

數學化教學簡介

馮振業

香港教育學院數學與資訊科技學系

2015年7月9日

大綱

- 數學化教學的基本理念
- 數學化教學的過去與未來

數學化教學的基本理念

數學化

- 已故荷蘭數學教育泰斗弗賴登塔爾（1973）提出以「數學化」（Mathematising）觀點組織數學的學習及其教學
- 「數學化」就是數學產物由無到有，由粗疏變精密的過程。學數學，就是參與數學產物再創造（re-invention）的過程。

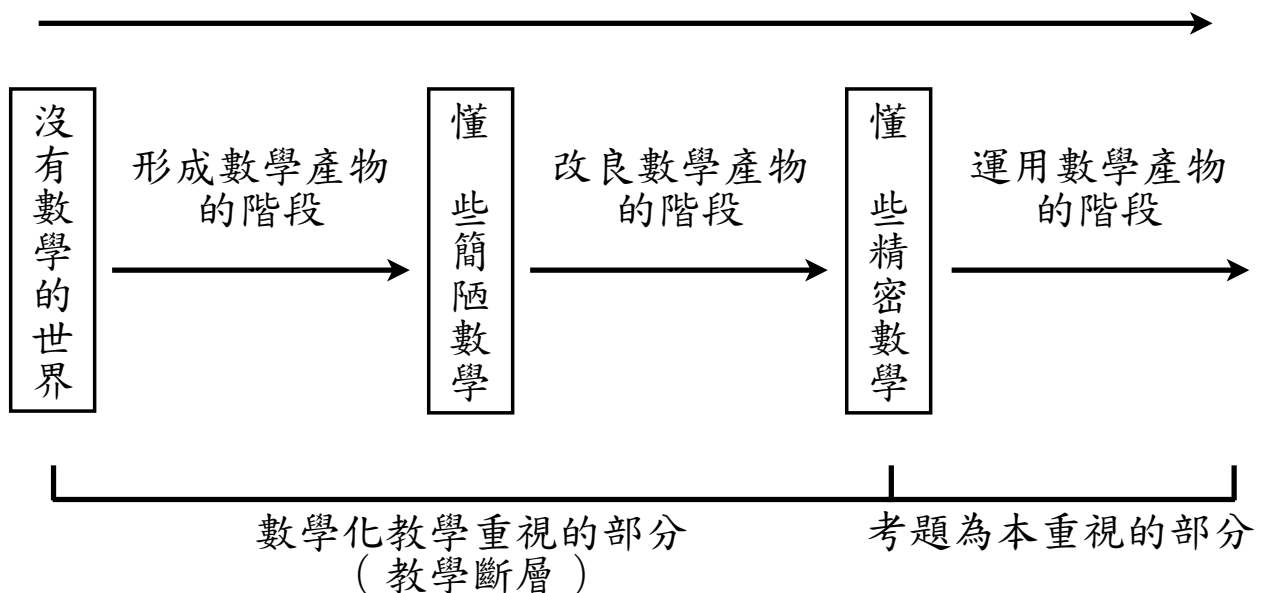
數學化教學

讓學生有些較完整的數學經驗，使他們明白數學產物由無到有，由粗疏到精密的演變過程。由此，學生

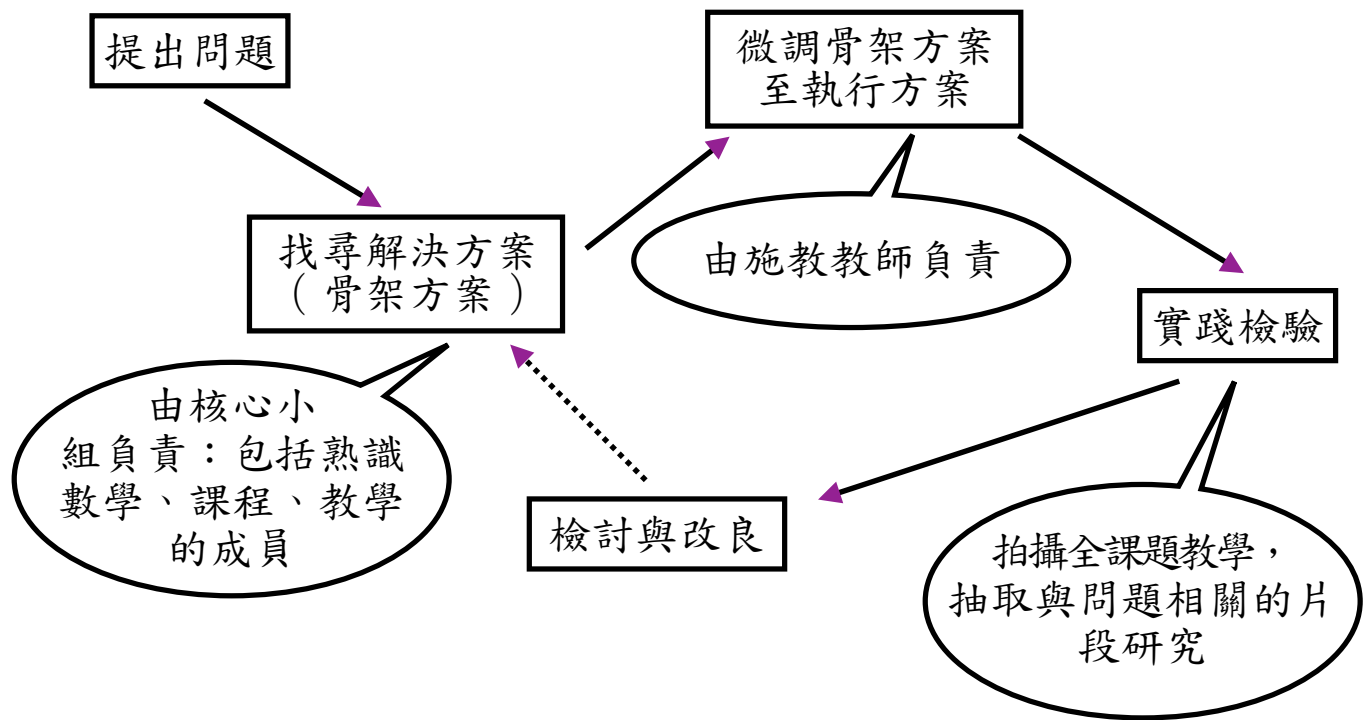
- 的自信心增加
- 掌握數學的獨特思考模式
- 明白數學產物的來歷
- 能循序漸進地深化數學語言的運用

教學斷層

學習數學的完整歷程



數學化教學的研究方式



解決方案如何減低學習負擔？

- 多感官學習：動手、動口、肢體運動、手眼聯動、手耳聯動、口眼聯動、……
- 重施故技：把千頭萬緒的學習內容，化為若干個反覆重現的要點
