

第七課 「數學奇案」

學習目標：

1. 學生能掌握運用不等式去解決問題。
2. 學生能以邏輯方式分析事情，並推論出解決方案。

一天，你正上數學課時，黃老師帶著兩位學生偉利及志明走進來，黃老師是一位中文科老師。

黃老師表示需要你的幫忙。所錄對話如下：

黃老師(黃)：我懷疑偉利和志明作弊，但他們懇求我找你，說你能證明他們的清白。
(偉利和志明是你的好朋友，而且你們一起參加數學班。)

你：是什麼回事？

黃：問題是這樣的，上星期，我在課堂中提及過，如果他們提出一道推理問題，在考試中會得到額外分數。

你：你為什麼認為他們作弊？

黃：他們告訴我，他們設計和解決了一道數學題。我請他們告訴我，而他們表示通過示範效果更好。偉利告訴我一個正整數(30)，要我不說出去，跟著志明也告訴我另一個正整數(42)，他們都說不知道對方的數是多少。然後他們讓我在黑板寫兩個數，一個是他們告訴我的兩個數的和(72)，另一個是我自己隨便想的數(82)，兩個數不必順序，也不用我告訴他們。

你：之後如何？

黃：志明問偉利，“你知道我的數嗎？”偉利說不知道，然後向志明問“你現在知道我的數嗎？”志明回答不知道。他們就這樣問了幾次，每個人都重複同樣的問題及答案。忽然當偉利問志明時，志明卻突然說知道偉利的數字，並告訴了我偉利的數字。

你：你認為他們是怎樣做到？

黃：明顯地，他們作弊！

你：那麼我們重演一次，今次你把兩個正整數交給他們，每人只知道其中一個。

黃老師分別給了偉利“4”，志明“5”。

然後，你請黃老師在黑板寫上兩個數字，一個是兩數的和“9”，一個是隨意數“12”。

志明：偉利，你知道我的數嗎？

偉利：不知道，志明，你知道我的數嗎？

志明：不知道，偉利，你現在知道我的數嗎？

偉利：不知道，志明，你知道我的數嗎？

志明：我已知道！偉利的數字是“4”。

究竟他們的玩什麼戲法呢？現在請你解釋。

1. 你們先分析哪些是關鍵問題？

2. 現在請你思考如何破解問題。

分析：

老師交給偉利和志明各一個正整數，隨後老師在黑板上寫下兩個正整數，並告訴他們其中一個是他們手上的數字的和，另一個是隨意的數字。然後志明問偉利你是否知道我手中的數字，如偉利說不知道，偉利又問志明同樣問題，一直這麼下去，直到其中一個說出另一人手中的數為止。

提示：

問題好像很模糊，因為偉利和志明怎能有更多資料想出對方手中的數？關鍵在於仔細思考下面問題：當一方說他不知道對方的數字時，是不是含有某種額外的資料？

我們一起破解！

在這案中， $a=4, b=5$ 老師在黑板上寫上 9, 12

兩位同學在開始時得到以下資料：

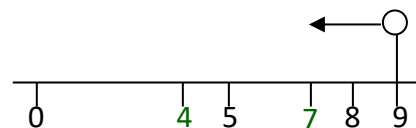
偉利	志明
$a=4$	$b=5$
$a+b=9$ or $a+b=12$	$a+b=9$ or $a+b=12$
$b=5$ or $b=8$	$a=4$ or $a=7$
黑板兩數之差= $12-9=3$	

註：當他們找到要猜的數時，就希望從對答中，找出兩數之間的一個數，從這數再找出對方的數是大於或小於這數。如下：

第一次：“不知道” → 志明會知道 $a < \underline{\quad}$

否則若 $a \geq \underline{\quad}$ ，偉利就

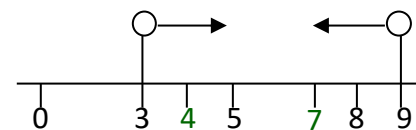
已經肯定和是 $\underline{\quad}$ ，且可講出 $b = \underline{\quad} - \text{自己}$ 。



同樣偉利亦應知道

$b < \underline{\quad}$ ，同時 $b > \underline{\quad}$ ， ← “不知道”

否則志明的已 $a+b$ 不可能得到 12，即和是 $\underline{\quad}$ ，他便講出 $a = \underline{\quad} - \text{自己}$ 。



第二次：“不知道” → 志明應知道 $a < \underline{\quad}$ (即 $\underline{\quad}$)。

因偉利已推算到 $b > \underline{\quad}$ ，

若 $a \geq \underline{\quad}$ ，則 $a+b > \underline{\quad}$ 。

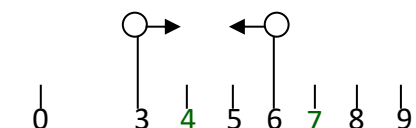
那麼偉利應早知道和是 $\underline{\quad}$ ，

但他沒有說“知道”。

由此，志明推算到 $a < \underline{\quad}$ ，

即 $a = \underline{\quad}$ 。

因此，志明回答“知道”



延伸問題：

“他們告訴我，他們設計和解出一道數學題。我要他們告訴我，他們說通過示範效果更好。偉利告訴我一個正整數(30)，要我不說出去。然後志明也告訴我另一個正整數(42)。他們說各自想出數字，都不知道對方的數是多少。然後他們讓我在黑板寫兩個數，一個是他們告訴我的兩個數的和(72)，另一個是我自己隨便想的數(82)，兩個數不用順序，也不用我告訴他們。”

偉利和志明是怎樣推出對方的數字？