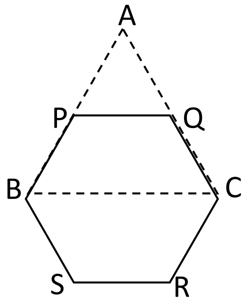
中學 (初賽)　題解

<table>
<tr><td>1.</td><td>由於　$15600 = 2\times2\times2\times2\times3\times5\times5\times13$，
可寫成 $15600 = (2\times2\times2\times3)\times(5\times5)\times(2\times13) = 24\times25\times26$

總表面面積　$= 2 \times (24\times25 + 25\times26 + 24\times26)$
$= 3748$

總表面面積為 <u>3748 cm²</u></td><td>[或]
考慮　$\sqrt[3]{15600} \approx 24.99$，
三邊的長度接近 24 及 25。</td></tr>
<tr><td>2.</td><td colspan="2">設後一半路程的距離為 x km。
$\dfrac{x}{250} - \dfrac{x}{350} = 1 + 0.5$
$\dfrac{x}{5} - \dfrac{x}{7} = 75$
$2x = 35(75) = 2625$

甲站與乙站的距離是 <u>2625 km</u> 。.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td colspan="2">圖1 中等邊三角形ABC與正六邊形PQCRSB的周界相等。將圖形如圖2所示分割，
可見 ΔABC面積 : PQCRSB面積 = 4:6。

圖 1


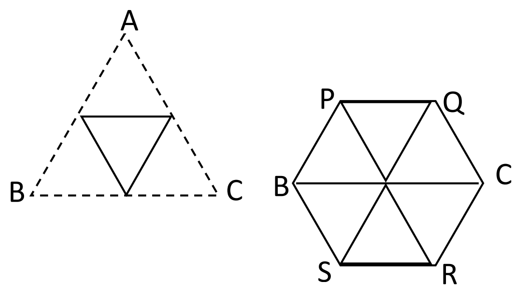


圖 2

六邊形面積　$=$ 三角形面積 $\times \dfrac{6}{4}$
$= 3 \times \dfrac{6}{4} = 4.5$

故此，DEFGHI 的面積是 <u>4.5</u>。</td></tr>
</table>

4.	將算式考慮成: $[\ (A) + (B) - (C)\ ]^2 \times (D) \div (E)$. 若要計自出數值最大，數值應為正數。 由於 $[\ (A) + (B) - (C)\ ]^2$ 必然是正數，故 (D) 及 (E) 均為正或均為負。 情況 1: $D = +2$ 及 $E = +1$。 若要使得算式的值為最大，須令 $[\ (A) + (B) - (C)\ ]$ 的值盡量負 即填入: $[(-3) + (-2) - (-1)]$ $R = [(-3) + (-2) - (-1)]^2 \times 2 \div 1 = 32$。 情況2: $D = -3$ 及 $E = -1$。 設 $[\ (A) + (B) - (C)\ ]$ 為 $[\ (+2) + (+1) - (-2)\ ]$， $R = [\ (+2) + (+1) - (-2)\ ]^2 \times (-3) \div (-1) = 75$。 情況 3: $D = -2$ 及 $E = -1$。 設 $[\ (A) + (B) - (C)\ ]$ 為 $[\ (+2) + (+1) - (-3)\ ]$， $R = [\ (+2) + (+1) - (-3)\ ]^2 \times (-2) \div (-1) = 72$。 情況4: $D = -3$ 及 $E = -2$。 設 $[\ (A) + (B) - (C)\ ]$ 為 $[\ (+2) + (+1) - (-1)\ ]$， $R = [\ (+2) + (+1) - (-1)\ ]^2 \times (-3) \div (-2) = 24$。 情況2 所得 R 的值最大。R 的最大可能值是 $\underline{\underline{75}}$。
5.	$\dfrac{\Phi}{2013}$ 的值介乎 0.595 及 0.605 之間。 考慮到 $2013\times0.595 = 1197.735$ 而 $2013\times0.605 = 1217.865$ $M = 1217$、 $N = 1198$ $M + N = \underline{\underline{2415}}$
6.	袋 A 中芝蔴的量 = 1000 g × 3% = 30 g. 袋 B 中亦應有 30 g 的綠豆。 袋 B 中綠豆的百分比 = $\dfrac{30}{600}\times100\% = \underline{\underline{5\%}}$

