二零二二至二三學年

協作研究及發展（「種籽」）計畫簡介會

高層次思維問題
在中學數學科學與教的應用
(MA1022)

數學教育組

2022年2月11日

高層次思維技巧
Higher-order Thinking Skills (HOTS)

HOTS應用的目的

- 強化現實情境、資訊科技和數學教育的結合，加強香港學生對數學的興趣和應用

興趣

應用

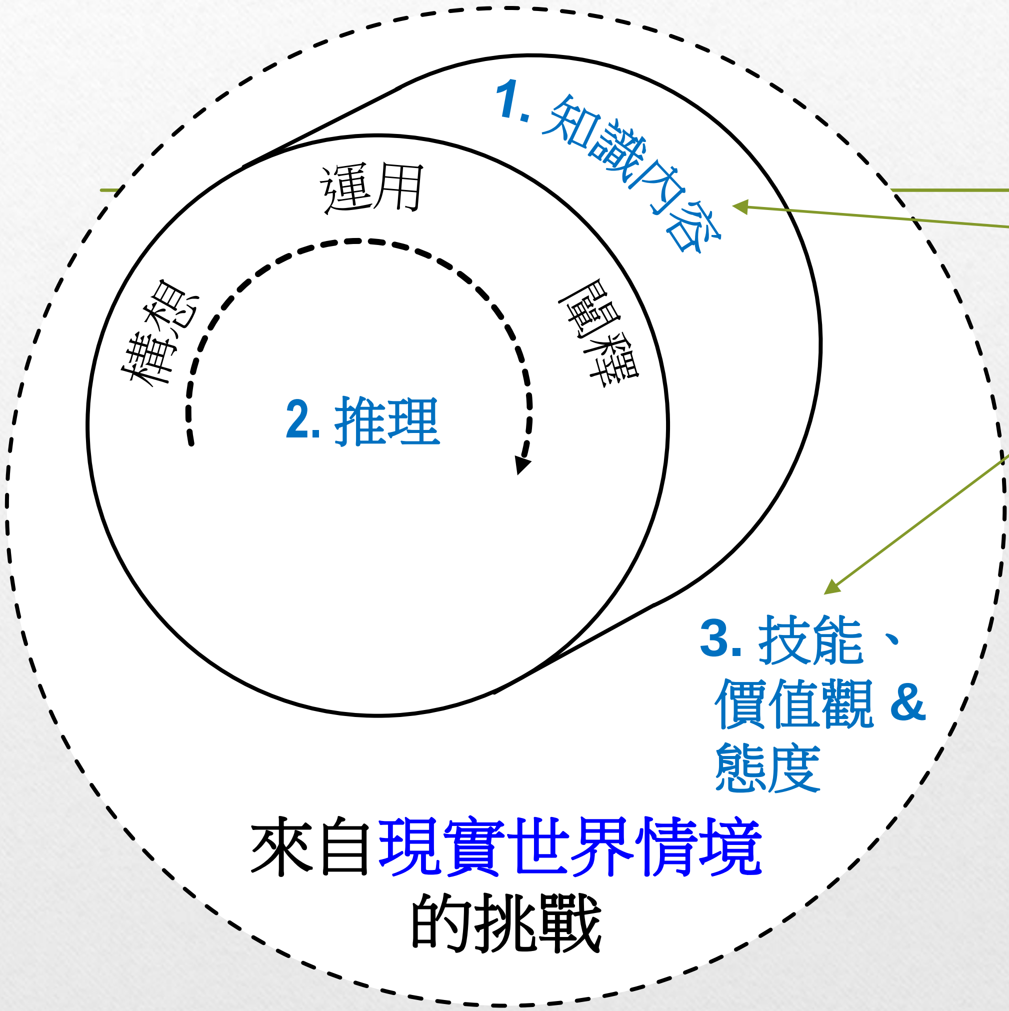
HOTS理論概觀——一些學者的界定

Swartz & Perkins (1990)	Cotton (1991)	Keefe & Walberg (1992)	Anderson & Krathwohl (2001)	Ong & Borich (2006)	McGregor (2007)
•慎思明辨能力 •創意思考	•創意思考 •慎思明辨能力 •後設認知 •思考技巧	•認知 •後設認知 •思考意向	•識記 •理解 •應用 •分析 •評鑑 •創造	•基本思考技巧 •慎思明辨能力 •創意思考 •複雜的思考過程 •後設認知 •思考意向	•資訊處理技巧 •推理 •探究 •創意 •評鑑

