

## 第五屆香港中學數學創意解難比賽 2012/13

學校編號	參賽學校

參加者須知：

1. 每一位同學有一份題目卷。請將計算過程及答案填寫在題目卷每頁的適當位置上。若位置不足，可以在白紙上書寫，方便稍後向評判匯報。
2. 評判向同學提問前，會先收取綠色題目卷作批改，同學必須把所有答案清楚地寫在這份題目卷上。此外，由於評判會向同學提問，同學應把答案或算式也扼要記錄於題目紙空白處或算草紙上，以便回答評判的問題，但所書寫於白色題目卷的答案將不作評分。
3. 可以使用計算機(香港考試及評核局「准用計算機型號名單」中的計算機，或其他只有基本四則運算功能的計算機。
4. 大會提供的比賽用品包括：兩台電腦，內置 MS Excel 軟件及作解題實驗所用檔案。
5. 同學須共同商議所有題目，達到共識後才提出答案。
6. 比賽完畢後，請將所有物品（包括所有問題卷及比賽用品）交還監考員。

第五屆香港小學數學創意解難比賽 2012/13  
準決賽－解難實驗（中學）

多項式近似法 (Approximation by Polynomials)

多項式 (Polynomial)

在各類的代數式(algebraic expression)之中，多項式(polynomial)為較常見和簡單的一類。一個以  $x$  作為變數(variable)的多項式(polynomial)可寫成：

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \cdots + a_nx^n$$

其中  $n$  為這多項式的次數(Degree)，

而  $a_r$  為  $x^r$  項的係數(Coefficient)， $a_0$  則為常數項(constant term)。

例如： $2 - 3x + 0.5x^2 - x^4$  是一個 4 次的多項式 (a polynomial of degree 4)。

其中常數項 (constant term) 為 2，

$x$  項的係數(coefficient)是  $-3$ ， $x^2$  項的係數是  $0.5$ ， $x^4$  項的係數是  $-1$ 。

當代入  $x = 1$ ，代數式的數值為  $-1.5$ 。

(When substitute  $x = 1$ , the value of the polynomial is  $-1.5$ .)

一些複雜的代數式(algebraic expression)在指定的範圍內，是可以運用不同方法選取多項式作近似算式，以下是就這方面的探究。

1a) 開啟 Excel 試算表 'polynomial'，在工作表(Worksheet)1A，

圖 1a 中的藍色線表示了  $y = \frac{1}{2-x}$  在  $x = -1$  至  $x = +1$  範圍的圖像(graph)，

而紅色線則表示  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$  的圖像(graph)

(係數  $a_0$ 、 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4$  及  $a_5$  的數值設於工作表中儲存格(Cell) F2 至 F7，各數值原本均設為 0。)

在工作表 1A 中，適當地修改儲存格 F2 至 F7 的數值，使得圖 1a 的紅色線逐一顯示下列各多項式的圖像，並作觀察：

$$y = 0.5,$$

$$y = 0.5 + 0.25x,$$

$$y = 0.5 + 0.25x + 0.125x^2,$$

$$y = 0.5 + 0.25x + 0.125x^2 + 0.0625x^3,$$

$$y = 0.5 + 0.25x + 0.125x^2 + 0.0625x^3 + 0.03125x^4,$$

$$y = 0.5 + 0.25x + 0.125x^2 + 0.0625x^3 + 0.03125x^4 + 0.015625x^5,$$

將各代數式的圖像與  $y = \frac{1}{2-x}$  的圖像作比較，你有甚麼發現？

---

---

---

---

---

---

---

- 1b) 在工作表 1B 中，圖 1b 中的藍色線表示了  $y = \frac{10x^3+5x^2+1}{x^2+5x+10}$  在  $x = -1$  至  $x = +1$  範圍的圖像，而紅色線則表示  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$  的圖像。  
( $a_0$ 、 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4$  及  $a_5$  均預設為 0)

