

解難實驗

樣本題目 (2)

維維亞尼三角形

維維亞尼 (Vincenzo Viviani, 1622 – 1703) 是一位著名的意大利數學家。由於他在數學上天才橫溢，便成為科學家伽利略 (Galileo, 1564 – 1642) 的學生和研究伙伴。維維亞尼最廣為人所認識的，就是「維維亞尼定理」(Viviani's Theorem)。「維維亞尼定理」是有關等邊三角形的，我們可以透過以下問題來探討這定理。

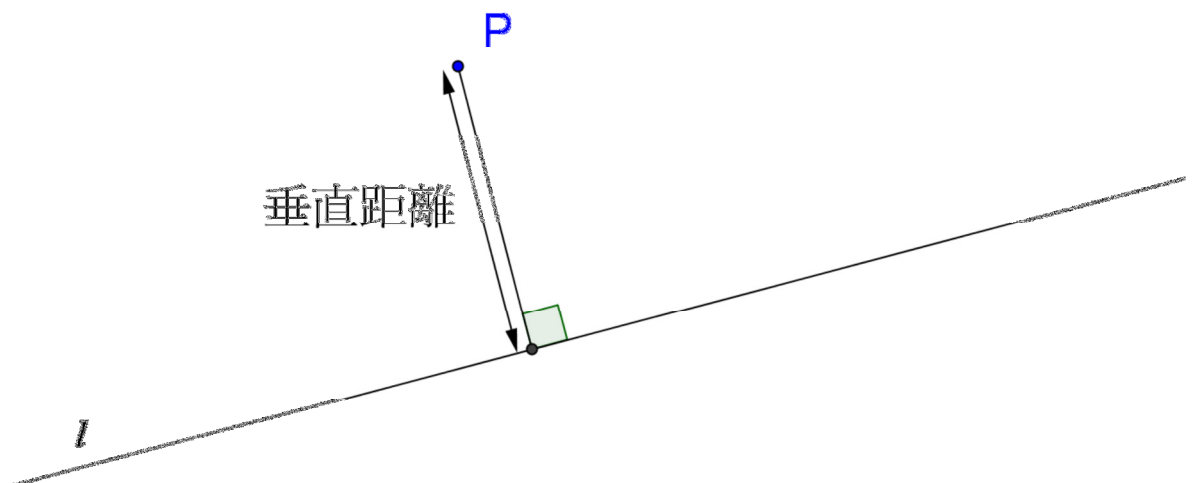
在太平洋上有一個等邊三角形(equilateral triangle)的海島，工人要在這海島的三邊海岸修葺防波堤。為了方便管理，工人要在海島上建立一個儲物倉庫，把所需物資都放在一起，此外，這倉庫的位置與三邊海岸的垂直距離(perpendicular distance)總和必須為最短。

究竟這倉庫應建在海島上的哪個地方呢？

詞彙註解

「垂直距離」(perpendicular distance)：

一點 P 與一條直線 l 的「垂直距離」，是指由點 P 出發至直線 l 的垂直線的長度，如下圖所示：



解難實驗

樣本題目 (2)

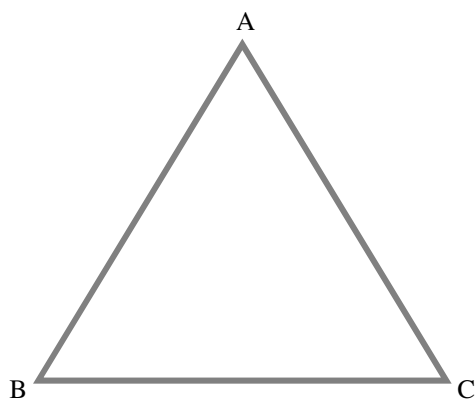
1. 計算垂直距離的總和

請按以下步驟計算出垂直距離的總和。

步驟：

(1)	在以下圖(a) 的等邊三角形 ABC 內任意取一點，並稱這點為 P；
(2)	畫出點 P 與三角形的邊 AB 的垂直線，再畫出點 P 與三角形的邊 BC 的垂直線，及畫出點 P 與三角形的邊 CA 的垂直線；
(3)	量度 P 與三角形三邊的垂直距離的總和；
(4)	在圖(b)的等邊三角形 ABC 內任意取一點為 P，這一點 P 的位置與圖(a)的 P 不相同，並重覆以上步驟 (2) 及 (3)。

圖(a)

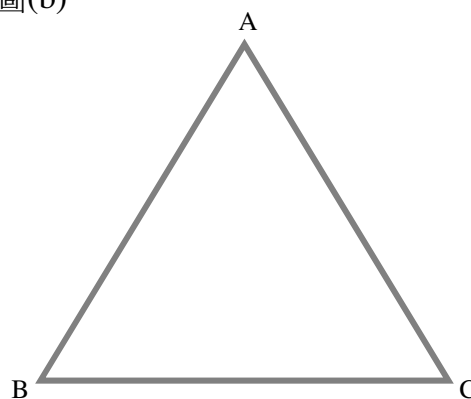


P 與等邊三角形三邊的垂直距離總和

= _____

= _____

圖(b)



P 與等邊三角形三邊的垂直距離總和

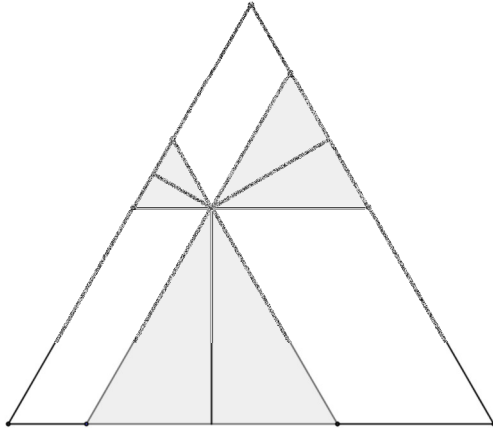
= _____

= _____

2. 「維維亞尼定理」初探

維維亞尼創立「維維亞尼定理」，這定理的內容如下：

在一個等邊三角形中，任何一點與三邊的垂直距離總和是固定不變的值。

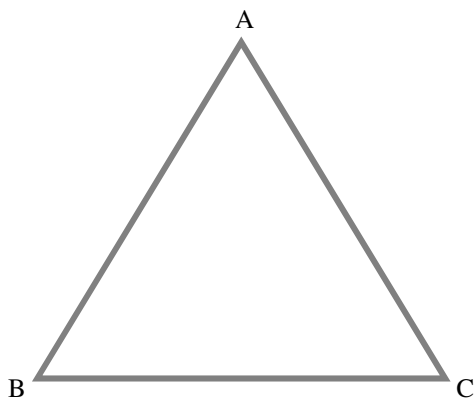


現附上一套如左圖的三角形拼圖。請將拼圖以另一種方式重新拼合，以便稍後向評判口頭解說為何「維維亞尼定理」是正確的。

滙報草稿：

有人建議用以下策略來證明「維維亞尼定理」：

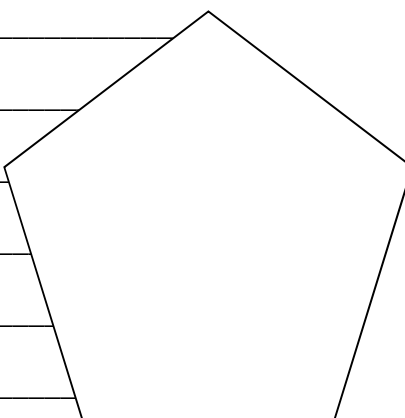
請用這個策略來證明「維維亞尼定理」是正確的，並把證明的步驟書寫在下面的橫線上。

[illegible][illegible]

4. 「維維亞尼定理」的推廣

有人提議將「維維亞尼定理」推廣到其他正多邊形如正方形、正五邊形與正六邊形等。

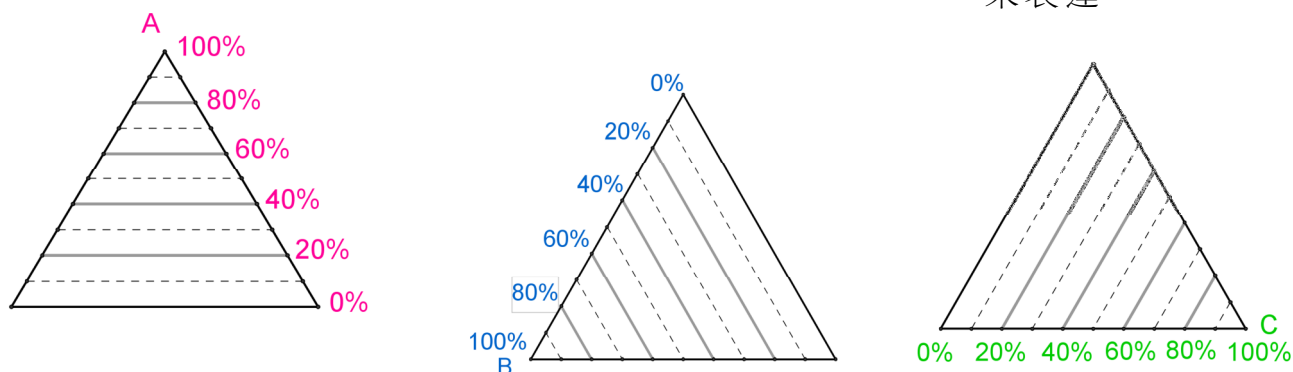
究竟正多邊形(regular polygon)內任意一點與各邊垂直距離的總和與正多邊形的邊數(number of sides)有甚麼關係呢？試以正五邊形來証明，並把証明的步驟書寫在下面的橫線上。【提示：考慮由正多邊形的「中心點」與各邊垂直距離的總和。】



Below the diagram, there are 20 horizontal lines for writing the proof steps.

5. 「維維亞尼定理」與三角圖

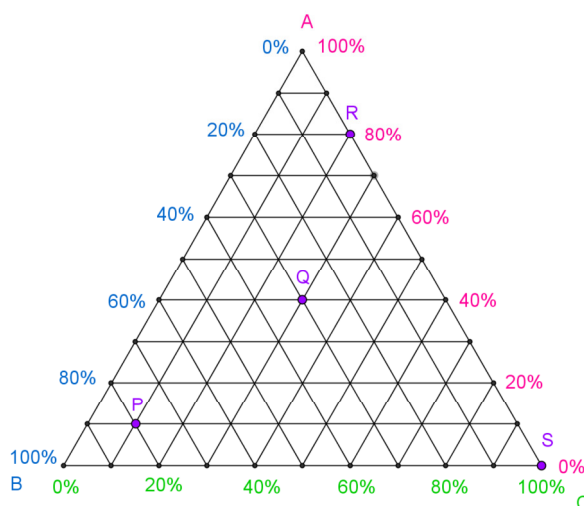
既然「維維亞尼定理」是正確的，那麼即是說給出任何一個等邊三角形，三角形內任意一點與三條邊的垂直距離的總和是固定不變的值。有人建議用這個特性來表達