<table>
<tr><td>7.</td><td colspan="2">a. 算式 (1☆5) + (2☆10) + (3☆15) + (4☆20) + … + (99☆495)中:
它的 99 個相加的項中，
(1☆5), (3☆15), …, (99☆495) 的值為 5，即其中 50 項為 5，
其他則為 0。

∴ (1☆5) + (2☆10) + (3☆15) + (4☆20) + … + (99☆495)
= 50 × 5
= <u>250</u>

b. 算式 (1☆3) + (3☆5) + (5☆7) + (7☆9) + … + (2011☆2013) 中:

(1☆3) + (3☆5) + (5☆7) + (7☆9) + (9☆11) = 3 + 5 + 5 + 3 + 9 = 25
而 (11☆13) + (13☆15) + (15☆17) + (17☆19) + (19☆21)
(21☆23) + (23☆25) + (25☆27) + (27☆29) + (29☆31)
…..
及
(2001☆2003)+(2003☆2005)+(2005☆2007)+(2007☆2009)+(2009☆2011)
等亦如是。

∴ 總和 = (3 + 5 + 5 + 3 + 9) × 201 + 3 = <u>5028</u></td></tr>
<tr><td>8.</td><td colspan="2">a. 據觀察，多圍 1 圈的小三角形，圖案中便多加 3 層。
當加上 N 個圈，圖案共有層數為 $(1 + 3N)$。
最後圖案中， $1 + 3N = 100$
$N = 33$

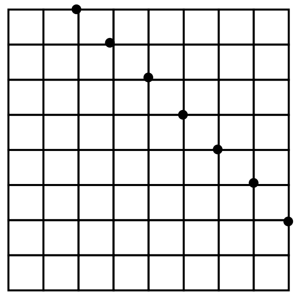
故用上了 <u>34</u> 種不同的顏色。
[或] 設 L_N 為第 N 個圖案中的層數。
$L_1 = 1, L_2 = 4, L_3 = 7, L_4 = 7+3 = 10, \ldots$
通項為 $L_N = 1 + 3(N-1) = 3N-2$
設 $L_N = 3N - 2 = 100$，則 N = 34。即最後圖案為第 34 個。</td></tr>
<tr><td></td><td>b. 當加上最外的一圈三角形後，圖案有 100 層，
圍上這一圈前，圖案有 97 層。

在三角形的三邊上所加的小三角形數目
= (2×97 + 3)×3 = 591</td><td>[或]
考慮 100 層圖案和 97 層圖案的差別:
[1+3+5+ … + (1+99×2)] −
[1+3+5+…+ (1+96×2)]
= 199 + 197 + 195
= 591</td></tr>
</table>

9.	a. 在每一個頂點，共有 6 個角。 總計 6 個頂點，則有 36 個角。 b. 圖形的 8 個面為等邊三角形，它們的內角為 60°。 其中 24 個角為 60°。 考慮正八面體的對稱性： *ABCD*, *PDQB*, *APCQ* 為正方形，它們的內角為 90°。 其中 12 個角為 90°。 這些角中， 最大的是 90°，共有 12 個角是這個度數。 最小的是 60°，共有 24 個角是這個度數。
10.	由於 17+18=35 < 36，故配對所得平方數為 1、 4、 9、16 或 25。 對於 18、 17 及 16，可能的配對方法為：18+7= 25、 17+8= 25 及 16 + 9 = 25。 再考慮其他數字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15 的配對: 15 可配 10 或 1，　14 可配 11 或 2，　13 可配 12 或 3， 12 可配 13 或 4，　11 可配 14 或 5，　10 可配 15 或 6， 6 可配 10 或 3，　5 可配 11 或 4，　4 可配 12 或 5， 3 可配 13、6 或 1，　2 可配 14 或 7，　1 可配 15、8 或 3。 但考慮到數字‘2’的情況： 由於 ‘7’ 必須配‘18’，故 ‘2’必須配‘14’。 由於 ‘14’必須配‘2’， ‘11’必須配‘5’。 由於‘5’必須配‘11’， ‘4’必須配‘12’….. 如此類推，可得配對如下： (18, 7)、(17, 8)、 (16, 9)、(15, 1)、(14, 2)、(13, 3)、(12, 4)、(11, 5)、(10, 6)。 2 跟 14 配、 4 跟 12 配, 6 跟 10 配， 8 跟 17 配、10 跟 6 配。

11.

a. 圖中所示為甲蟲走動最多 10 單位可到達最遠的格點。其外(更遠)的格點甲蟲不能到達。



不能到達的格點共有:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

甲蟲可以到達的格點的數目

$= 9 \times 9 - 21 = \underline{60}$

b. 若甲蟲可於走 2、 4、6、8 或 10 單位到達某格點，該格點可於剛好走 10 單位內到達。

例如圖 (a)中， 甲蟲可以最少走 4 單位的路徑到達 A 點 (3 上及 1 右)。若加插 3 個向左、3 個向右的的單位做成另一路徑(見虛線)便可成為一個走 10 單位到 A 點的路徑。

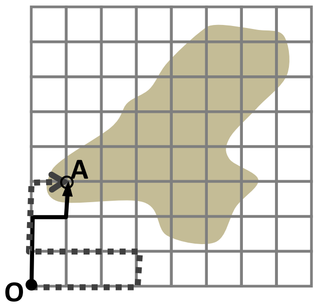


圖 (a)

圖(b)五個斜線上的格點分別為走 2、4、6、8、10 單位所到最遠的格點。

陰影部分中共有 <u>9 個</u>格點可走剛好 10 單位到達。

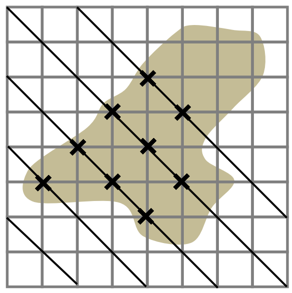
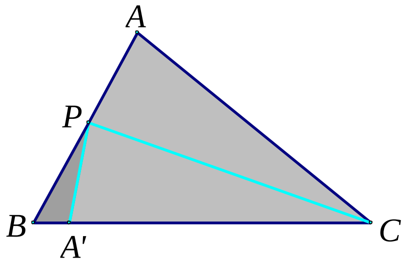


圖 (b)

12

見附圖：

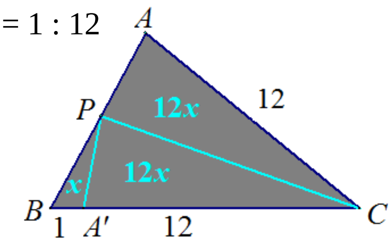


$\Delta PAC \cong \Delta PA'C$

$A'C = AC = 12$, $BA' = 13 - 12 = 1$

以 $\Delta BPA'$ 及 $\Delta CPA'$ 作比較，若分別以 BA' 及 $A'C$ 作底邊，兩者有同樣的高。

可得知： $\Delta PBA'$ 面積: $\Delta PCA'$ 面積 $= BA' : CA' = 1 : 12$



設 $\Delta PBA'$ 為 x。

則 $\Delta PCA'$ 面積 $= \Delta PBA'$ 面積 $= 12x$

ΔABC 面積 $= x + 12x + 12x = 25x$.