經濟合作發展組織(OECD) **Education 2030** HOTS理論

- 資訊及數據處理
- 資訊科技運用技巧
- 解決生活情境問題
- 推理
- 探究
- 創意
- 評鑑

數學 2030 年學習架構



- 內容
- 基礎概念
- 21世紀技能

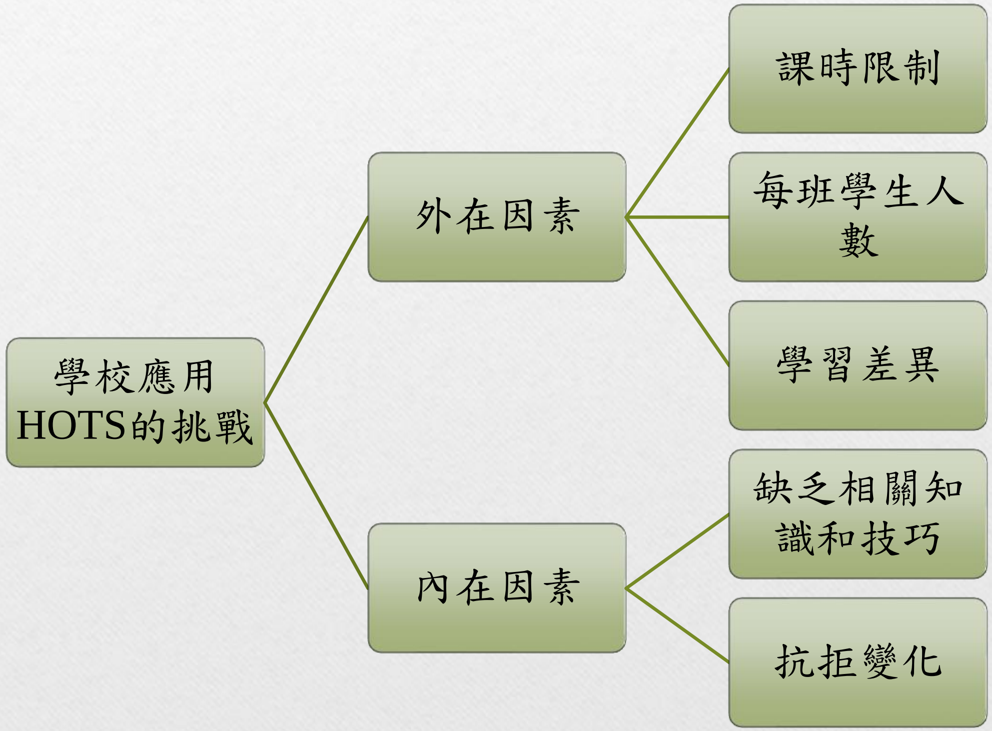
未來對數學的需要

- 概率性的決策
- 處理現實世界數據
- 預測模組
- 運算思維
- 幾何
- 有意義及應用

各行各業：
金融　製造業
市場營銷　醫療

- Probabilistic decision making
- Handling real-world data
- Predictive modelling
- Computational thinking
- Geometry
- **Meaningful** and **relevant**

學校應用HOTS的挑戰



推動HOTS計劃的目標

- 發展高層次思維問題及其相關資源
- 探索和發展運用高層次思維問題的學與教策略，以提高學生慎思明辨與解難的能力，及發展學生綜合及運用數學知識與技巧的能力
- 適當使用現有的資源（包括電子資源），以促進學生的高層次思維技巧
- 試行及修訂不同的學與教活動
- 促進參與學校的經驗交流並透過在職教師專業進修課程發放實踐成果

學校和老師的角色

- 運用教育局高層次思維問題樣本
- 協助發展校本高層次思維問題及其相關資源
- 探索和發展運用高層次思維問題的學與教策略
- 適當使用現有的資源（包括電子資源）
- 試行及修訂不同的學與教活動
- 與其他參與學校作經驗交流
- 在職教師專業進修課程發放實踐成果