固定總和的分
配問題。

若將這三個等邊三角形重疊起來，便可得出以下三角圖(Ternary Plot)。

- (5a) 在表一的空格內寫出下圖 P、Q、R 和 S 四個混合物(mixtures)中，組成元素(elements)A, B, C 各自的百分比。



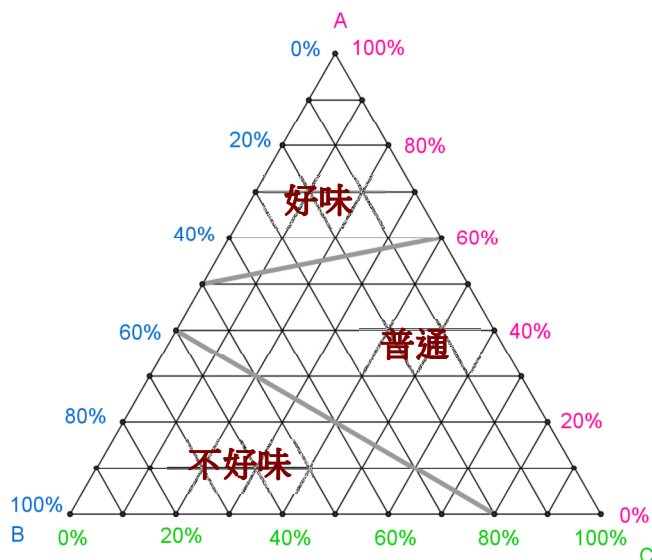
元素 混合物	A	B	C
P			
Q			
R			
S			

表一

解難實驗

樣本題目 (2)

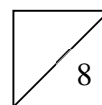
- (5b) 一間曲奇餅公司從問卷調查中發現顧客會因為曲奇餅中材料 A、B 和 C 的不同百分比而對曲奇餅有不同的評價：「好味」、「普通」與「不好味」，公司並製作了三角圖如下。若該公司採用以下表二顯示的材料 A、B、C 組合來製作曲奇餅，這些曲奇餅將會得到甚麼評價呢？請在表二的空格內填寫答案。



顧客對曲奇餅的評價

材料 評價	A	B	C
	20%	30%	50%
	40%	20%	40%
	60%	10%	30%
	80%	0%	20%

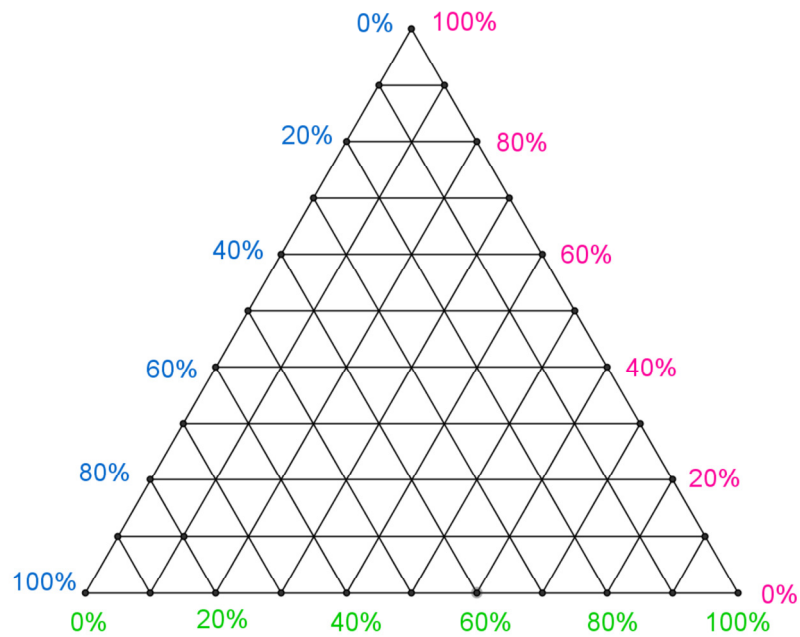
表二



解難實驗

樣本題目 (2)

- (5c) 假如「成功學習數學」是由三個條件所組成，這三個條件會是甚麼呢？你們的成功秘方又是甚麼呢？試用以下三角圖表達出來。



6. 額外挑戰問題：「維維亞尼定理」的其他證明

你還想到其他證明「維維亞尼定理」的方法嗎？請把證明的步驟書寫在下面的空白位置上。