- 提供工具或協助，使能繞過某種無法逾越的障礙

反覆重施的故技

- 單位的意義
- 換單位的工作
- 角與距離
- 連結未知和已知（化未知為已知，由已知測未知）

單位的意義

- 單位就像一樣東西，只要相同，不管內裏是甚麼，都可數和算。
- 「公里」、「克」、「毫升」、「秒」、「星期」、「平方米」、「立方厘米」、「米每秒」、「元」是單位。
- 「1」、「10」、「100」、「0.001」、「 x 」、「 $1/7$ 」、「圖形」、「格」、「直角」、「打」、「圈」、「%」也可以是單位。

單位於度量範疇的意義

- 簡而言之，「度量」是指關於某些特質量化表達和比較的學問。
- 量化特質「有多遠」衍生「距離」概念
- 量化特質「平面區域的大小」衍生「面積」概念
- 量化特質「承托物件力量的大小」衍生「重量」概念
- 量化特質「過了多久」衍生「時間」概念

量化工作的演進軌道

- 直接比較：在不涉第三種事物的情況下，測定事物A與事物B，哪個具有較多（高）特質X
- 間接比較：在借助第三種事物的情況下，測定事物A與事物B，哪個具有較多（高）特質X
- 運用單位量度：選擇事物B作為參考對象（量度單位），然後測定其他事物具有特質X的程度，是事物B的多少倍。