HOTS題目可發展方向

- 情境題
- 一題多解
- 開放式題目
- STEM
- 數學建模
- 闡釋題

等等

如何發展HOTS問題

- 探索和發展運用高層次思維問題

市面上販售的防曬產品標有防曬係數SPF，而其對抗紫外線的防護率算法為

$$防護率=\frac{\mathrm{SPF}-1}{\mathrm{SPF}}\times 100\%\text{，其中 }\mathrm{SPF}\geq 1\text{。}$$

HOTS教育例子：防曬係數方程式

台灣2019年國中教育會考

市面上販售的防曬產品標有防曬係數SPF，而其對抗紫外線的防護率算法為

$$\text{防護率} = \frac{\mathbf{SPF-1}}{\mathbf{SPF}} \times \mathbf{100\%}\text{，其中 } \mathbf{SPF \geq 1}\text{。}$$

請回答下列問題：

(1) 廠商宣稱開發出防護率 **90%** 的產品，請問該產品的 **SPF** 應標示為多少？

(2) 某防曬產品文宣內容如圖（二十）所示。

圖（二十）

請根據 **SPF** 與防護率的轉換公式，判斷此文宣內容是否合理，並詳細解釋或完整寫出你的理由。

HOTS教育例子：防曬係數方程式

台灣2019年國中教育會考

- (1)

由題目提供之公式 $90\% = \dfrac{SPF-1}{SPF} \times 100\%$

$$\Rightarrow \frac{90}{100} = \frac{SPF-1}{SPF} \Rightarrow SPF = 10$$

(2)

第一代防護率 $= \dfrac{25-1}{25} \times 100\% = 96\%$

第二代防護率 $= \dfrac{50-1}{50} \times 100\% = 98\%$

$98\% \neq 96\% \times 2$

$\therefore$ 並無提供多一倍的防護率

適當使用現有的資源（包括電子資源）

HOTS教育例子：線性規畫與食物攝取量

教育局教學資源

資料頁

(i) 10 種受歡迎的食物及它們的營養資料顯示如下:

食物	可樂汽水 (330 毫升)	麥精維他奶 (250 毫升)	高鈣牛奶 (236 毫升)	即沖麥皮 (30 克)	三文治 (100 克)
能量 (卡路里)	139	128	94.4	135	248
蛋白質 (克)	0	4.5	6.8	4	8.4
糖 (克)	35	15	14.9	15	5.1
碳水化合物 (克)	35	19	14.9	23	44.6
脂肪 (克)	0	3.8	0	3	3.6
鈉 (毫克)	13	188	118	150	422
價格 (元)	6	5	7	4	4

食物	餅乾 (100 克)	即食碗麵 (100 克)	即食麵 (100 克)	牛肉漢堡包 (218 克)	蝦肉燒賣 (150 克)
能量 (卡路里)	275	301	463	512	279
蛋白質 (克)	4.2	9	10.3	26	17
糖 (克)	38	0.7	2.4	0	4.5
碳水化合物 (克)	64.8	35.2	58.9	40	20.5
脂肪 (克)	0.25	13.8	20.7	27	14.3
鈉 (毫克)	188	1,140	1,936	824	855
價格 (元)	5	7	3	12	8

(ii) 根據世界衛生組織和香港特別行政區政府衛生署的資料，對於一名成人來說，透過一個健康和均衡的餐單，不同營養成分的每日攝取量建議如下:

下限 (十類)		上限 (五類)
能量 ≥ 2,400 卡路里	碳水化合物 ≥ 350 克	鹽 ≤ 5 克
蛋白質 ≥ 60 克	蔬菜 ≥ 400 克	糖 ≤ 50 克
膳食纖維 ≥ 25 克	鈣質 ≥ 1,000 毫克	脂肪 ≤ 65 克
鐵質 ≥ 20 毫克	維他命 A ≥ 1,000 微克	鈉 ≤ 2,000 毫克
維他命 C ≥ 75 毫克	維他命 E ≥ 20 毫克	膽固醇 ≤ 200 毫克/分升

HOTS教育例子：線性規畫與食物攝取量

教育局教學資源

學生須參考資料頁所示各種營養的攝取量的限制，並以滿足以下條件為目標，求他們最喜歡的兩款食物的數量:

a）如果您要同時滿足 最低能量攝取量 和 最低蛋白質攝取量，試求滿足條件的

i. 最低消費成本，及

ii. 對應的食物數量。

HOTS教育例子：線性規畫與食物攝取量

教育局教學資源

樣本答案

假設某學生選擇了牛肉漢堡包（218 克，每一個 12 元）和豆奶飲料（250 毫升，每盒 5 元）。設 x 為牛肉漢堡包的數量，y 為豆奶的數量，而 $\$C$ 則為食物的總消費。已知要求每天的最低能量和蛋白質攝取量分別為 2,400 千卡路里和 60 克，我們得到

目標函數: $C = 12x + 5y$ (對應直線 $y = -\frac{12}{5}x + \frac{C}{5}$)

約束條件: $512x + 128y \geq 2{,}400$ 即 $16x + 4y \geq 75$ (能量) ---------- (1)

$26x + 4.5y \geq 60$ 即 $52x + 9y \geq 120$ (蛋白質) ---------- (2)

$x \geq 0$， $y \geq 0$， x 和 y 為非負整數 ---------- (3)

將 $16x + 4y \geq 75$ 寫作 $y \geq -4x + \frac{75}{4}$ 和

$52x + 9y \geq 120$ 寫作 $y \geq -\frac{52}{9}x + \frac{40}{3}$

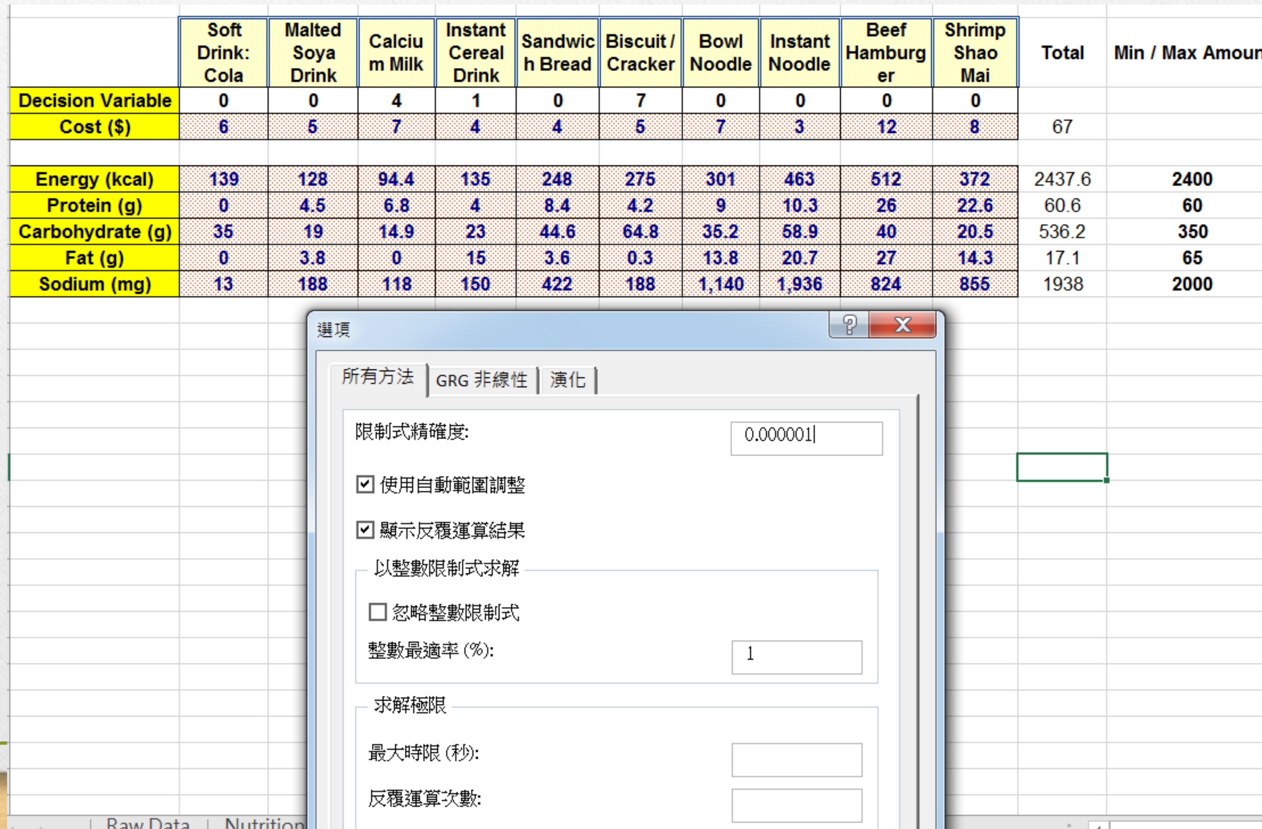
對應邊界和目標函數的線段都繪在下面方格紙上，而可行解則由圖中格點所顯示:

HOTS教育例子：線性規畫與食物攝取量

教育局教學資源

進階延伸：

利用 Excel Solver求解線性規畫問題的程序



	Soft Drink: Cola	Malted Soya Drink	Calcium Milk	Instant Cereal Drink	Sandwich Bread	Biscuit / Cracker	Bowl Noodle	Instant Noodle	Beef Hamburger	Shrimp Shao Mai	Total	Min / Max Amount
Decision Variable	0	0	4	1	0	7	0	0	0	0		
Cost ($)	6	5	7	4	4	5	7	3	12	8	67	
Energy (kcal)	139	128	94.4	135	248	275	301	463	512	372	2437.6	2400
Protein (g)	0	4.5	6.8	4	8.4	4.2	9	10.3	26	22.6	60.6	60
Carbohydrate (g)	35	19	14.9	23	44.6	64.8	35.2	58.9	40	20.5	536.2	350
Fat (g)	0	3.8	0	15	3.6	0.3	13.8	20.7	27	14.3	17.1	65
Sodium (mg)	13	188	118	150	422	188	1,140	1,936	824	855	1938	2000

一題多解實例

對象：數學能力稍遜的學生

- 幫助學生加強數學思維
- 協助學生歸納常見解難方法
- 條理分析問題條件及解難

一題多解實例 – 數學教育組與學校共建工作紙

Solving a geometric problem involving circles by adding line segment(s)

All students must have the experience that a geometric problem cannot be solved at the beginning, but it can be solved after we add one / a few line segments on the figure smartly! What actually motivates us to add line segments on the figure? Are there any reasons or thinking strategies behind the action? One must remember that *there is no royal road to geometry*, so even we have some insights on how adding line segments may help solving a geometric problem involving circle, further investigations and trials must be done step by step.

Now, what are the reasons on adding line segments on a figure of a geometric problem involving circles? It is sorry that the actual reasons can be very complicated. The following reasons may be oversimplified but one may find them useful if you need some simple guidelines.

Some common reasons on adding line segments:

- transferring measures of angles
- getting a 'good' shape
- constructing right angles

The above points will be illustrated one by one with examples now.

Transferring measures of new angles

(HKDSE 2014 Mathematics Paper II, Q20)

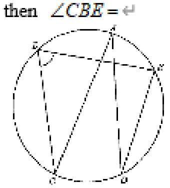
In the figure, AC is a diameter of the circle $ABCDE$. If $\angle ADE = 28°$, then $\angle CBE =$

A. 56°.

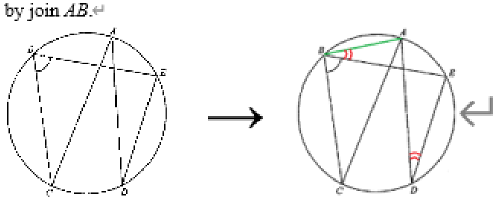
B. 62°.

C. 72°.

D. 76°.



One can see that $\angle ADE$ seems nothing do with $\angle CBE$, so one can get a more useful angle $\angle ABE$ by join AB.



(HKCEE 1992 Mathematics Paper II, Q27)

In the figure, ST is a tangent to the smaller circle. ABC is a straight line. If $\angle TAD = 2x$ and $\angle DPC = 3x$, find x.

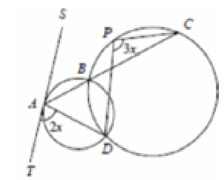
A. 30°.

B. 36°.

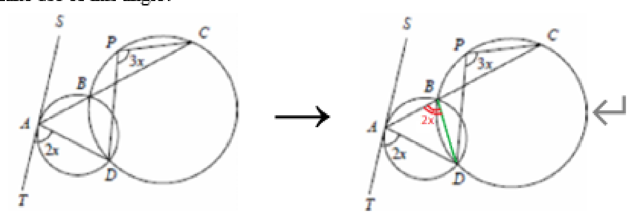
C. 40°.

D. 42°.

E. 45°.



$\angle TAD = 2x$ is an angle between a tangent and a chord at the point of contact, how can we make use of this angle?



Remark: Joining BD actually serve one more purpose, can you find it out?

Getting a 'good' shape

(HKCEE 2003 Mathematics Paper II, Q50)

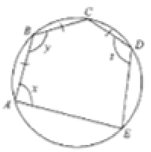
The figure shows a circle with diameter AD. If $AB = BC = CD$, find $x + y + z$.

A. 315°

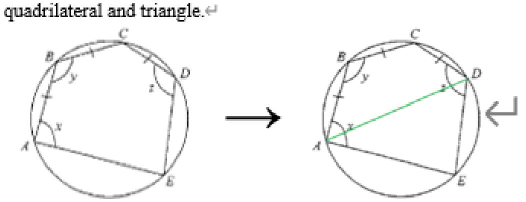
B. 324°

C. 330°

D. 360°



We have no idea about the properties of cyclic pentagon. It would be better if we deal with cyclic quadrilateral and triangle.

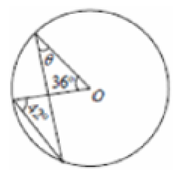


一題多解實例 – 數學教育組與學校共建工作紙

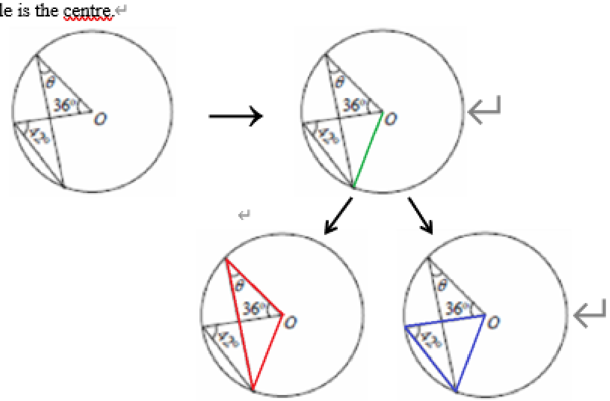
(HKCEE 1992 Mathematics Paper II, Q24)

In the figure, O is the centre of the circle, find θ.

A. 42°
B. 36°
C. 24°
D. 21°
E. 18°



Isosceles triangle is also a useful geometric shape and it exists in a circle when a vertex of the triangle is the centre.

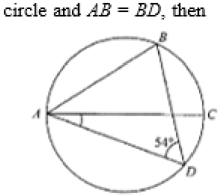


<u>Constructing right angles</u>

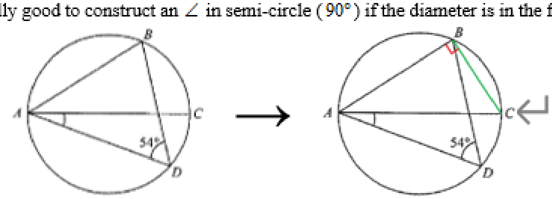
(HKCEE 2005 Mathematics Paper II, Q25)

In the figure, $ABCD$ is a circle. If AC is a diameter of the circle and $AB = BD$, then $\angle CAD =$

A. 18°
B. 21°
C. 27°
D. 36°



It is usually good to construct an $\angle$ in semi-circle (90°) if the diameter is in the figure.



(HKCEE 2006 Mathematics Paper II, Q47)

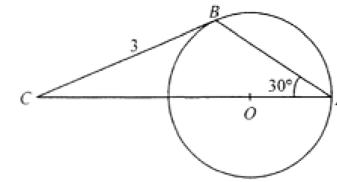
In the figure, O is the centre of the circle. A and B are points lying on the circle. If AOC is a straight line and BC is a tangent to the circle, then the radius of the circle is

A. $\frac{3}{2}$.

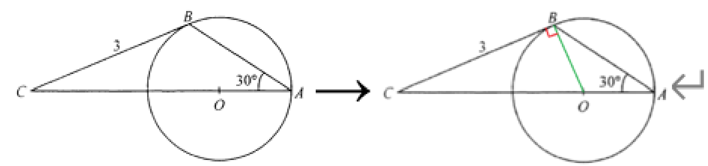
B. $\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{3}$.

D. $3\sqrt{3}$.



Joining the point of contact of tangent and circle to the centre of circle will give a right angle.



一題多解實例

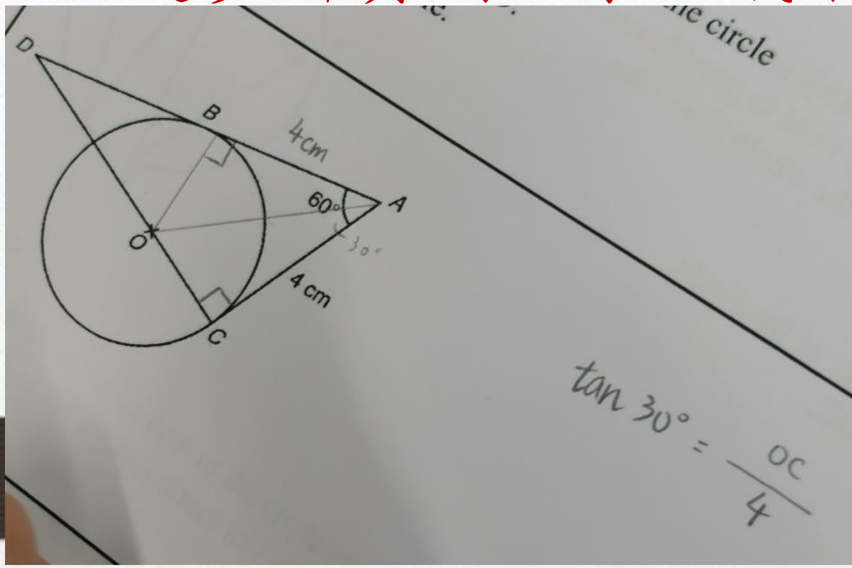
一題多解實例

結合HOTS與學生實況

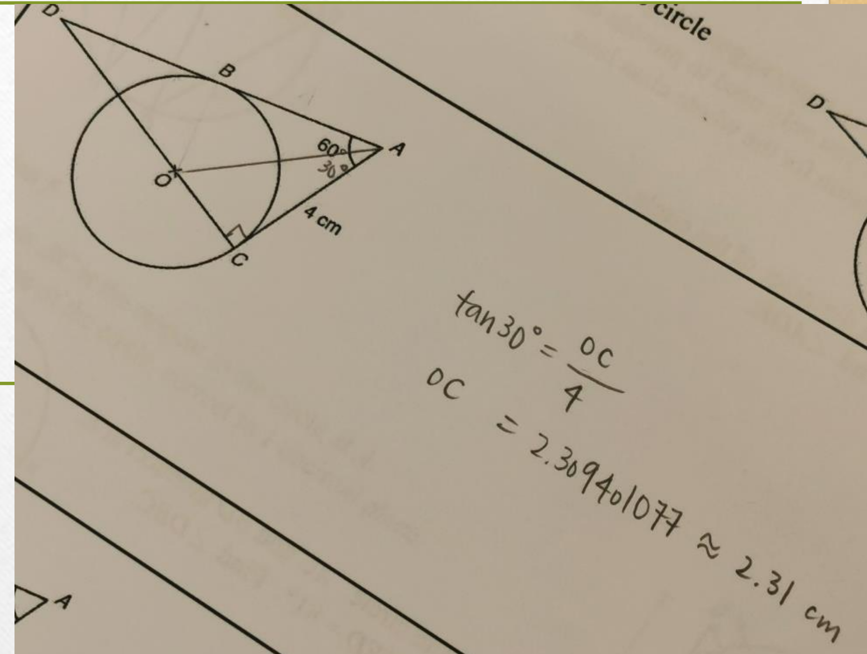
- “多解亦非愈多愈好”
- “向著目標進發，而非愈行愈遠”

一題多解實例

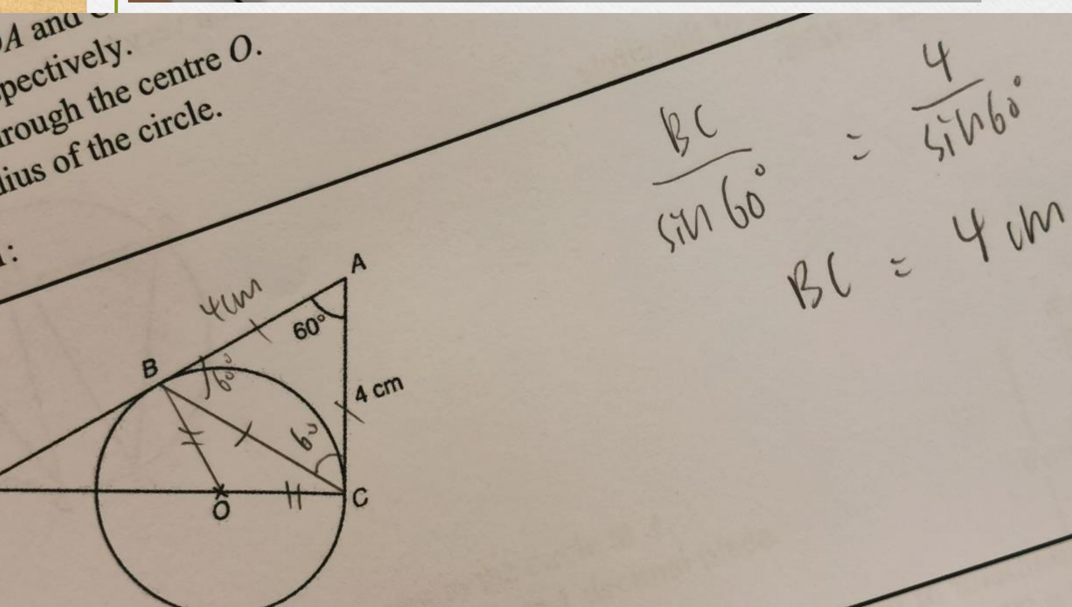
一題多解實例－學生成果



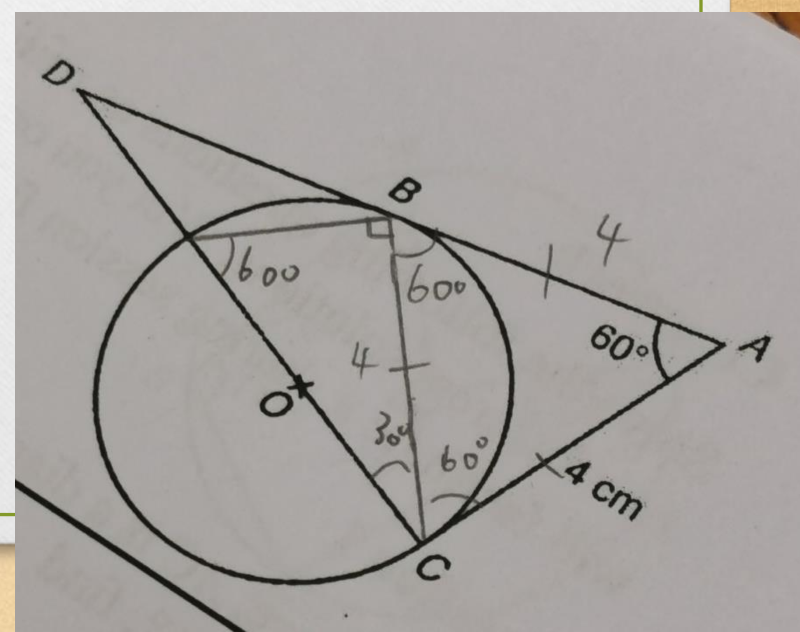
the circle
D
B
4cm
60°
A
O
30°
4 cm
C
tan 30° = OC/4



circle
D
B
60°
A
30°
O
4 cm
C
tan30° = OC/4
OC = 2.309401077 ≈ 2.31 cm



A and
pectively.
rough the centre O.
ius of the circle.
BC/sin 60° = 4/sin60°
BC = 4 cm
A
4cm
60°
B
60°
4 cm
60°
O
C



D
B
4
60°
60°
60°
A
4
O
30°
60°
4 cm
C

謝謝