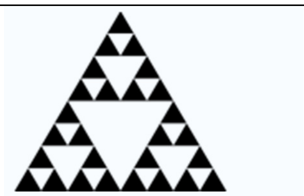
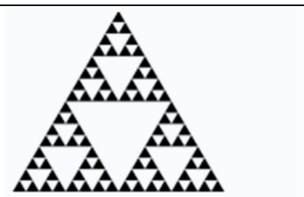
樣本題目（3）

神奇的謝爾賓斯基三角形和地毯

詞彙註解：

***答題前請先閱讀以下詞彙註解 1 - 3，以便更了解比賽題目的內容。**

1. 謝爾賓斯基三角形 (Sierpinski triangle) 的定義：

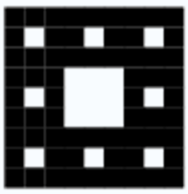
 T_0	T_0 為等邊實心三角形。
 T_1	在 T_0 等邊實心三角形中，沿三邊中點的連線，將實心三角形分割成四個小三角形。 去掉中間的小三角形，即圖中白色的部份。 新的圖形稱為**三角形 T_1**。
 T_2	在 T_1 的每個實心三角形中，沿三邊中點的連線，將實心三角形分割成四個小三角形。 去掉中間的小三角形，即圖中白色的部份。 新的圖形稱為**三角形 T_2**。
 T_3	在 T_2 的每個實心三角形中，沿三邊中點的連線，將實心三角形分割成四個小三角形。 去掉中間的小三角形，即圖中白色的部份。 新的圖形稱為**三角形 T_3**。
 T_4	在 T_3 的每個實心三角形中，沿三邊中點的連線，將實心三角形分割成四個小三角形。 去掉中間的小三角形，即圖中白色的部份。 新的圖形稱為**三角形 T_4**。

*總括來說，把「分割及去掉」過程重複 1 次，得 T_1；重複 2 次，得 T_2；重複

3 次，得 T_3； 重複 n 次，得 T_n； 重複無限次，得「謝爾賓斯基三角形」，即 T_∞ （“∞”是無限的意思）。

詞彙註解(續)：

2. 謝爾賓斯基地毯(Sierpinski Carpet)的定義：

 C_0	C_0 為實心正方形。
 C_1	將 C_0 實心正方形均分為 3×3 的 9 個小正方形。 去掉中間的小正方形，即圖中白色的部份。 新的圖形稱為<u>**正方形 C_1**</u>。
 C_2	將 C_1 中的每個實心正方形都均分為 3×3 的 9 個小正方形。 去掉中間的小正方形，即圖中白色的部份。 新的圖形稱為<u>**正方形 C_2**</u>。
 C_3	將 C_2 中的每個實心正方形都均分為 3×3 的 9 個小正方形。 去掉中間的小正方形，即圖中白色的部份。 新的圖形稱為<u>**正方形 C_3**</u>。
	將 C_3 中的每個實心正方形都均分為 3×3 的 9 個小正方形。 去掉中間的小正方形，即圖中白色的部份。 新的圖形稱為<u>**正方形 C_4**</u>。

C_4	

*總括來說，把「分割及去掉」過程重複 1 次，得 C_1；重複 2 次，得 C_2；重複 3 次，得 C_3； 重複 n 次，得 C_n； 重複無限次，得「謝爾賓斯基地毯」， 即 C_∞（“∞” 是無限的意思）。

詞彙註解(續)：

3. 物體維數 D 的定義：

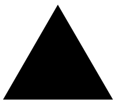
在數學物理上，一維物體的質量和長度有一次方的關係。即如果邊長變成原來的兩倍，質量便會變成原來的 $2^D=2^1=2$ 倍，即 D=1。

鐵線是一維物體的例子，因為鐵線的長度增加至原來的 2 倍時，它的質量會變成原來的 2 倍，即 $2^1=2$。
例如：

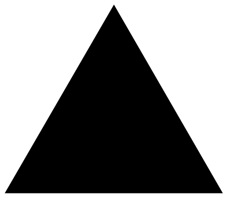
長度 = 1 cm，質量 = 1 g　　　　長度 = 2 cm，質量 = 2 g

