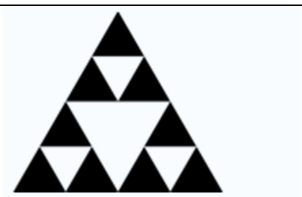
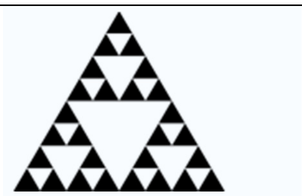
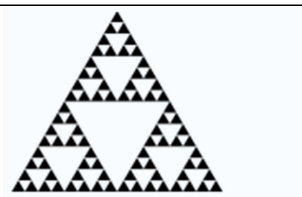
參考答案

神奇的謝爾賓斯基三角形和地毯

詞彙註解：

***答題前請先閱讀以下詞彙註解 1 - 3，以便更了解比賽題目的內容。**

1. 謝爾賓斯基三角形 (Sierpinski triangle) 的定義：

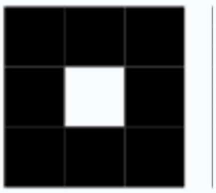
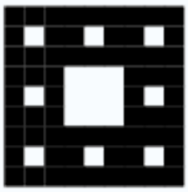
 T_0	T_0 為等邊實心三角形。
 T_1	在 T_0 等邊實心三角形中，沿三邊中點的連線，將實心三角形分割成四個小三角形。 去掉中間的小三角形，即圖中白色的部份。 新的圖形稱為**三角形 T_1**。
 T_2	在 T_1 的每個實心三角形中，沿三邊中點的連線，將實心三角形分割成四個小三角形。 去掉中間的小三角形，即圖中白色的部份。 新的圖形稱為**三角形 T_2**。
 T_3	在 T_2 的每個實心三角形中，沿三邊中點的連線，將實心三角形分割成四個小三角形。 去掉中間的小三角形，即圖中白色的部份。 新的圖形稱為**三角形 T_3**。
	在 T_3 的每個實心三角形中，沿三邊中點的連線，將實心三角形分割成四個小三角形。 去掉中間的小三角形，即圖中白色的部份。

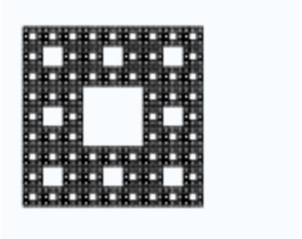
T_4	新的圖形稱為<u>**三角形 T_4**</u>。

*總括來說，把「分割及去掉」過程重複 1 次，得 T_1；重複 2 次，得 T_2；重複 3 次，得 T_3；重複 n 次，得 T_n；重複無限次，得「謝爾賓斯基三角形」，即 T_∞（“∞”是無限的意思）。

詞彙註解(續)：

2. 謝爾賓斯基地毯(Sierpinski Carpet)的定義：

 C_0	C_0 為實心正方形。
 C_1	將 C_0 實心正方形均分為 3×3 的 9 個小正方形。 去掉中間的小正方形，即圖中白色的部份。 新的圖形稱為<u>**正方形 C_1**</u>。
 C_2	將 C_1 中的每個實心正方形都均分為 3×3 的 9 個小正方形。 去掉中間的小正方形，即圖中白色的部份。 新的圖形稱為<u>**正方形 C_2**</u>。
 C_3	將 C_2 中的每個實心正方形都均分為 3×3 的 9 個小正方形。 去掉中間的小正方形，即圖中白色的部份。 新的圖形稱為<u>**正方形 C_3**</u>。

 C_4	將 C_3 中的每個實心正方形都均分為 3×3 的 9 個小正方形。 去掉中間的小正方形，即圖中白色的部份。 新的圖形稱為**正方形 C_4**。

*總括來說，把「分割及去掉」過程重複 1 次，得 C_1；重複 2 次，得 C_2；重複 3 次，得 C_3；重複 n 次，得 C_n；重複無限次，得「謝爾賓斯基地毯」，即 C_∞（“∞”是無限的意思）。

