、電腦、或其他有上網或通訊功能的工具。
5. 大會提供的比賽用品包括：白紙、直尺和顏色筆。
6. 比賽完畢後，同學必須把所有題目卷及比賽用品交還。

第五屆香港中學數學創意解難比賽 2012/13

決賽(數學辯論)

複雜規律的模擬

(A) 近似多項式 (Approximation Polynomial)

多項式 (Polynomial)

在各類的代數式(algebraic expression)中, 多項式(polynomial)較為常見和簡單。一個以 x 作為變數(variable)的多項式(polynomial)可寫成 :

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \cdots + a_nx^n$$

其中 n 為這多項式的次數(Degree) ,

而 a_r 為 x^r 項的係數(Coefficient), a_0 則為常數項(constant term)。

例如: $2 - 3x + 0.5x^2 - x^4$ 是一個 4次多項式 (a polynomial of degree 4)。

其中常數項 (constant term) 為 2,

x 項的係數(coefficient)是 -3 , x^2 項的係數是 0.5 , x^4 項的係數是 -1 。

當代入 $x = 1$, 多項式的數值為 -1.5 。

(When substitute $x = 1$, the value of the polynomial is -1.5 .)

1. a. 試找出一個以 x 為變數的多項式(Polynomial), 滿足下列條件:

多項式次數(degree) 為 1;

且 當代入 $x = 2$ 時, 多項式的值 = 3;

當代入 $x = 4$ 時, 多項式的值 = 5。

b. 試找出一個以 x 為變數的多項式(Polynomial)，滿足下列條件：

多項式次數為 2；

且 當代入 $x=0$ 時，多項式的值 = -7；

當代入 $x=2$ 時，多項式的值 = 3；

當代入 $x=4$ 時，多項式的值 = 5。

2. 試構作一個以 x 為變數、次數為 3 的多項式，當代入 $x = -1, 1$ 或 8 ，多項式的值均為 0。

[註：(i) 合適的多項式眾多，只需寫出其中一個；

(ii) 無須將求得的多項式化簡。]

3. a. 寫出一個 5 次(degree 5)的多項式，滿足下表所列條件：

當代入 $x =$	-2	-1	0	1	3	8
多項式的值 =	60	0	0	0	0	0

- b. 寫出一個 5 次多項式，滿足下表所列條件：

當代入 $x =$	-2	-1	0	1	3	8
多項式的值 =	60	12	-6	-21	0	450

4. 以 6 對數字填滿下表，使得不存在任何多項式滿足其要求。

當代入 $x =$						
多項式的值 =						

題目(3b)中求出了一個 5 次多項式，它可以滿足下表所列條件：

當代入 $x =$	-2	-1	0	1	3	8
多項式的值 =	60	12	-6	-21	0	450

同樣道理，若表中有 N 個不同的 x 值及其對應的多項式數值，應可構作出一個多項式以滿足這些結果。這種方法稱為插值法(interpolation)，它可以為一些複雜的代數式求出近似的多項式。然而當 N 越大時，多項式的次數便越高、也越複雜，在應用上不太方便。

5. 科學家希望分析某地區濕度變化的特性。假設他們已有過去一年每天濕度的紀錄，如果將上述的技巧直接運用於過去一年 365 日的數據以求出一個近似多項式，結果便是一個次數為 364 的多項式！

試建議一個方法去分析某地區的按月濕度變化，且能減少多項式的次數。

(B) 移動平均法 (Moving Average)

以上(A)部的方法是對一些數據作靜態分析，但有些情況我們希望對一些數據隨時間變化作出估計和分析。以分析股價為例：股價是每天變化的，若直接把股價和時間關係的折線圖 (broken-line graph) 繪出時，會發現它是一條變化非常大的線，對分析未必有幫助。這時候分析員通常會使用「移動平均」的方法。

分析員利用移動平均繪出移動平均線。移動平均線是計算某段時間內的平均數值。當計算移動平均值時，便須界定一段日數作為計算平均數值的基礎。在股價分析中最常見的移動平均線日數為 10 日、50 日及 250 日等。

簡單移動平均 (Simple Moving Average, 記作 SMA) 是某數據之前的 n 個數據的平均數值。例如某校連續的 14 個上課天，同學遲到人數如下：

日期	4月8日	4月9日	4月10日	4月11日	4月12日	4月15日	4月16日	4月17日	4月18日	4月19日	4月22日	4月23日	4月24日	4月25日
人數	6	1	0	2	4	8	2	2	3	5	10	3	1	3