二維物體的質量和長度有二次方的關係。即如果邊長變成原來的兩倍，質量便會變成原來的 $2^D=2^2=4$ 倍，即 D=2。

等邊三角形木板是二維物體的例子，因為當三角形鐵片的邊長增加至原來的 2 倍時，它的質量便會變成原來的 4 倍，即 $2^2=4$。
例如：



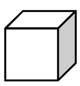
邊長 = 1 cm，質量 = 1 g

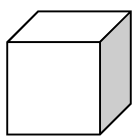


邊長 = 2 cm，質量 = 4 g

三維物體的重量和長度有三次方的關係。即如果邊長變成原來的兩倍，重量便會變成原來的 $2^D=2^3=8$ 倍，即 D=3。

正立方體膠磚是三維物體的例子，因為當正立方體膠磚的邊長增加至原來的 2 倍時，它的質量便會變成原來的 8 倍，即 $2^3=8$。
例如：





樣本題目（3）

邊長 = 1 cm，質量 = 1 g　　　　　　　　　邊長 = 2 cm，質量 = 8 g

*所以一般物體的維數 D 為 1、2 或 3。當然也有物體的維數是這 3 個數字之外。

神奇的謝爾賓斯基三角形和地毯

題目：

實驗工具：

中空 5cm 等邊三角形膠片一塊，少量米，有刻度間尺、白紙數張、計算機

請解答以下各問題：

(a) 利用實驗工具，試估計需要多少粒米才可盡量密鋪(平面填滿)一個邊長為 5 cm 的等邊三角形。

答：

(b) 試估計需要多少粒米才可盡量密鋪(平面填滿)一個邊長為 10 cm 的等邊三角形。

答：

(c) 以一個邊長 640 cm 的等邊三角形製作一個三角形 T_k (參看*詞彙註解 1*)，其最小的黑色三角形的邊長不能少於 4 cm。試計算 k 的值及估計需要多少粒米才可盡量密鋪(平面填滿)這個邊長為 640 cm 的三角形 T_k 的所有黑色部份。

答：

(d) 以一個邊長 640 cm 的等邊三角形製作一個三角形 T_m (參看*詞彙註解 1*)，其最小的黑色三角形剛仍可用米盡量密鋪(平面填滿) (但 T_{m+1} 便不可被米密鋪了)。試計算 m 的值及估計需要多少粒米才可盡量密鋪(平面填滿)這個邊長為 640 cm 的三角形 T_m 的所有黑色部份。

答：

(e) 以一個邊長 512 cm 的等邊三角形製作一個三角形 T_n(參看*詞彙註解 1*)，其最小的黑色三角形的邊長為 8 cm。試估計需要多少粒米才可盡量密鋪(平面填滿)這個邊長為 512 cm 的三角形 T_n 的所有黑色部份。

答：

(f) 試估計或找出謝爾賓斯基三角形(即 T_∞, 參看*詞彙註解 1*) 的維數（準確至小數點後 2 位）。

答：

樣本題目（3）

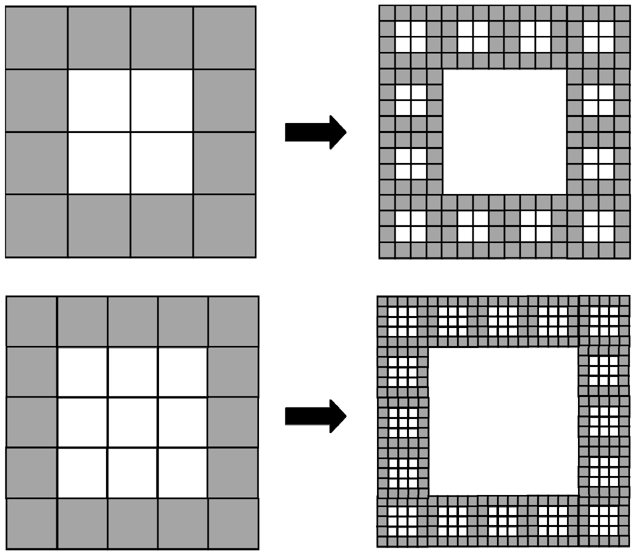
(g) 試估計或找出謝爾賓斯基三角形(即 T_{∞}) 黑色部份的總面積。

答：

(h) 謝爾賓斯基三角形和謝爾賓斯基地毯(參看*詞彙註解 2*)哪個的維數較大？為甚麼？

答：

(i) 謝爾賓斯基地毯還有其他形式，例如：



試製作一個維數與謝爾賓斯基三角形的維數相同的謝爾賓斯基地毯。

答：

(j) 試製作一個其他維數的謝爾賓斯基三角形，它的維數和原先的謝爾賓斯基三角形(即*詞彙註解 1* 中提及的謝爾賓斯基三角形)的維數不一樣。

答：

全卷完