

提示及答案

第七課 「數學奇案」

案情

一天，你正上數學課時，黃老師帶著兩位學生偉利及志明走進來，黃老師是一位中文科老師。

黃老師表示需要你的幫忙。所錄對話如下：

黃老師(黃)：我懷疑偉利和志明作弊，但他們懇求我找你，說你能證明他們的清白。

(偉利和志明是你的好朋友，而且你們一起參加數學班。)

你：是什麼回事？

黃：問題是這樣的，上星期，我在課堂中提及過，如果他們提出一道推理問題，在考試中會得到額外分數。

你：你為什麼認為他們作弊？

黃：他們告訴我，他們設計和解決了一道數學題。我請他們告訴我，而他們表示通過示範效果更好。偉利告訴我一個正整數(30)，要我不說出去，跟著志明也告訴我另一個正整數(42)，他們都說不知道對方的數是多少。然後他們讓我在黑板寫兩個數，一個是他們告訴我的兩個數的和(72)，另一個是我自己隨便想的數(82)，兩個數不必順序，也不用我告訴他們。

你：之後如何？

黃：志明問偉利，“你知道我的數嗎？”偉利說不知道，然後向志明問“你現在知道我的數嗎？”志明回答不知道。他們就這樣問了幾次，每個人都重複同樣的問題及答案。忽然當偉利問志明時，志明卻突然說知道偉利的數字，並告訴了我偉利的數字。

你：你認為他們是怎樣做到？

黃：明顯地，他們作弊！

你：那麼我們重演一次，今次你把兩個正整數交給他們，每人只知道其中一個。

黃老師分別給了偉利“4”，志明“5”。

然後，你請黃老師在黑板寫上兩個數字，一個是兩數的和“9”，一個是隨意數“12”。

志明：偉利，你知道我的數嗎？

偉利：不知道，志明，你知道我的數嗎？

志明：不知道，偉利，你現在知道我的數嗎？

偉利：不知道，志明，你知道我的數嗎？

志明：我已知道！偉利的數字是“4”。

究竟他們的玩什麼戲法呢？現在請你解釋。

=====

延伸問題：

“他們告訴我，他們設計和解出一道數學題。我要他們告訴我，他們說通過示範效果更好。偉利告訴我一個正整數(30)，要我不說出去。然後志明也告訴我另一個正整數(42)。他們說各自想出數字，都不知道對方的數是多少。然後他們讓我在黑板寫兩個數，一個是他們告訴我的兩個數的和(72)，另一個是我自己隨便想的數(82)，兩個數不用順序，也不用我告訴他們。”

偉利和志明是怎樣推出對方的數字？

=====

【後頁為破解本案的第一部分答案和第二部分答案，與及破解課後延伸的第三部分答案至第七部分答案。全部加起來便是完整的分析】

第一部分答案（第一輪「不知道、不知道」的分析）

分析：

在這案中， $a=4, b=5$ 老師在黑板上寫上 9, 12

兩位同學在開始時得到以下資料：

偉利	志明
$a=4$	$b=5$
$a+b=9$ or $a+b=12$	$a+b=9$ or $a+b=12$
$b=5$ or $b=8$	$a=4$ or $a=7$
黑板兩數之差= $12-9=3$	

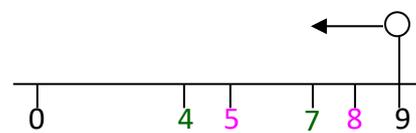
註：當他們找到要猜的數時，就希望從對答中，找出兩數之間的一個數，從這數再找出對方的數是大於或小於這數。如下：

第一次：

“不知道” →

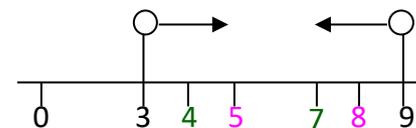
志明應知道 $a < 9$

否則若 $a \geq 9$ ，偉利就已經可以肯定和是 12，且可講出 $b = 12 - \text{自己}$ 。



同樣偉利亦應知道 $b < 9$ ，同時 $b > 3$ ，否則志明已知道 $a+b$ 不可能得到 12，即和是 9，他便應講出 $a = 9 - \text{自己}$ 。

← “不知道”