若計算遲到人數 5 天的移動平均，則有以下結果：

日期	4月8日	4月9日	4月10日	4月11日	4月12日	4月15日	4月16日	4月17日	4月18日	4月19日	4月22日	4月23日	4月24日	4月25日
人數	6	1	0	2	4	8	2	2	3	5	10	3	1	3
5天移動平均	/	/	/	/	/	2.6	3.0	3.2	3.6	3.8	4	4.4	4.6	4.4

其中 $2.6 = \frac{6+1+0+2+4}{5}$ ， $3.6 = \frac{2+4+8+2+2}{5}$ 。

在股價分析的情況，「某股票在今天的“10-天簡單移動平均”」即之前 10 天該股票收市價的平均數。設該 10 天的股價為 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{10}$ ，則今天的“10 天簡單移動平均”為：

$$SMA = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_{10}}{10}$$

同樣地，計算「 n 天簡單移動平均」時，則 $SMA = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}$ ，

其中 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ 為之前 n 天該股票的收市價。

以下圖像是過去一年間恒生銀行的股價的 10-天、50-天和 200-天的簡單移動平均 (即 $n = 10, 50, 200$) 隨時間的變化。



1. 試描述原本的日線圖和不同日數的簡單移動平均線的關係和特點，並加以解釋。

2. 設 X 代表昨天的「 n 天簡單移動平均」, Y 代表今天的「 n 天簡單移動平均」, 而 p 和 q 分別代表昨天和它的 n 天之前的股價。
以算式寫出 X, Y, p 和 q 的關係, 並以 p, q, X 表示 Y 的值。(Express Y in terms of X, p and q .)

3. 股災的發生往往對社會民生產生負面的影響, 例如在 1997 年 10 月發生的一次股災中, 恆生指數在短時間內大幅度下跌。

(附件 1 為當時恆生指數的圖表和數據。)

- a. 一般的平均方法, 包括移動平均, 都不能預測股災的發生, 為甚麼?

- b. 試建議一個方法去預測股災的發生。

[完]

恆生指數 (01/97 - 12/97)



恆生指數 (09/97 - 12/97)



日期	收市 指數	日期	收市 指數	日期	收市 指數	日期	收市 指數	日期	收市 指數
9/1/97	13425.7	9/23/97	14094.4	10/17/97	13601	11/7/97	10104.5	11/28/97	10526.9
9/2/97	13735.3	9/24/97	14205.4	10/20/97	12970.9	11/10/97	9992.8	12/1/97	10750.9
9/3/97	14714	9/25/97	14636.6	10/21/97	12403.1	11/11/97	10004.1	12/2/97	11216.4
9/4/97	14199.2	9/26/97	14710.9	10/22/97	11637.8	11/12/97	9607.9	12/3/97	11207.6
9/5/97	14563.6	9/29/97	14864.4	10/23/97	10426.3	11/13/97	9720.8	12/4/97	11474.9
9/8/97	14806.5	9/30/97	15049.3	10/24/97	11144.3	11/14/97	9957.3	12/5/97	11527.6
9/9/97	14996.7	10/3/97	15128	10/27/97	10498.2	11/17/97	10419.8	12/8/97	11722.9
9/10/97	14805.4	10/6/97	14776.8	10/28/97	9059.9	11/18/97	10245.2	12/9/97	11490.7
9/11/97	14308.3	10/7/97	14810.8	10/29/97	10765.3	11/19/97	10154.4	12/10/97	11022.4
9/12/97	14470.5	10/8/97	14838.5	10/30/97	10362.9	11/20/97	10050.7	12/11/97	10420.2
9/15/97	14630.7	10/9/97	14273.1	10/31/97	10623.8	11/21/97	10548.2	12/12/97	10614.7
9/16/97	14411.2	10/13/97	14072.9	11/3/97	11255.1	11/24/97	10586.4	12/15/97	10435.2
9/18/97	14419.5	10/14/97	13836.6	11/4/97	10780.8	11/25/97	10325.6	12/16/97	10346.4
9/19/97	14384.1	10/15/97	13384.2	11/5/97	10681.8	11/26/97	10590.1	12/17/97	10692.7
9/22/97	14108.1	10/16/97	13567.3	11/6/97	10412.6	11/27/97	10583.1	12/18/97	10754.1