仍可見的灰色部分面積 $= \dfrac{x}{25x} \times 100\% = 4\%$.

b. 若以 AP 及 PB 分別作 ΔAPC 及 ΔBPC 的底邊， 可見兩三角形同高。

ΔAPC 面積: ΔBPC 面積 $= 12 : 13$

$\therefore \ AP : BP = 12 : 13$

$BP = 10 \times \dfrac{13}{12+13} = 5.2$ cm

13.

a. 所需火柴的數目

$= 20 \times (13+1) + 13 \times (20+1)$

$= \underline{553}$

b. 假設 82 根火柴可作一個 $m \times n$ 長方形圖案。

$m \times (n + 1) + n \times (m + 1) = 82$, 其中 m 、 n 均為正整數

$2\,mn + m + n = 82$

$4mn + 2m + 2n = 164$

$4mn + 2m + 2n + 1 = 165$

$(2m + 1)\,(2n + 1) = 165 = 3 \times 5 \times 11$

若 $2m + 1 = 3$， $2n + 1 = 55$: $m = 1$、 $n = 27$， 共有 27 單位正方形

若 $2m + 1 = 5$， $2n + 1 = 33$: $m = 2$、 $n = 16$， 共有 32 單位正方形

若 $2m + 1 = 11$， $2n + 1 = 15$: $m = 5$、$n = 7$， 共有 35 單位正方形

該圖案最多包含 <u>35</u> 個單位正方形。

[或]

由於 $2\,mn + m + n = 82$ 即 $m = \dfrac{82-n}{2n+1}$， 而 m、n 均為正整數。

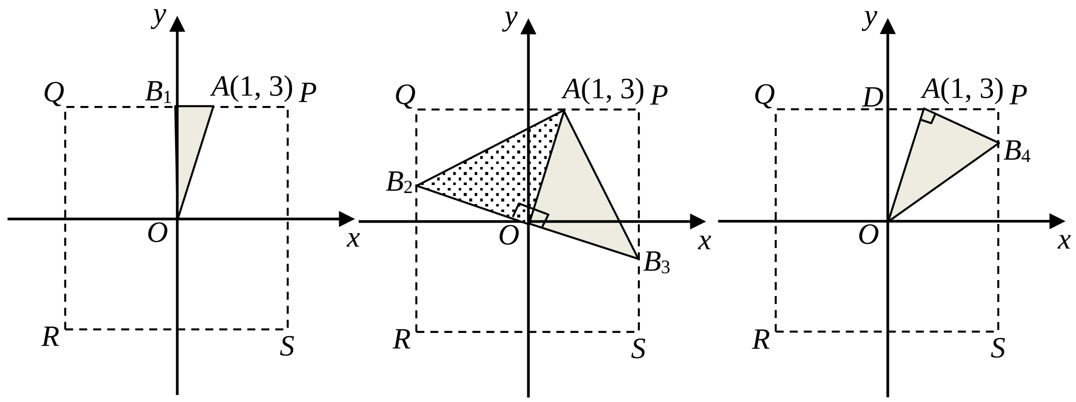
可得　$n = 1$、 $m = 27$，
或　$n = 2$、 $m = 16$，
或　$n = 5$、 $m = 7$，……

而當 n 越大 m 會越小，故 m 其他可能的值只限於 $m = 6, 5, 4, 3, 2, 1$

再考慮 $n = \dfrac{82-m}{2m+1}$， 只有當 $m = 5$、 2 或 1 時，可計出 n 的正整數數值。

故 m、 n 的可能數值為 (1, 27), (2, 16), (5, 7), (7, 5), (16, 2) 或 (27, 1).
其中 $m\times n$ 的最大可能是： $m\times n = 7\times 5 = \underline{\underline{35}}$。

14. a. B 的所有可能位置如下:



三個圖中所形成 ΔOAB 的 90°內角分別位於頂點 B、頂點 O 及頂點 A。
B_1 是 (0, 3)。
將 $A(1, 3)$ 以 O 為中心分別逆時針和順時針轉 90°，可知 B_2 是 $(-3, 1)$ 、B_3 是 $(3, -1)$。
運用相似三角形 ΔODA 及 ΔAPB :

$$\frac{PB}{PA} = \frac{1}{3}$$

$$PB = \frac{2}{3}$$

$B_4 = (3, 3-\frac{2}{3}) = (3, 7/3)$

b. 運用(a)的結果，設 M 於 (1, 3)，並取 B_1、 B_2 及 B_3 為 N。
所形成直角三角形的面積為：

$$\frac{1}{2}\times 1\times 3 = 1.5 \text{ 或 } \frac{1}{2}(3+4)\times 3-\frac{1}{2}\times 1\times 3-\frac{1}{2}\times 2\times 4=5$$

設 M 於 (2, 3)，可以(0, 3)、 (3, −2) 或 (−2, 3)為 N。
所形成的直角三角形的面積為：

$$\frac{1}{2}\times 2\times 3 = 3 \text{ 或 } \frac{1}{2}(3+5)\times 3-\frac{1}{2}\times 2\times 3-\frac{1}{2}\times 1\times 5=6.5$$

	再設 M 於 (3, 3)，可取(3, –3) 或 (0, 3)作 N。 所形成的直角三角形的面積為： $\frac{1}{2}\times 3\times 3 = 4.5$ or $\frac{1}{2}\times 6\times 3 = 9$ x 的所有可能值為 <u>1.5, 3, 4.5, 5, 6.5 或 9.</u>

15.	若要刪去盡量少的整數，即要求將 2013 寫成盡量多個整數的和，也就是其中每個數字的值要盡量小。 考慮從最小的 N 個數值的和： $1 + 2 + 3 + \ldots + N = \frac{(N+1)N}{2}$ …….(*) 考慮 $\frac{(N+1)N}{2} \approx 2013$ [可參考 $\sqrt{2\times 2013}$ = 63.45 作比較] 當 $N = 63$, $1 + 2 + 3 + \ldots + 63 = 64 \times 63 \div 2 = 2016$ ‘2013’ 不可寫成這些數字中 63 個數字或更多的數字的和。 當 $N = 60$, $1 + 2 + 3 + \ldots + 60 = 61 \times 60 \div 2 = 1830$ 2013 – 1830 = 183，可寫成 83 + 100 或 91 + 92 等 即可構成： $1 + 2 + 3 + \ldots + 60 + (83 + 100) = 2013$ ' 2013' 可成當中 62 個數字的和，而這也是可包括的最多數字。 ∴ 至少要刪去其中 <u>38</u> 個數字。 b. 考慮 $a, a+1, a+2, \ldots$ 至 N 項的和： 總和 = $\frac{(a+a+N-1)N}{2} = 2013$ 若 $N < 62$, $a < 100$, $a + N - 1 \le 100$, $2a + N - 1 \le 200$ $4026 = 2\times3\times11\times61$ $(= 2013 \times 2 = 1324 \times 3 = 671 \times 6 = 366 \times 11 = 183 \times 22 = 122 \times 33 = 66 \times 61 ..)$ 將以上各因式分解與 $(2a + N - 1) \times N$ 作比較， 只有 183×22, 122×33, 66×61 為可能的解。 以 $N = 22$、 $2a+N-1 = 183$， 則 $a = 81$ 而 $a + N - 1 = 102$. 不可作解 以 $N = 33$、 $2a+N-1 = 122$， 則 $a = 45$ 而 $a + N - 1 = 77$。 以 $N = 61$、 $2a + N-1 = 66$， 則 $a = 3$ 而 $a + N - 1 = 63$。 只要使得剩下的數字為： (I) 45 至77 或 (II) 3 至 63。