量化工作的演進軌道

- 自訂單位：選擇的參考對象（量度單位）來自個人喜好，並未被廣泛應用。
- 公認單位：選擇的參考對象（量度單位）已被廣泛應用。
- 單位愈小，描述事物的精確度愈高。

換單位的工作

- 大單位換小單位叫「化」；小單位換大單位叫「聚」。進行單位化聚，需有換算公式。用乘法把大單位化小單位；用除法聚小單位成大單位。
- 1米每秒= 3.6公里每小時；1個圖形代表5，3個圖形代表15；1格代表20毫升，3格表60毫升；48小時= 2天；2個 $\frac{1}{6}$ = $\frac{1}{3}$ ；100個0.01=1；5個2元 = 10元。

角與距離

- 兩方向之間就是角；兩點之間就是線段；以「度」（或「直角」）為單位可量度角的大小；以「厘米」（或「毫米」）為單位可量度線段的長度（即兩點之間的距離）。
- 不同的角，大小可以相同；不同的線段，長度可以相同。

角與距離

- 「東」、「南」、「西」、「北」四個主要方向，相鄰的方向之間都是直角；由於直角是個很大的單位（轉一圈只有4個單位），將它分半就得八個方向。
- 量度硬幣的厚度，厘米是個很大的單位，將它等分10份就得毫米。

角與距離

- 從A點走到B點的最短路程，稱為A點與B點的距離；從A點走到直線L的最短路程，稱為A點與直線L的距離；從A點走到線段BC的最短路程稱為A點與線段BC的距離。
- 點與直線的距離，是學習平行線、對稱圖與底高配對的基礎。

連結未知和已知：化未知為已知

- 多位數的加減，化為多次的20以內的加減。
- 兩位數乘以一位數，化為兩次一位數乘以一位數。
- 兩位數除以一位數，化為不多於二次表內除法。
- 同分母分數加減，化為整數加減。

連結未知和已知：化未知為已知

- 計算同分母分數包含除法，化為計算整數包含除法。
- 計算小數乘法，化為計算整數乘法。
- 計算除數為小數的除法，化為計算除數為整數的除法。
- 解兩步方程，化為解一步方程兩次。
- 計算平行四邊形面積，化為計算矩形面積。

