

學生課業

第六課 「岩石調包」

學習目標：

1. 學生能解決線性方程相關問題。
2. 學生能以邏輯方式分析事情，並推論出解決方案。

~~~~~

案件發生地點：科學館

人物：維吉(科學館管理員)、警員和你

經過：

1. 有人舉報維吉將會在晚上值班時，偷走在展覽館的月球岩石。
2. 月球岩石的保安系統相當簡單，它只放在一個裝有重量傳感器上面，傳感器很靈敏，不可以有 1g 的誤差。

於是，警方展開調查，所錄口供對話如下：

警員(警)：維吉有人舉報你，說你打算晚上偷走價值差不多 1 000 萬元的月球岩石。據說在你的背包裡找到金屬砝碼，懷疑你打算用這些砝碼防止傳感器發出警報。(警員真的在維吉的背包找到多片砝碼。)

維吉(維)：這些砝碼不是我的！我也是剛見到這些砝碼。

你：真有趣。警察先生，你在維吉先生背包中找到的砝碼有幾重？

警：238g，我們剛用電子磅量度過。

你：月球岩石有多重？

警：95g

你：這些砝碼片是否一樣大？每片有多重？

警：砝碼片有 2 種，小的 12 片每片重 9g，大的 10 片每片重 13g，維吉有這麼多砝碼一定足以湊出 95g。

你：(沉思一會，看著維吉)真奇妙，維吉先生。

維：(帶著微笑)簡直太玄妙了，這麼巧合。

這案件有趣的部分在於你和維吉最後的對話，有什麼意思呢？

警方有沒有足夠證據檢控維吉？

=====

第一部分

這個案件帶出一個有趣的問題，有 2 個砝碼〔正整數 9g (a)和 13g

(b)〕，它們的線性組合，即  $c=ax+by$  ( $x,y \geq 0$ )，有什麼特點？

這問題有點複雜，我們以簡單一點先了解，之後再破解案中問題。

從哪裡入手研究問題？如沒有明顯的線索，最好通過一些合適的例子做試驗。首先我們將 2 個砝碼設為 a 和 b (而  $a < b$ )。

假若  $a=4$  和  $b=5$ ，我們看看它們的線性組合能得出哪些數值(稱之為**好數**)，不能得出哪些數值(稱之為**壞數**)，並把它們填在下表。

$a=4, b=5$

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 數  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 好數 | ✓ |   |   |   | ✓ |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 壞數 |   | × | × | × |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

$$0=0 \times 4 + 0 \times 5$$

$$4=1 \times 4 + 0 \times 5$$

1. 我們可以猜\_\_\_\_\_將是最後一個壞數，它之後的所有數都是好數。
2. 因此，我們稱\_\_\_\_\_為第一個恆好數。
3. 為什麼我們知道\_\_\_\_\_是最後一個壞數？

因  $a=4$ ，我們只要把最先出現的 a 個（即 4 個）連續好數加上一個 a，就可以生成一組新的 a 個（4 個）連續好數，即  $16=12+a$ ；  
 $17=13+a$ ； $18=14+a$ ； $19=15+a$ 。

由此得出以下 2 點假設：





### 第三部分

把結果填在下表：

|        |   |   |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a      | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 3 | 4 | 4 |
| b      | 5 | 5 | 5 | 6 | 7 | 4 | 7 | 9 |
| 第1個恆好數 |   |   |   |   |   |   |   |   |

從上表能找到規律嗎？

## 第四部分

現在回到案件中，對話中似乎暗示着 95 有什麼特別之處，但到底特別在那兒呢？

警方有沒有足夠證據檢控維吉？

挑戰題：現在有 3 種不同重量的砝碼， $a=6$ ， $b=10$ ， $c=11$  你能否找到它們的第一個恆好數？

$a=6$ ， $b=10$ ， $c=11$

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |  |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--|
| 數  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\frac{1}{0}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{0}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{2}{7}$ |  |
| 好數 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |  |
| 壞數 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |  |

|    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|----|----|----|----|----|----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 數  | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 好數 |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 壞數 |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |