樣本題目（3）

遞迴關係式

在中一的課程中，同學可能學過數列(sequence)中的通項(general term)和斐波那契數列(Fibonacci sequence)。

通項就是以正整數 n 來表示一個數列，例如在數列 3, 5, 7, 9, 11 中，第一個數字為 3，我們記作 T(1) = 3；第二個數字為 5，記作 T(2)=5，如此類推。這個數列的第 n 個數字就是 2n+1，我們就說這個數列的通項是 2n+1，記作 T(n) = 2n+1。把 n 分別代入 1, 2, 3, 4, 5，我們就可得到 3, 5, 7, 9 和 11 等數字。

斐波那契數列是一個特別的數列，它的第一、二個數字皆為 1，隨後的數字是之前兩個數字之和。即是說，由第三個數字開始：

T(3) = T(2) + T(1)；
T(4) = T(3) + T(2)　如此類推。

我們可記為

T(1) = 1；T(2) = 1；
對於正整數 n 是大於或等於 3 時，T(n) = T(n－1) + T(n － 2)。

(本題目會常常使用上述的表示方法，同學務必理解以上數式的意義。)

我們可以用這方法計算出一個數列：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 等，這就是斐波那契數列。而類似 T(n) = T(n-1) + T(n-2) 這種需要使用之前的項，循環計算以後的項的關係式，我們稱之為遞迴關係式。

樣本題目（3）

一般的中一數學課是沒有提及斐波那契數列的通項是甚麼，本題目是想探討斐波那契數列的通項。但在探討斐波那契數列之前，讓我們先看看一些有趣的遞迴關係式：

問題(a) 試看看以下的遞迴關係式（一）：

$T(1) = 1$； $T(2) = 3$； 對於正整數 n 是大於或等於 3 時，$T(n) = 3T(n-1) - 2T(n-2)$。

即是說， $T(3) = 3\times T(2) - 2\times T(1)$；
$T(4) = 3\times T(3) - 2\times T(2)$ 如此類推。

(i) 請計算出 T(3)及 T(4)的數值。(提示：你應能推算出 T(5)是 31。)

答：

(ii) 猜猜這個數列的通項是甚麼。(提示：試和 2^n 作比較)

答：

(iii) 怎樣可以證明，對於更大的 n，這通項依然是對呢？

答：

問題(b) 試看看以下的遞迴關係式（二）：

$T(1) = 4$； $T(2) = 10$； 對於正整數 n 大於或等於 3 時，$T(n) = 4T(n-1) - 3T(n-2)$

(i) 請計算出 T(3)及 T(4) 的數值。

樣本題目（3）

答：

(ii) 猜猜這個數列的通項是甚麼。

答：

問題(c) 試看看以下的遞迴關係式（三）：

$T(1) = 5$； $T(2) = 13$； 對於正整數 n 大於或等於 3 時，$T(n) = 5T(n-1) - 6T(n-2)$

(i) 請計算出 T(3)及 T(4) 的數值。

答：

(ii) 猜猜這個數列的通項是甚麼。

答：

問題(d) 試看看以下的遞迴關係式（四）：

$T(1) = 7$； $T(2) = 25$； 對於正整數 n 大於或等於 3 時，$T(n) = 7T(n-1) - 12T(n-2)$

(i) 請計算出 T(3)及 T(4) 的數值。

答：

(ii) 猜猜這個數列的通項是甚麼。

答：

樣本題目（3）

問題(e) 試觀察以上(a), (b), (c)及(d) 的結果，然後回答以下問題：

(i) (a) 至 (d)中的遞迴關係式和你所猜的通項有甚麼關係？

答：

(ii) 試寫出一個和 (c) 或 (d) 形式相似的通項，並以遞迴關係式去形容這個數列。

答：

(iii)在(e) (i)中所描述的關係，有沒有甚麼限制？

答：

問題(f) 現在，試重新再看斐波那契數列：

$T(1) = 1$； $T(2) = 1$； 對於正整數 n 大於或等於 3 時，$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$.

你認為斐波那契數列的通項形式會否與(a) 至 (d)的通項相似？試說明。

答：

完