詞彙註解(續)：

3. 物體維數 D 的定義：

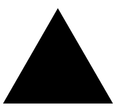
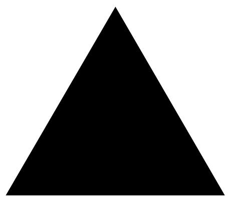
在數學物理上，一維物體的質量和長度有一次方的關係。即如果邊長變成原來的兩倍，質量便會變成原來的 $2^D=2^1=2$ 倍，即 D=1。

鐵線是一維物體的例子，因為鐵線的長度增加至原來的 2 倍時，它的質量會變成原來的 2 倍，即 $2^1=2$。
例如：

長度 = 1 cm，質量 = 1 g　　　長度 = 2 cm，質量 = 2 g

二維物體的質量和長度有二次方的關係。即如果邊長變成原來的兩倍，質量便會變成原來的 $2^D=2^2=4$ 倍，即 D=2。

等邊三角形木板是二維物體的例子，因為當三角形鐵片的邊長增加至原來的 2 倍時，它的質量便會變成原來的 4 倍，即 $2^2=4$。
例如：

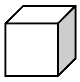



邊長 = 1 cm，質量 = 1 g　　　邊長 = 2 cm，質量 = 4 g

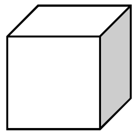
三維物體的重量和長度有三次方的關係。即如果邊長變成原來的兩倍，重量便會變成原來的 $2^D=2^3=8$ 倍，即 D=3。

正立方體膠磚是三維物體的例子，因為當正立方體膠磚的邊長增加至原來的 2 倍時，它的質量便會變成原來的 8 倍，即 $2^3=8$。

例如：



邊長 = 1 cm，質量 = 1 g



邊長 = 2 cm，質量 = 8 g

*所以一般物體的維數 D 為 1、2 或 3。當然也有物體的維數是這 3 個數字之外。

神奇的謝爾賓斯基三角形和地毯

題目：

實驗工具：

膠片一塊(膠片中央部份有一個邊長為 5cm 的空心等邊三角形)、少量白米、有刻度間尺一把、白紙數張、計算機(自備)

請解答以下各問題：

(a) 利用實驗工具，試估計需要多少粒米才可盡量密鋪(平面填滿)一個邊長為 5 cm 的等邊三角形。

答：

約 80 粒。 [1A]

(b) 試估計需要多少粒米才可盡量密鋪(平面填滿)一個邊長為 10 cm 的等邊三角形。

答：

約$\left(\frac{10}{5}\right)^2 \times 80 = 320$粒。 [1A]

(c) 以一個邊長 640 cm 的等邊三角形製作一個三角形 T_k (參看*詞彙註解 1*)，其最小的黑色三角形的邊長不能少於 4 cm。試計算 k 的值及估計需要多少粒米才可盡量密鋪(平面填滿)這個邊長為 640 cm 的三角形 T_k的所有黑色部份。

答：

樣本題目（3）

每次去掉中間一個小三角形都會產生 3 個小三角形，所以重複 n 次後，就會產生 3^n 個小三角形。 [1M]

由於 $5 = 640/2^7$， [1A]

$\therefore k=7$ [1A]

估計需要米粒的數量約為 $3^7 \times 80 = 174\ 960$ 粒。 [1A]

(d) 以一個邊長 640 cm 的等邊三角形製作一個三角形 T_m (參看*詞彙註解 1*)，其最小的黑色三角形剛仍可用米盡量密鋪(平面填滿) (但 T_{m+1} 便不可被米密鋪了)。試計算 m 的值及估計需要多少粒米才可盡量密鋪(平面填滿)這個邊長為 640 cm 的三角形 T_m 的所有黑色部份。

答：

觀察米粒的長度約為 0.6 - 0.7 cm。 [1A]

而 5/2 = 2.5 cm，2.5/2 = 1.25 cm，1.25/2 = 0.625 cm，

和 $640/2^{10} = 0.625$ cm [1M]

$\therefore m=10$ [1A]

估計需要米粒的數量約為 $3^{10} \times \left(\frac{0.625}{5}\right)^2 \times 80 = 73\ 811$粒。 [1A]

