

提示及答案

第六課 「岩石調包」

案情

案件發生地點：科學館

人物：維吉(科學館管理員)、警員和你

經過：

1. 有人舉報維吉將會在晚上值班時，偷走在展覽館的月球岩石。
2. 月球岩石的保安系統相當簡單，它只放在一個裝有重量傳感器上面，傳感器很靈敏，不可以有 1g 的誤差。

於是，警方展開調查，所錄口供對話如下：

警員(警)：維吉有人舉報你，說你打算晚上偷走價值差不多 1 000 萬元的月球岩石。據說在你的背包裡找到金屬砝碼，懷疑你打算用這些砝碼防止傳感器發出警報。(警員真的在維吉的背包找到多片砝碼。)

維吉(維)：這些砝碼不是我的！我也是剛見到這些砝碼。

你：真有趣。警察先生，你在維吉先生背包中找到的砝碼有幾重？

警：238g，我們剛用電子磅量度過。

你：月球岩石有多重？

警：95g

你：這些砝碼片是否一樣大？每片有多重？

警：砝碼片有 2 種，小的 12 片每片重 9g，大的 10 片每片重 13g，維吉有這麼多砝碼一定足以湊出 95g。

你：(沉思一會，看著維吉)真奇妙，維吉先生。

維：(帶著微笑)簡直太玄妙了，這麼巧合。

這案件有趣的部分在於你和維吉最後的對話，有什麼意思呢？

警方有沒有足夠證據檢控維吉？

=====

【後頁為破解本案的提示一至提示三，各同學可依次選擇閱讀自己需要的提示數量。最後一頁為答案。】

提示一（第一部分答案）

a=4, b=5

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
好數	✓				✓	✓			✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
壞數		x	x	x			x	x				x							

$$0=0\times 4+0\times 5$$

$$4=1\times 4+0\times 5$$

$$5=0\times 4+1\times 5$$

$$8=2\times 4+0\times 5$$

$$9=1\times 4+1\times 5$$

$$10=0\times 4+2\times 5$$

$$12=3\times 4+0\times 5$$

$$13=2\times 4+1\times 5$$

$$14=1\times 4+2\times 5$$

$$15=0\times 4+3\times 5$$

$$16=4\times 4+0\times 5$$

$$17=3\times 4+1\times 5$$

$$18=2\times 4+2\times 5$$

1. 我們可以猜 11 將是最後一個壞數，它之後的所有數都是好數。
2. 因此，我們稱 12 為第一個恆好數。
3. 為什麼我們知道 11 是最後一個壞數？因 a=4，我們只要把最先出現的 a 個（即 4 個）連續好數加上一個 a，就可以生成一組新的 a 個（4 個）連續好數，即 16=12+a；17=13+a；18=14+a；19=15+a。

由此得出以下 2 點假設：

1. 對任意 a 和 b，總有一個最後的壞數；
2. 只要找到一串連續的 a (a<b) 個好數，就能找到這個壞數。而這串數的第一個數叫第一個恆好數。

好數	✓			✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
壞數		×	×				×														

$a=4, b=7$

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
好數	✓				✓			✓	✓			✓	✓		✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
壞數		×	×	×		×	×			×	×			×				×					

$a=4, b=9$

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
好數	✓				✓				✓	✓			✓				✓	✓	✓		✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
壞數		×	×	×		×	×	×			×	×		×	×	×			×				×					

把結果填在下表：

a	2	3	4	5	5	3	4	4
b	5	5	5	6	7	4	7	9
第 1 個恆好數	4	8	12	20	24	6	18	24

提示三（第三部分答案）

從上表能找到規律嗎？

第一個恆好數 $= (a-1)(b-1)$

即最後一個壞數 $= (a-1)(b-1) - 1$

答案（第四部分答案）

對話中似乎暗示着 95 有什麼特別之處，但到底特別在那兒呢？

$\because a=9, b=13$ ，根據最後一個壞數 $=(a-1)(b-1)-1$

$$=(9-1)(13-1)-1$$

$$=95$$

\therefore 維吉背包的砝碼根本沒有可能湊成 95g，警方沒有足夠證據檢控維吉。