第二部分答案（第二輪「不知道、知道」的分析）

第二次：“不知道” →

志明應知道 $a < 6$ (即 $9-3$)。

因偉利已推算到 $b > 3$ ，

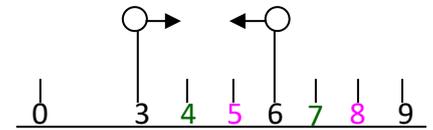
若 $a \geq 6$ ，則 $a+b > 9$ 。

那麼偉利應早知道和是 12，

但他沒有說“知道”。

由此，志明推算到 $a < 6$ ，即 $a=4$ 。

因此，志明回答“知道”



第三部分答案（延伸問題第一輪「不知道、不知道」的分析）

分析：

在案中， $a=30$ ， $b=42$ 老師在黑板上寫上 72，82

兩位同學在開始時得到以下資料：

偉利 $a=30$ $a+b=72$ or $a+b=82$ $b=42$ or $b=52$	志明 $b=42$ $a+b=72$ or $a+b=82$ $a=30$ or $a=40$
黑板兩數之差= $82-72=10$	

第一次：	“不知道” →	志明會知道 $a < 72$ 因若 $a \geq 72$ ，偉利就應該知道兩數的和不可能是 72，因此和必是 82。
	偉利會知道 $10 < b < 72$ ←	“不知道” 因如志明的數 ≤ 10 志明應知道 $a+b < 82$ 志明就會算出和是 72

第四部分答案（延伸問題第二輪「不知道、不知道」的分析）

第二次：	“不知道” →	志明會知道 $a < 62$ (即 $72-10$)。若 $a \geq 62$ ，偉利會有以下推理 $b > 10$ (兩人都知道) $a \geq 62$ (根據假設) $a+b > 72$ 則偉利早應知道和是 82，但他沒有說“知道”，所以志明知道 $a < 62$ 。
	偉利會知道 $20 < b < 72$ ←	“不知道” 因如果志明的數 ≤ 20 (即 2×10) 志明應算出以下結果： $a < 62$ $b \leq 20$ $a+b < 82$ 但志明答“不知道”，即仍未能推算出這結果，偉利現得出 $b > 20$

第五部分答案（延伸問題第三輪「不知道、不知道」的分析）

第三次：	“不知道” →	志明會知道 $a < 52$ (即 $72-2 \times 10$)。若 $a \geq 52$ ，偉利會有以下推理 $b > 20$ (兩人都知道) $a \geq 52$ (根據假設) $a+b > 72$
------	---------	--

則偉利早應知道和是 82，但他沒有說“知道”，所以志明推算 $a < 52$ 。

偉利會知道 $30 < b < 72$ ← “不知道”

因如志明的數 ≤ 30 (即 3×10)

志明應算出以下結果：

$$a < 52$$

$$b \leq 30$$

$$a + b < 82$$

但志明答“不知道”，即仍未能推算出這結果，偉利現得出 $b > 30$

第六部分答案（延伸問題第四輪「不知道、不知道」的分析）

第四次： “不知道” → 志明會知道 $a < 42$ (即 $72 - 3 \times 10$)。若 $a \geq 42$ ，偉利會有以下推理 $b > 30$ (兩人都知道)

$a \geq 42$ (根據假設)

$a + b > 72$

則偉利早應知道和是 82，但他沒有說“知道”，所以志明知道 $a < 42$ 。

偉利會知道 $40 < b < 72$ ← “不知道”

因如志明的數 ≤ 40 (即 4×10)

志明應算出以下結果：

$$a < 42$$

$$b \leq 40$$

$$a + b < 82$$

但志明答“不知道”，即仍未能推算出這結果，偉利現得出 $b > 40$

第七部分答案（延伸問題第五輪「不知道、知道」的分析）

第五次： “不知道” →

志明會知道 $a < 32$ (即 $72 - 4 \times 10$)。若 $a \geq 32$ ，偉利會有以下推理 $b > 40$ (兩人都知道)

$a \geq 32$ (根據假設)

$a + b > 72$

則偉利早應知道和是 82，但他沒有說“知道”，所以志明知道 $a < 32$ ， $a = 30$ 。

因此，志明回答“知道”。