註 1：如學生認為邊長 0.625 cm 的三角形未能放入米粒，則應選擇邊長 1.25 cm 的三角形。

∴估計需要米粒的數量約為 $3^9 \times \left(\frac{1.25}{5}\right)^2 \times 80 = 98\ 415$*粒。*

註 2：如學生認為邊長 0.625 cm 的三角形只能放入 1 米粒，則

∴估計需要米粒的數量約為 $3^{10} \times 1 = 59\ 049$*粒。*

(e) 以一個邊長 512 cm 的等邊三角形製作一個三角形 T_n(參看*詞彙註解 1*)，其最小的黑色三角形的邊長為 8 cm。試估計需要多少粒米才可盡量密鋪(平面填滿)這個邊長為 512 cm 的三角形 T_n 的所有黑色部份。

答：

∵邊長 8 cm 的三角形能被$\left(\frac{8}{5}\right)^2 \times 80 = 128$ 粒米密鋪 [1M]

和 $\frac{512}{2^6} = 8$ [1A]

∴這個邊長 512 cm 的 T_n 三角形能放入大約$3^6 \times 128 = 93\ 312$粒米。 [1A]

樣本題目（3）

試估計或找出謝爾賓斯基三角形(即 T_∞, 參看*詞彙註解 1*) 的維數（準確至小數點後 2 位）。

答：

觀察當謝爾賓斯基三角形的邊長變成原來的 2 倍時，其面積只會變成原來的 3 倍。根據維數的定義，即

$2^D = 3$ [1A]

利用計算機，

$2^{1.5} = 2.83$

$2^{1.6} = 3.03$

$2^{1.59} = 3.01$

$2^{1.58} = 3.00$ [1M]

∴謝爾賓斯基三角形的維數是 1.58。 [1A]

註：如學生懂 log，則謝爾賓斯基三角形的維數是$\log 3/\log 2$。

(f) 試估計或找出謝爾賓斯基三角形(即 T_∞) 黑色部份的總面積。

答：

設三角形 T_0的面積為 A，及三角形 T_n的黑色部份總面積為 A_n

$n=1,\ A_n = A\times\left(\frac{3}{4}\right)$

$n=2,\ A_n = A\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$n=3,\ A_n = A\times\left(\frac{3}{4}\right)^3$

$\vdots$ [1M]

當 n 相當大時，$A_n \rightarrow 0$。 [1A]

(g) 謝爾賓斯基三角形和謝爾賓斯基地毯(參看*詞彙註解 2*)哪個的維數較大？為甚麼？

答：

方法一：

利用(f) 的結果，即謝爾賓斯基三角形的維數是 1.58。

假如謝爾賓斯基三角形的邊長變成原來的 3 倍，其面積便會變成原來的

$3^{1.58}$=5.67 (倍)

<8 (倍) [2M]

∴謝爾賓斯基三角形的維數 < 謝爾賓斯基地毯的維數 [1A]

方法二：

當謝爾賓斯基地毯的邊長變成原來的 3 倍，其面積便會變成原來的 8 倍。根據維數的定義，即

$3^{D} = 8$

利用計算機，

$3^{1.8} = 7.22$

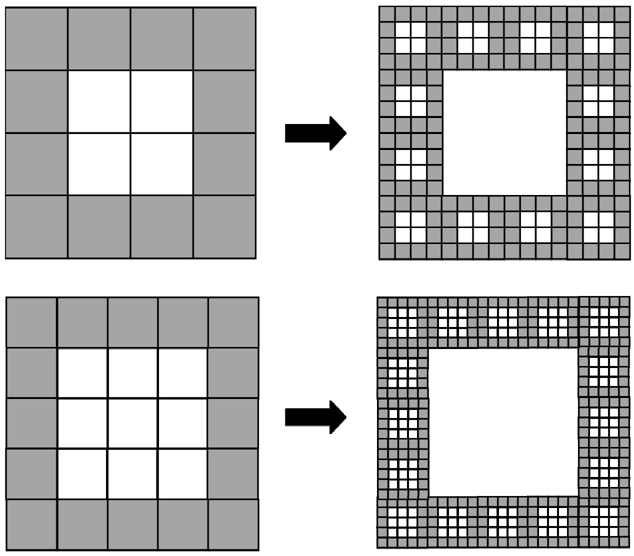
$3^{1.9} = 8.06$

$3^{1.89} = 7.98$

∴謝爾賓斯基地毯的維數是 1.89。

註：如學生懂 log，則謝爾賓斯基地毯的維數是log8/log3。

(h) 謝爾賓斯基地毯還有其他形式，例如：

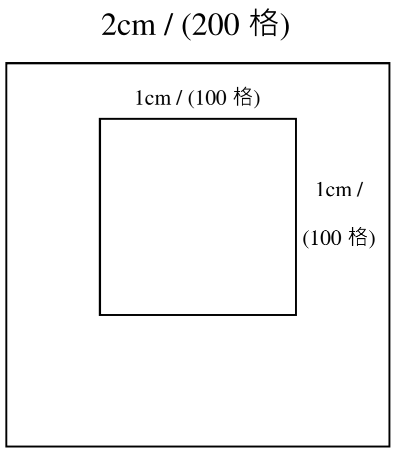


試製作一個維數與謝爾賓斯基三角形的維數相同的謝爾賓斯基地毯。

答：

考慮一個邊長 2cm 的三角形，在製作謝爾賓斯基三角形時，當中 1/4 的面積會被去掉。所以如果謝爾賓斯基地毯的維數和謝爾賓斯基三角形的維數相同，則一個邊長 2cm 的正方形，當中 1/4 的面積會被去掉。即 $1/4\times(2\times2)=1\text{cm}^2$ 的面積須被去掉。 [1M]

樣本題目（3）

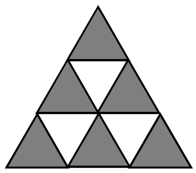


[1A]

(i) 試製作一個其他維數的謝爾賓斯基三角形，它的維數和原先的謝爾賓斯基三角形(即*詞彙註解 1* 中提及的謝爾賓斯基三角形)的維數不一樣。

答：

學生可自由發揮，例如：



[1A]

追加問題

1. 試舉出謝爾賓斯基三角形和謝爾賓斯基地毯的共通點。

*製作方法相同
*對稱
*維數不是整數
*自我相似(self-similar)

低層次

2. 試舉出謝爾賓斯基三角形和謝爾賓斯基地毯的分別。

*三角形 vs 正方形
*維數不同
*三重對稱(3 fold symmetry) vs 四重對稱(4 fold symmetry)
*謝爾賓斯基三角形只需切斷有限的接點便可把謝爾賓斯基三角形分開

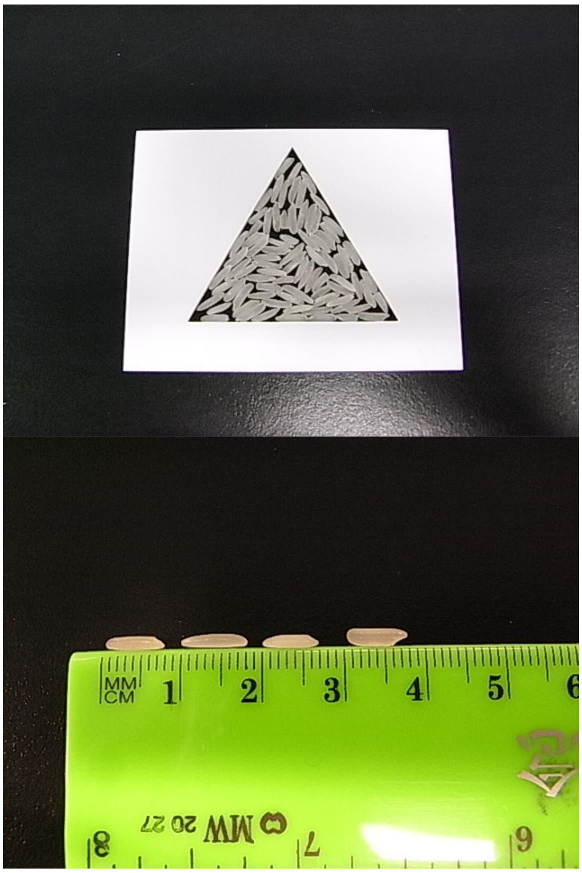
低層次

樣本題目（3）

(Finite ramification) vs 謝爾賓斯基地毯需切斷無限的接點才可把謝爾賓斯基地毯分開 (Infinite ramification)

*維數的間隔不同

參考圖片



全卷完