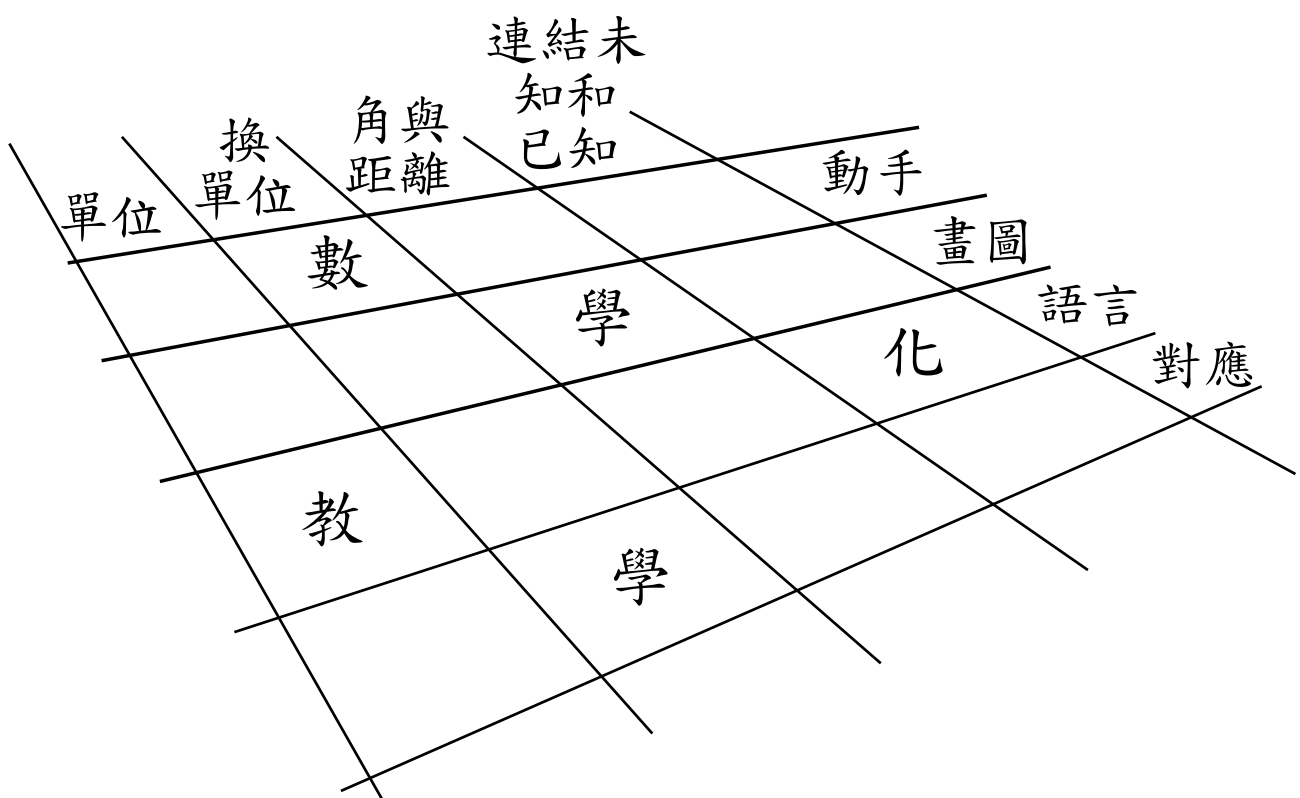
連結未知和已知：由已知測未知

- 由梯形面積公式入手，藉調整上底長度至 0，推導三角形面積公式。
- 由兩點至同一直線的距離檢測，推斷兩條直線無限延長會否相交。
- 由全部正方體展開圖入手，找出全部長方體展開圖。
- 由整數十進位值記數系統向右延伸，介紹小數的意義。

數學化教學的學習方法

- 充足的動手經驗
- 嚴格的圖畫
- 孕育適當語言
- 仔細地對應動手經驗、圖畫、文字和符號

數學化教學的設計原則



數學化教學的幾點重要特質

- 進化觀點：從無到有，由粗疏變精密
- 重視思想和方法：數學家怎樣考慮問題，怎樣入手工作
- 具體而科學的辯證手法
- 重視語言運用：把重要詞語放進完整句子運用

怎樣評鑑工作的成效？

- 檢視學生堂課、家課及紙筆測考的表現（末端評估）
- 觀察學生動手、動口的表現（過程評估）
- 觀察課堂上師生和生生互動的表現（過程評估）

數學化教學的過去與未來

緣起

於1998年由第一期優質教育基金撥款贊助

[https://qcrc.qef.org.hk/Publish/proposal/
1998/1998-0098/1998-0098-R01-25329.pdf](https://qcrc.qef.org.hk/Publish/proposal/1998/1998-0098/1998-0098-R01-25329.pdf)

過去數學化教學的工作重點

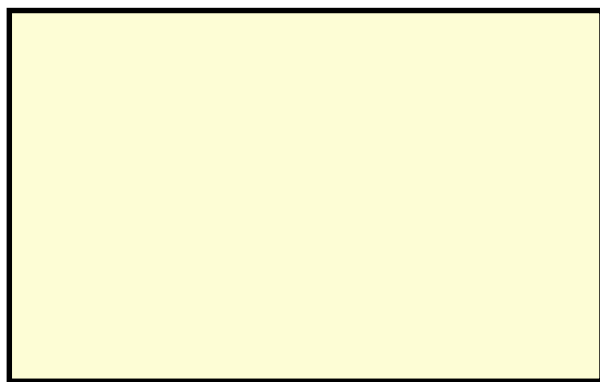
- 發掘教學問題
- 尋找解決方案
- 建立團隊 (www.mathematising.net)
- 把工作成果記錄下來
- 將研究成果編入教材 (《校本單元數學學習套》)

看看學生如何學習，
見證香港教師的非凡成就！

未來數學化教學的工作重點

- 培育教師
- 開發更多追求高端學習成效的教學設計
- 處理有特殊教育需要的學生的學習困難
- 將研究工作更全面地記錄下來
- 協助外地教師實踐數學化教學

幫教師進入狀態



謝謝各位！