在工作表 B，通過修改儲存格 F2 - F7 的數值，使得紅色線逐一顯示以下各多項式的圖像，並作觀察：

$$y = 0.1,$$

$$y = 0.1 - 0.05x,$$

$$y = 0.1 - 0.05x + 0.515x^2,$$

$$y = 0.1 - 0.05x + 0.515x^2 + 0.7475x^3,$$

$$y = 0.1 - 0.05x + 0.515x^2 + 0.7475x^3 - 0.42525x^4,$$

$$y = 0.1 - 0.05x + 0.515x^2 + 0.7475x^3 - 0.42525x^4 + 0.13785x^5,$$

將各代數式的圖像與  $y = \frac{10x^3+5x^2+1}{x^2+5x+10}$  的圖像作比較。在這個例子中，有沒有和題(1a)類似的發現？

---

---

---

---

---

- 1c) 在(1a)和(1b) 兩題的例子中，設定的各個多項式與給出的代數式在  $x = 0$  時數值是相等的。若要達到這種效果，有關的多項式須符合甚麼條件？

---

---

---

---

---

2a)  $E$  是一個以  $x$  為變數的代數式。

在工作表 2A，圖 2a 中藍色線表示了這個代數式  $E$  於  $x = -1$  至  $x = +1$  範圍的圖像。圖 2a 中紅色線表示  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$  的圖像，其中各係數 (coefficients)  $a_0$ 、 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4$  和  $a_5$  的數值可於儲存格(Cell) F2 至 F7 設定和修改。

運用工作表 2A，適當地設定  $a_0$ 、 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4$  和  $a_5$  的數值以找出一個的次數 (degree) 為 5 的多項式，在  $x = -1$  至  $x = +1$  範圍可「逼近」代數式  $E$ ，也就是令找出的多項式與代數式  $E$  在代入  $x = -1$  至  $x = +1$  時所得數值相近。

請把你們找出各係數的步驟和結果扼要寫出。

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

2b) 在(2a)題中，當係數設定作不同的數值時，多項式圖像隨之而變。試分別描述當改變  $a_0$ 、 $a_1$  和  $a_2$  的數值時對多項式圖像的影響。

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

有一個代數式，若找出一個多項式於代入一定範圍的  $x$  值時，可與這多項式算出相近的數值，我們將這些多項式稱為它的「近似多項式」(approximation polynomial)。

2c) 於第(2a)題中，所得出多項式只作為所給出代數式  $E$  的「近似」算式 (approximation)，兩者之間必定存在了誤差(error)。

試設計一種方法去量度一個近似多項式與它所逼近的代數式之間的誤差。並以這方法量度出你們於(2a)所求出的近以多項式與這代數式  $E$  的誤差。

---

---

---

---

---

---

---

---

2d) 建議一個方法，在找出代數式的近似多項式時，能減少誤差。

---

---

---

---

---

2e) 在工作表 2D 中，圖(2d)的藍線表示了代數式  $E$  在範圍  $x = -0.5$  至  $x = 1.5$  的圖像。

i. 若以你們於此(2a)中所求出的多項式作為代數式  $E$  在這範圍的近似多項式，你們認為是否恰當？請解釋。

---

---

---

---

- ii. 若要求出一個近似多項式，使得在  $x = 0.5$  時這多項式和代數式  $E$  所得的數值相等，且在  $x = -0.5$  至  $x = 1.5$  範圍內兩者所得數值相近，該如何修改(2a)的方法？請扼要描述步驟。你們不需要把新的係數計算出來，但必須把重點寫出。

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- 3) 現有一代數式  $\frac{2x-1}{x^2+1}$ ，若沒有 Excel 這類試算表軟件或其他圖像軟件(graphing software)的輔助，只運用普通的科學計算機(Scientific calculator)，試求出一個次數為 2 的多項式作為  $\frac{2x-1}{x^2+1}$  的近似多項式，而且當  $x = 0$  時多項式和代數式  $\frac{2x-1}{x^2+1}$  所得的數值相等。必須列出計算步驟。

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

